بنام خدا

مجموعه ذیل کتاب **حساب دیفرانسیل** میباشد

انواع کتابهای فنی و مهندسی،داستان و رمان،کتب تاریخی،کتابهای شعر و حکایت ، کتابهای حوزه سیاست و چاپ نشده،کتب حقوقی،پزشکی،ورزشی،رایانه،علمی،دینی و مذهبی و......

wWw.YasBooks.Com

تاریخ نشر الکترونیکی فایل pdf: **۱۳۸۶/۱۲/۲۵**

منبع : استاد حساب دیفرانسیل ، آقای حمیدی

هر گونه کپی برداری با ذکر یک صلوات مجاز است

معادلات دیفرانسیل - فصل اول : تعاریف و مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل

۱٫۱ نگاهی بر آنچه در این فصل خواهیم آموخت :

منظور از معادله دیفرانسیل چیست؟ مرتبه و درجه ی یک معادله دیفرانسیل چیست؟ معادلات دیفرانسیل به چند دسته تقسیم می شوند؟ آیا تمام معادلات دیفرانسیل حل می شوند؟ منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل چیست؟ آیا معادلات حل شدنی جواب منحصر به فرد دارند؟ و . . .

اینها سوالاتی هستند که در این فصل در پی پاسخ آنها هستیم...

۱ .۲ . منظور از یک معادله دیفرانسیل چیست ؟

۱- معادله شامل متغیر مستقل x ، تابع y = f(x) و مشتقات f را یک معادله دیفرانسیل عادی می‌نامیم.

۲- اگر $y = f(x)$ یک تابع باشد ، معادله ای که شامل تابع **f** و مشتقات آن نسبت به متغیر **X** با شد را یک معادله دیفرانسیل (عادی) می نامیم.

۱ - معادله ای متشکل از یک تابع مجهول با بیش از یک متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی آن معادله دیفرانسیل جزئی می نامیم

۲- اگر **f** تابع دو متغیره یا بیشتر باشد، معادله ای که شامل **f** و مشتقات جزئی آن باشد را یک معادله دیفرانسیل جزئی می نامیم.

بسیاری از قوانین حاکم بر پدیده‌ها در فیزیک، شیمی، علوم مهندسی، زیست‌شناسی، ستاره‌شناسی، اقتصاد، و بسیاری از علوم گوناگون دیگر طبیعی‌ترین و ساده‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل پیدا نموده‌اند.

مثال ۱. معادلات زیر نمونه هایی از معادلات دیفرانسیل هستند:

الف : **y' + y = 0**

ب : $$\ln\left(\frac{y}{x}\right) + (y'')^2 = 4x$$

پ : $$(1 + x^2)dx + (1 + y^2)dy = 0$$

ت : $y'' + 4y' + 4y = 0$

از نمونه های بالا در می یابیم که ، یک معادله دیفرانسیل ، رابطه ای است که بین تابع مجهول **y** و مشتقات آن برقرار است.

1. 3. مرتبه و درجه ی یک معادله دیفرانسیل

دو تعریف و دو مثال :

تعریف ۱. اگر **y** تابعی دلخواه از **x** باشد و **F** تابعی از **n+2** متغیرِ **x** و **y** و **'y** و . . . و $y^{(n)}$ باشد ، آنگاه معادله دیفرانسیل

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (۱)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ی **n** نامیده می شود.

به عبارت ساده تر در یک معادله دیفرانسیل ، بزرگترین مرتبه ی مشتق موجود در آن، ، مرتبه ی معادله دیفرانسیل نامیده می شود.

مثال ۲ : معادله ی

$$y'' - 2y' + 3 = 0 \qquad (\text{الف})$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲ است و معادله ی

$$4y\left(y^{(3)}\right)^2 + 3y'' + 4x = 0 \qquad (\text{ب})$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۳ است.

تعریف ۲ : اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوانیم به صورت یک چندجمله ای بر حسب تابع مجهول **y** و مشتقاتش بنویسیم ، در این نمایش ، توانِ مرتبه ی معادله را درجه ی معادله دیفرانسیل می گوییم.

مثال ۳ : معادله (الف) در مثال ۲ ، یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ و از درجه ی اول است و معادله ی (ب) یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۳ درجه ۲ است.

ساختار معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل ساختارهای متفاوتی هستند و هر ساختار ویژگیهای متفاوتی دارد:

- معادلات مرتبه اول از درجه اول
  - با متغیرهای جدایی پذیر
  - همگن
  - خطی (برنولی)

o با دیفرانسیلهای کامل

- معادلات مرتبه دوم
- معادلات خطی با ضرایب ثابت: الف) همگن ب) ناهمگن .
- تکنیکهای تقریب زدن: الف) سریهای توانی ب) روشهای عددی

۴,۱. جواب های یک معادله دیفرانسیل

تعریف ۴ : جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ی **n** ، در بازه ی **I** ، تابع $y = f(x)$ است به طوری که مشتقات مرتبه اول تا مرتبه **n** ام تابع $y = f(x)$ در این بازه موجود باشند و در معادله ی $F\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right)$ صدق کنند.

برای درک بهتر این مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ : معادله دیفرانسیل $y''' + 2y'' + y' = 0$ را در نظر بگیرید. در این صورت $F(x, y, y', y'', y''') = y''' + 2y'' + y' = 0$ خواهد بود. تابع $y = e^{-x}$ یک جواب این معادله دیفرانسیل است زیرا مشتقات این تابع از هر مرتبه ای در $\mathbb{R}$ موجودند و این تابع و مشتقاتش تا مرتبه ۳ در معادله ی داده شده صدق می کنند :

$$\left.\begin{array}{l} y = +e^{-x} \\ y' = -e^{-x} \\ y'' = +e^{-x} \\ y''' = -e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow y''' + 2y'' + y' = -e^{-x} + 2e^{-x} - e^{-x} = 0$$

سوال : آیا تابع $y = e^{-x}$، تنها تابعی است که در معادله مثال ۴ صدق می کند؟ یعنی آیا این تابع منحصر به فرد است؟

پاسخ این سوال منفی است. زیرا اگر c عدد ثابت دلخواهی باشد، در این صورت تابع $y = c\, e^{-x}$ نیز در $\mathbb{R}$ دارای مشتق از هر مرتبه ای هست و این تابع و مشتقاتش تا مرتبه ی ۳، در معادله ی داده شده صدق می کنند :

$$\left.\begin{array}{l} y = +c\, e^{-x} \\ y' = -c\, e^{-x} \\ y'' = +c\, e^{-x} \\ y''' = -c\, e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow y''' + 2y'' + y' = -c\, e^{-x} + 2\, c\, e^{-x} - c\, e^{-x} = 0$$

بنابراین معادله دیفرانسیل یاد شده در مثال ۴، به ازای هر ثابت دلخواه c ، یک جواب خواهد داشت.

سوال : آیا تنها توابعی به شکل $y = c\,e^{-x}$ در معادله مثال ۴ صدق می کنند؟

پاسخ این سوال نیز منفی است. زیرا اگر توابع $y = c\,x\,e^{-x}$ را که **c** یک ثابت دلخواه از $\mathbb{R}$ است در نظر بگیریم ، آنگاه این تابع که مشتقاتش از هر مرتبه ای در $\mathbb{R}$ موجودند، در معادله دیفرانسیل یاد شده صدق می کنند. (امتحان کنید!!) همچنین اگر **c** یک ثابت دلخواه باشد، تابع ثابت y = c نیز دارای مشتق از هر مرتبه ای در $\mathbb{R}$ است و در معادله دیفرانسیل مثال۴ صدق می کند.

اکنون این سوال پیش می آید که از بین این همه جواب برای چنین معادلاتی ، کدام یک از آن ها را به عنوان جواب اصلی انتخاب می کنند؟ که در زیر با تعریف جواب عمومی به پاسخ آن پی خواهیم برد :

تعریف ۵ : جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل :

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ، تابعی است شامل n ثابت دلخواهِ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ، که این تابع به ازای هر مقدارِ این ثابت ها ، در معادله دیفرانسیلِ $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ صدق کند.

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل را می توان به صورت صریح یا ضمنی بیان کرد که $y = g(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ نمایش صریح جواب عمومی و $h(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ نمایش ضمنی آن است.

مثال ۵ : تابع $y = c_1 e^{-x} + c_2\,x\,e^{-x} + c_3$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مثال ۴ است. این تابع به ازای هر مقدار c_1 و c_2 و c_3 در معادله دیفرانسیل $y''' + 2y'' + y' = 0$ صدق می کند. مثلاً تابع $y = e^{-x}$ به ازای $c_1 = 1$ و $c_2 = c_3 = 0$ به دست آمده است و تابع $y = 2\,e^{-x}$ به ازای $c_2 = 2$ و $c_1 = c_3 = 0$ به دست می آید و اگر $c_1 = c_2 = 0$ آنگاه $y = c_3$ نیز جواب معادله یاد شده است.

تعریف ۶ : جواب خصوصی :

اگر در جواب عمومیِ یک معادله دیفرانسیل ، به ثابت ها ، مقادیر معینی نسبت دهیم، جواب خصوصی به دست می آید.

جواب خصوصی بیشتر در مورد مسأله ی مقدار اولیه لازم می آید که در بخش بعدی به بیان آن می پردازیم.

تعریف ۷ : جواب غیر عادی :

بعضی معادلات دیفرانسیل جوابی دارند که آن را نمی توان از جوابِ عمومی به دست آورد. این گونه جواب ها را جواب غیر عادی می گوییم.

۵,۱. مسأله ی مقدار اولیه

مثال ۶ : معادله دیفرانسیل مثال ۴ را به یاد آورید. می خواهیم جوابی از این معادله را بیابیم که در شرط های زیر صدق می کند :

$y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$ و $y''(0) = 3$

حل : دیدیم که جواب عمومی معادله دیفرانسیل مورد نظر، به صورت $y = c_1 e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} + c_3$ است.
بنابراین اگر بخواهیم شرط $y(0) = 1$ برقرار باشد ، در جواب عمومی مقادیر **x = 0** و **y = 1** را قرار می دهیم. داریم :

$$(i) \qquad c_1 + c_3 = 1$$

بنابر شرط دوم، بایستی داشته باشیم $y'(0) = 2$، پس

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2\, x\, e^{-x}$$

$$\Longrightarrow -c_1 + c_2 = 2 \qquad (ii)$$

و همچنین در شرط سوم داریم : $y''(0) = 3$، یعنی :

$$c_1 - 2c_2 = 3 \qquad (iii)$$

بنابراین سه معادله i و ii و iii داریم و و سه مجهول c_1 و c_2 و c_3. با حل این دستگاه سه معادله و سه مجهول ، مقادیر c_1 و c_2 و c_3 محاسبه می شوند :

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - 2c_2 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{c_1 = -7} \text{ و } \boxed{c_2 = -5} \text{ و } \boxed{c_3 = 8}$$

اکنون با قرار دادن مقادیر به دست آمده در جواب عمومی، جواب خصوصی مطلوب به صورت زیر به دست می آید :

$$y(x) = -7e^{-x} - 5xe^{-x} + 8$$

تعریف ۸ : مسأله ی مقدار اولیه :

مسأله ی مقدار اولیه ی متناظر با معادله دیفرانسیل مرتبه ی **n** ، معادله ایست با **n** شرط به طوری که بتوانیم با این **n** شرط ، جواب خصوصی را از جواب عمومی بیرون کشیم.

۶,۱. تعابیری از جوابِ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول :

الف : تعبیر هندسی

ب : تعبیر فیزیکی

الف : تعبیر هندسی

در بخش ۳,۱ **دیدیم** که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $(*) \qquad y' = f(x,y)$ است. می خواهیم جواب این معادله را به روش هندسی به دست آوریم.

فرض کنیم در این معادله، تابع $f(x,y)$ در ناحیه ی D از صفحه ی xy تعریف شده و در آن ناحیه پیوسته باشد و P_0 به مختصات (x_0,y_0) ، نقطه ای درون این ناحیه باشد. بنابراین $y'(P_0)=f(x_0,y_0)$ موجود است.
از نقطه ی P_0 ، خطی با شیب $y'(P_0)=f(x_0,y_0)$ رسم می کنیم. نقطه ی P_1 به مختصات (x_1,y_1) را روی این خط و نزدیک به P_0 طوری در نظر می گیریم که درون D باشد. حال از نقطه ی P_1 ، خطی با شیب $y'(P_1)=f(x_1,y_1)$ رسم می کنیم. نقطه ی P_2 به مختصات (x_2,y_2) را روی این خط و نزدیک به P_1 طوری در نظر می گیریم که درون D باشد.با ادامه ی این روند و انتخاب نقاط $\dots, P_1, P_0$ ، خط شکسته ای رسم می شود. اگر این نقاط خیلی نزدیک به هم باشند، (فاصله ی هر نقطه تا نقطه ی بعدی اش از ε دلخواه کوچکتر باشد) خط شکسته به منحنی ای با معادله ی $y=P(x)$ میل می کند. این منحنی دارای این خاصیت است که شیب در هر نقطه ی آن در معادله ی $(*)$ صدق می کند. پس این منحنی ، یک جواب معادله است و در شرط اولیه ی $y'(P_0)=f(x_0,y_0)$ صدق می کند.

اگر نقطه ی P_0 را به نقطه ی دیگری درD ، مانند Q_0 ، تغییر دهیم و همان کار ها را تکرار کنیم، منحنی جدیدی مانند $y=Q(x)$ به دست می آید که آن نیز یک جواب معادله ی $(*)$ است اما شرط اولیه ی آن تغییر کرده است.

ب : تعبیر فیزیکی

معادله ی $y'=f(t,y)$ را می توان معادله ی حرکت کتحرکی در نظر گرفت که سرعت آن در هر لحظه ی t برابر با $f(t,y)$ است. اگر این متحرک روی مسیر $y=y(t)$ حرکت کند، $f(t,y)$ ، سرعت متحرک را در لحظه ی t و مکان $y(t)$ نشان می دهد. اگر متحرک از لحظه ی t_0 که در مکان $y_0=y(t_0)$ قرار دارد، شروع به حرکت کند، با سرعت اولیه ی $f(t_0,y_0)$ حرکت خود را آغاز کرده است.