کتاب محاسبات عددی

تالیف: دکتر مسعود نیکوکار-دکتر محمد تقی درویشی

باشگاه مهندسان سمنان

فصل چهارم: مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

فصل چهارم

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۱.۴ مشتق‌گیری عددی

کاربرد مشتق در ریاضیات کاربردی فراوان است و در حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد.معمولاً برای تابعی که دارای ضابطه معلوم باشد، مشتق آن را با روشهای حساب دیفرانسیل می‌توانیم به دست آوریم.اما هرگاه ضابطه تابع پیچیده و یا تابع تنها به صورت یک جدول معلوم باشد، برای مشتق‌گیری بایستی به روشهای عددی روی آورد.در این قسمت بعضی از روشهای مشتق‌گیری عددی یک تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.دستورهای مشتق‌گیری عددی را می‌توان با مشتق‌گرفتن از چند جمله‌ای درونیاب به دست آورد.هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f باشد، در این صورت مشتقهای $f'(x)$، $f''(x)$ و ... را به کمک $P'(x)$، $P''(x)$ و ... به دست می‌آوریم.البته باید متذکر شد که مشتق‌گیری عددی بر اساس چند جمله‌ای درونیاب یک عمل ناپایدار است، یعنی نمی‌توانیم دقت خوبی را برای جواب انتظار داشته باشیم، زیرا خطای حاصل از مشتق‌گیری یعنی $f'(x) - P'(x)$ ممکن است خیلی بزرگ باشد.

۱.۱.۴ دستورهای مشتق‌گیری بر اساس چند جمله‌ای درونیاب

هرگاه تابع f در نقاط متساوی‌الفاصله x_j ، $j = 0, 1, \cdots, n$ داده شده باشد، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ به کمک دستور تفاضل پیشرو نیوتن عبارتست از :

$$\boxed{P(x) = f_i + s\Delta f_i + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_i + \cdots + \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}\Delta^k f_i \qquad (1)}$$

که در آن $h = x_{i+1} - x_i$ و $x = x_i + sh$ برای $i = 0, 1, \cdots, n-1$.چون $P(x)$ بر حسب ... است، بنابراین

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \qquad (2)$$

و چون از $x = x_i + sh$ داریم $dx = hds$ ، لذا

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \qquad (3)$$

بنابراین با در نظر گرفتن روابط (۲) و (۳) و مشتق‌گیری از (۱) خواهیم داشت :

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}[\Delta f_i + (s - \frac{1}{2})\Delta^2 f_i + \frac{3s^2 - 6s + 2}{6}\Delta^3 f_i + \cdots] \qquad (4)$$

به طور مشابه برای مشتق مرتبه دوم داریم :

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \simeq \frac{d^2 P(x)}{dx^2} \simeq \frac{1}{h^2}\frac{d^2 P(x)}{ds^2} = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f_i + (s-1)\Delta^3 f_i \cdots \qquad (5)$$

علی‌الخصوص هرگاه $s = 0$ برای مشتقات f در نقاط جدولی x_i دستورهای زیر را خواهیم :

$$f'(x_i) = f'_i \simeq \frac{1}{h}[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \cdots] \qquad (6)$$

$$f''(x_i) = f''_i \simeq \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i + \frac{11}{12}\Delta^4 f_i - \cdots]$$

اولاً برای محاسبه تقریبی از f'_i و f''_i یک یا چند جمله از عبارات سمت راست (۶) و (۷) انتخاب می‌شوند.مثلاً

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (8)$$

یا

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i] = \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \qquad (9)$$

به طور مشابه به کمک رابطه (۷) یک تقریب برای f''_i به صورت زیر است :

$$f''_i \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \qquad (10)$$

همچنین با قرار دادن $s = \frac{1}{2}$ در رابطه (۴) دستور زیر برای نقاط میانی x_iها به دست می‌آید :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) = f'_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}[\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i + \frac{1}{48}\Delta^4 f_i - \cdots] \qquad (11)$$

که با انتخاب یک جمله در عبارت سمت راست خواهیم داشت :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (12)$$

به طور مشابه با قرار دادن $s = 1$ در دستور مشتق‌گیری (۵) داریم :

$$f''(x_i + h) = f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f_i - \frac{1}{12}\Delta^4 f_i + \cdots] \qquad (13)$$

که با انتخاب یک جمله در عبارت سمت راست خواهیم داشت :

$$f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \qquad (14)$$

مثال ۱. مقدار f'_i را برای $i = 0, 1, 2, 3$ برای تابع جدولی زیر با استفاده از فرمول (۸) به دست آورید.

x_i	۰٫۱	۰٫۱۵	۰٫۲	۰٫۲۵	۰٫۳
f_i	۱٫۱۰۵۱۷	۱٫۱۶۱۸۳	۱٫۲۲۱۴۰	۱٫۲۸۴۰۳	۱٫۳۴۹۸۶

حل: جدول تفاضلات تابع جدولی فوق به صورت زیر است :

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
۰٫۱	۱٫۱۰۵۱۷		
		۰٫۰۵۶۶۶	
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۰٫۰۰۲۹۱
		۰٫۰۵۹۵۷	
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰		۰٫۰۰۳۰۶
		۰٫۰۶۲۶۳	
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۰٫۰۰۳۲۰
		۰٫۰۶۵۸۳	
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۶		

با توجه به فرمول (۸) و اینکه $h = 0.05$ خواهیم داشت :

i	$f'_i \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i$
۰	۱٫۱۳۳۲
۱	۱٫۱۹۱۴
۲	۱٫۲۵۲۶
۳	۱٫۳۱۶۶

مثال ۲. برای تابع جدولی مثال ۱ مقدار f'_i را برای $i = 0, 1, 2$ با استفاده از فرمول (۹) به دست آورید.

حل:

i	$f'_i \simeq \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i)$
۰	۱٫۱۰۴
۱	۱٫۱۶۰۸
۲	۱٫۲۲۰۶

توجه: مقادیر f_i در مثال ۱ مربوط به مقادیر تابع $f(x) = e^x$ هستند که مشتق آن با خودش برابر است. لذا بایستی مقادیر جدولهای مثال ۱ و ۲ با مقدار تابع یعنی f_iها برابر باشند که نیستند. و این مطلب از همان ناپایدار بودن و توام با خطای زیاد بودن مشتق‌گیری عددی حاصل می‌شود. البته همانگونه که جدول مثال ۲ نشان می‌دهد، این مقادیر بهتر از مقادیر جدول مثال ۱ هستند.

مثال ۳. مقدار $f''_0 = f''(0.1)$ و $f''_1 = f''(0.15)$ را برای تابع جدولی مثال ۱ به کمک فرمول (۱۰) به دست آورید.

حل:

$$f''_0 \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0 = 1.164$$

$$f''_1 = f''(0.15) \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_1 = 1.224$$

مثال ۴. به کمک فرمول (۱۲) تقریبهایی از $f'(x_i+\frac{h}{2})$ را برای $i=0,1,2,3$ به دست آورید.

حل: با توجه به فرمول (۱۲) این مقادیر همان مقادیر جدول مثال ۱ می‌باشند.

۲.۱.۴ دستورهای مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور

به کمک بسط تیلور یک تابع می‌توان بعضی از دستورهای قسمت قبل و دستورهای دیگری را برای مشتق‌گیری به دست آورد.فرض کنید داریم $x_{i+1}=x_i+h$، لذا خواهیم داشت :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i+h) = f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)+\cdots \qquad (15)$$

همچنین هرگاه $x_{i-1}=x_i-h$، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i-h) = f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)+\cdots \qquad (16)$$

بنابراین از رابطه (۱۵) می‌توانیم بنویسیم :

$$f'(x_i)\simeq\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h} \qquad (17)$$

رابطه (۱۷) همان رابطه (۸) می‌باشد.به طور مشابه از رابطه (۱۶) می‌توانیم بنویسیم :

$$f'(x_i)\simeq\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}=\frac{f_i-f_{i-1}}{h} \qquad (18)$$

توجه: برای محاسبه $f'(x_0)$ از رابطه (۱۷) و برای محاسبه $f'(x_n)$ از رابطه (۱۸) استفاده می‌کنیم.

هرگاه رابطهٔ (۱۶) را جمله به جمله از رابطهٔ (۱۵) کم نموده و جملات اضافی را حذف کنیم خواهیم داشت :

$$f'(x_i)\simeq\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h} \qquad (19)$$

...گاه جملات دو رابطه (۱۵) و (۱۶) را با هم جمع کنیم، تقریب زیر برای $f''(x_i)$ به ...که همان رابطه (۱۰) می‌باشد.(با حذف جملات اضافی)

$$f''(x_i)\simeq\frac{f(x_{i-1})-2f(x_i)+f(x_{i+1})}{h^2}=\frac{f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}}{h^2}$$

...ابه می‌توان رابطه زیر را برای مشتق مرتبه سوم f در نقطه x_i به دست آورد.

$$f'''(x_i)\simeq\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+2f_{i-1}-f_{i-2}}{2h^3}$$

... تابع جدولی زیر مفروض است، مقادیر f'_0، f'_2 و f''_2 را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۰	۰٫۳۷۵	۰٫۹۷۱	۱٫۵۱۱

... فرمول (۱۷) داریم؛ ($h=1$)

$$f'_0=f'(x_0)=f'(0)\simeq\frac{f_1-f_0}{h}=\frac{0.375-0}{1}=0.375$$

$$f'_2=f'(x_2)=f'(2)\simeq\frac{f_3-f_2}{h}=\frac{1.511-0.971}{1}=0.540$$

... برای f'_2 از فرمول (۱۸) داریم :

$$f'_2\simeq\frac{f_2-f_1}{h}=\frac{0.971-0.375}{1}=0.596$$

...فرمول (۱۹) برای f'_2 خواهیم داشت :

$$f'_2\simeq\frac{f_3-f_1}{2h}=\frac{1.511-0.375}{2}=\frac{1.136}{2}=0.568$$

...از رابطه (۲۰) برای f''_2 داریم:

$$f''_2=f''(x_2)\simeq\frac{f_1-2f_2+f_3}{h^2}=\frac{0.375-1.942+1.511}{1}=-0.056$$

۲.۴ خطای مشتق‌گیری عددی

به منظور به دست آوردن خطای فرمولهای مختلفی که در بخش‌های قبل برای $f'(x)$ حاصل می‌شود از بسط تیلور استفاده می‌کنیم.به عنوان مثال فرمول (۱۷) را در نظر بگیرید که از رابطه (۱۵) به دست آمده است، هرگاه جملات را به طور کامل بنویسیم خواهیم داشت :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} = f'_i + \frac{h}{2}f''_i + \frac{h^2}{6}f'''_i + \cdots \qquad (22)$$

در نتیجه :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - f'_i = \frac{h}{2}f''_i + \frac{h^2}{6}f'''_i + \cdots \qquad (23)$$

لذا مقدار سمت راست در رابطه (۲۳) خطای $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ را به عنوان تقربی از f'_i بیان می‌کند.با توجه به این که h کوچک اختیار می‌شود، **جمله غالب** در سمت راست عبارت (۲۳)، $\frac{h}{2}f''_i$ است، بنابراین خطای رابطه (۱۷) را به منظور تقریب f'_i به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - f'_i \simeq \frac{h}{2}f''_i \qquad (24)$$

چون توان h در عبارت (۲۴) یک می‌باشد، اصطلاحاً می‌گوییم خطا **متناسب** با h است و می‌نویسیم :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - f'_i = O(h)$$

مثال ۶. نشان دهید خطای عبارت (۱۲) به منظور تقریب $f'(x_i+\frac{h}{2})$ متناسب با h^2 است، یعنی نشان دهید :

$$f'(x_i+\frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1}-f_i}{h} = O(h^2)$$

$f'(x_i+\frac{h}{2})$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f'(x_i+\frac{h}{2}) = f'_i + \frac{h}{2}f''_i + \frac{(\frac{h}{2})^2}{2!}f'''_i + \cdots$$

$$f'(x_i+\frac{h}{2}) = f'_i + \frac{h}{2}f''_i + \frac{h^2}{8}f'''_i + \cdots$$

لا عبارت (۲۲) را از عبارت (۲۵) کم کنیم، خواهیم داشت :

$$f'(x_i+\frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1}-f_i}{h} = \frac{h^2}{8}f'''_i - \frac{h^2}{6}f'''_i + \cdots = -\frac{1}{24}h^2 f'''_i$$

$$f'(x_i+\frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1}-f_i}{h} = O(h^2)$$

می‌دانیم $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ هم به عنوان تقریبی از $f'(x_i)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد و هم به ریب $f'(x_i+\frac{h}{2})$. اما همانگونه که مثالهای ۱ و ۲ نشان می‌دهند، این عبارت تقریب ای $f'(x_i+\frac{h}{2})$ می‌باشد و عبارتهای خطا نیز این مطلب را تایید می‌کند، زیرا هر چه توان بارت خطا بیشتر باشد خطا کمتر است. از اینکه با کوچکتر شدن h، خطا کمتر می‌شود.

حی در مورد ناپایداری مشتق‌گیری عددی

ر حالت کلی خطای فرمولهای مشتق‌گیری عددی به صورت $O(h^p)$ است که در آن p بستگی عداد جملاتی دارد که برای تقریب مشتق مورد نظر استفاده می‌شود.ظاهراً هر چه p بزرگتر باشد، طا نیز کمتر خواهد بود، اما در عمل به هنگام کوچک بودن مقدار h مشکلاتی به وجود می‌آید.به نوان مثال کسر زیر را به عنوان تقریب f'_i در نظر بگیرید

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} \qquad (26)$$

که نشان دادیم، خطای آن متناسب با h است.در ظاهر برای کم بودن خطا، h را بایستی کوچک اختیار کنیم.اما کوچک بودن h به معنی نزدیک بودن f_i و f_{i+1} است، بنابراین $f_{i+1}-f_i$ می‌تواند

توام با خطای زیاد باشد (مسأله ۱۱ فصل اول را ببینید) و چون $f_{i+1} - f_i$ بر مقدار کوچک h تقسیم می‌شود و یا در واقع در مقدار بزرگ $\frac{1}{h}$ ضرب می‌شود، خطای محاسبه کسر زیاد خواهد بود. خلاصه اینکه هرگاه h خیلی کوچک باشد، خطای محاسبه $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ زیاد خواهد بود. بنابراین برای کم بودن خطا از طرفی h باید خیلی کوچک اختیار شود و از طرف دیگر نباید خیلی کوچک اختیار شود. لذا برای انتخاب h در تنگنا قرار می‌گیریم و انتخاب بهترین h در عمل امکانپذیر نیست.

۳.۴ انتگرالگیری عددی

برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ هرگاه تابع اولیه f موجود نباشد و یا f به صورت جدولی داده شده باشد، از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود. واضح است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ که محصور است به محور xها، خطوط $x = a$ و $x = b$ تعبیر کرد و با تقسیم فاصله $[a, b]$ به چند زیر فاصله و جمع کردن مساحتهای مربوط به این زیر فاصله‌ها مقدار انتگرال را محاسبه کرد.

فرض کنید $[a, b]$ به n قسمت مساوی به صورت زیر تقسیم شود :

$$[x_i, x_{i+1}] \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

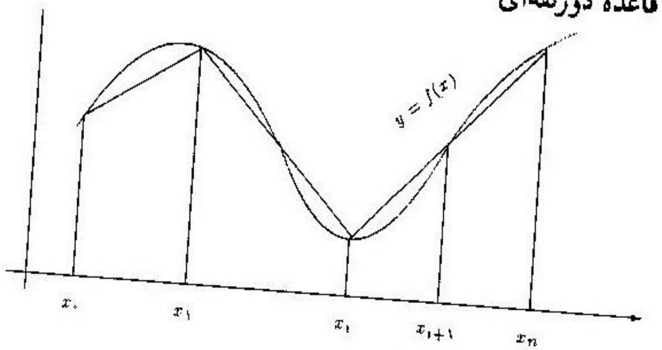
که در آن

$$x_{i+1} - x_i = h \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

لذا

$$h = \frac{b-a}{n}$$

قاعده ذوزنقه‌ای



صله $[x_i, x_{i+1}]$ تقریب زیر را به کار می‌بریم :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) \qquad (27)}$$

(۲۷) مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده‌های f_i و f_{i+1} و ارتفاع h می‌باشد.

لین برای پیدا کردن تقریبی از $\int_a^b f(x)dx$ به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$= \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n]$$

بنابراین با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_a^b f(x)dx$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$\frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + \cdots + f_{n-1}) + f_n]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n] \qquad (28)}$$

توجه: $T(h)$ به معنی مقدار انتگرال با استفاده از روش ذوزنقه‌ای (Trapezoid) می‌باشد که هر زیر فاصله دارای طول h می‌باشد.

برنامه کامپیوتری روش ذوزنقه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$

این برنامه مقدار انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش ذوزنقه‌ای محاسبه می‌کند.مقادیر a، b و همچنین تعداد زیر فاصله‌ها، n، به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای محاسبه انتگرال توابع مختلف به روش ذوزنقه‌ای مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است

```
c
c       Trapezoid Integration
c
        F(x)= exp(-x**2)
        read(*,*) a,b,n
        s = (F(a) + F(b)) / 2.
        h=(b-a)/n
        do 10 i=1,n-1
        s = s + F(a+i*h)
10      continue
        s = s * h
        write(*,*) "INTEGRAL = " , s
        end
```

مثال ۷. تقریبهایی از $\int_{۰٫۱}^{۰٫۳} e^x dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = ۰٫۲, ۰٫۱, ۰٫۰۵$ به دست آورید.

داریم $a = ۰٫۱$، $b = ۰٫۳$ و $f(x) = e^x$، لذا

$$T(۰٫۲) = \frac{۰٫۲}{۲}[f(۰٫۱) + f(۰٫۳)] = ۰٫۱[۱٫۱۰۵۱۷ + ۱٫۳۴۹۸۶] = ۰٫۲۴۵۵$$

$$T(۰٫۱) = \frac{۰٫۱}{۲}[f(۰٫۱) + ۲f(۰٫۲) + f(۰٫۳)] = ۰٫۰۵[۱٫۱۰۵۱۷ + ۲(۱٫۲۲$$

$$+ ۱٫۳۴۹۸۶] = ۰٫۲۴۴۸۹$$

$$T(۰٫۰۵) = \frac{۰٫۰۵}{۲}[f(۰٫۱) + ۲(f(۰٫۱۵) + f(۰٫۲) + f(۰٫۲۵)) + f(۰٫۳)]$$

$$= ۰٫۰۲۵[۱٫۱۰۵۱۷ + ۲(۱٫۱۶۱۸۳ + ۱٫۲۲۱۴۰ + ۱٫۲۸۴۰۳)$$

$$+ ۱٫۳۴۹۸۶] = ۰٫۲۴۴۷۴$$

مثال ۸. با استفاده از مقادیر جدول زیر تقریبی از $\int_0^1 f(x)dx$ حساب کنید.

x_i	۰	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۸	۱
f_i	۱	۱٫۲۲۱۴	۱٫۴۹۱۸	۱٫۸۲۲۱	۲٫۲۲۵۵	۲٫۷۱۸۳

حل: با گرفتن $h = ۰٫۲$ داریم :

$$T(۰٫۲) = \frac{۰٫۲}{۲}(f(۰) + ۲(f(۰٫۲) + f(۰٫۴) + f(۰٫۶) + f(۰٫۸)) + f(۱))$$

$$= ۱٫۷۲۳۹۹$$

۲.۳.۴ قاعده سیمپسون

در قاعده ذوزنقه‌ای برای تقریب $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ یک چند جمله‌ای درجه یک (یک خط) را جایگزین تابع $f(x)$ می‌کنیم که این عمل رابطه (۲۸) را نتیجه می‌دهد.اما در روش سیمپسون یک چند جمله‌ای درجه دوم را جایگزین تابع f در فاصله $[x_i, x_{i+2}]$ می‌کنیم و از آن تقریب زیر را خواهیم داشت :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{۳}(f_i + ۴f_{i+1} + f_{i+2}) \quad (۲۹)}$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمپسون در سراسر فاصله $[x_۰, x_n]$ چون رابطه (۲۹) تقریبی برای $[x_i, x_{i+۲}]$ است، لذا باید n زوج باشد، یعنی تعداد نقاط فرد باشد تا بتوان (۲۹) را به کار برد با فرض زوج داریم:

$$\int_{x_۰}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_۰}^{x_۲} f(x)dx + \int_{x_۲}^{x_۴} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-۲}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\simeq \frac{h}{۳}(f_۰ + ۴f_۱ + f_۲) + \frac{h}{۳}(f_۲ + ۴f_۳ + f_۴)$$
$$+ \cdots + \frac{h}{۳}(f_{n-۲} + ۴f_{n-۱} + f_n)$$

بنابراین هرگاه $S(h)$ نشان‌دهنده تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش سیمپسون باشد که هر زیر فاصله دارای طول است، خواهیم داشت:

$$\int_{x_۰}^{x_n} f(x)dx \simeq S(h) = \frac{h}{۳}[f_۰ + ۴f_۱ + ۲f_۲ + ۴f_۳ + ۲f_۴ + \cdots + ۲f_{n-۲} + ۴f_{n-۱} + f_n]$$

برنامه کامپیوتری روش سیمپسون برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$.

این برنامه مقدار انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^۲}$ به روش سیمپسون محاسبه می‌کند. مقادیر b و همچنین نصف تعداد زیر فاصله‌ها، n، به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای محاسبه انتگرال توابع مختلف به روش سیمپسون مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

(دقت کنید که برنامه طوری نوشته است که تعداد زیر فاصله‌ها به صورت $۲n$ درنظر گرفته می‌شود.)

```
c
c     Simpson's Method
c
```



```
      F(x)= exp(-x**2)
      read(*,*) a,b,n
      s = 0.
      h = (b-a) / n
      h2 = h / 2.
      h3 = F(a+h2)
      do 10 i=1,n-1
      s = s + F(a+i*h)
      h3 = h3 + F(a+i*h+h2)
10    continue
      s = h/6. * (F(a) + 4 * h3 + 2 * s + F(b))
      write(*,*) "INTEGRAL = " , s
      end
```

تقریبهایی از $\int_۱^{۱/۳} \sqrt{x}dx$ را به روش سیمپسون و به ازای $h = ۰/۱۵$ و $h = ۰/۰۵$ به دست آورید.

داریم $f(x) = \sqrt{x}$، لذا

$$S(۰/۱۵) = \frac{۰/۱۵}{۳}[۱ + ۴(۱/۰۷۲۳۸) + ۱/۱۴۰۱۸] = ۰/۳۲۱۴۸۵$$

$$S(۰/۰۵) = \frac{۰/۰۵}{۳}[۱ + ۴(۱/۰۲۴۷۰) + ۲(۱/۰۴۸۸۱) + ۴(۱/۰۷۲۳۸) +$$
$$۲(۱/۰۹۵۴۵) + ۴(۱/۱۱۸۰۳) + ۱/۱۴۰۱۸] = ۰/۳۲۱۴۹$$

۳.۳.۴ قاعده‌های دیگر انتگرالگیری

در فرمول قاعده‌ذوزنقه‌ای داریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}f_i + \frac{h}{2}f_{i+1} = \sum_{k=i}^{i+1} A_k f_k$$

که در آن $A_i = A_{i+1} = \frac{h}{2}$.

همچنین از قاعده سیمپسون نتیجه می‌شود که :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}f_i + \frac{4h}{3}f_{i+1} + \frac{h}{3}f_{i+2} = \sum_{k=i}^{i+2} A_k f_k$$

لذا در حالت کلی قواعدی که داریم به صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \sum_{k=0}^{n} A_k f_k + E \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

در رابطه (۳۰) آنچه می‌تواند مجهول باشد نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ و ضرائب $A_0, A_1, \cdots, A_n$ است، که ذیلاً دو روش را برای محاسبه آنها ارائه می‌کنیم. در رابطه (۳۰)، E مقدار خطای $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ است.

روش نیوتن-کاتس

در این روش نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ معلوم فرض می‌شوند، مثلاً متساوی‌الفاصله و به صورت زیر:

$$x_{i+1} = x_i + h, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

بنابراین در رابطه (۳۰) مجهولات عبارتند از $n+1$ ضریب $A_0, A_1, \cdots, A_n$.

برای به دست آوردن این ضرائب فرض می‌کنیم در رابطه (۳۰) برای توابع زیر مقدار خطا صفر است:

$$f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^n$$

...ب مجهول A_k را طوری پیدا می‌کنیم که خطای عبارت $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب $\int_{x_0}^{x_3}$ برای چند جمله‌ایهای تا درجه n صفر باشد.هرگاه برای راحتی قرار دهیم $x_0 = 0$ ...صورت فرمول قاعده چهار نقطه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} A_k f_k + E$$

$x_k = kh$، یعنی

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h$$

...به دست آوردن ضرائب A_0 تا A_3 برای محاسبه انتگرال (۳۱) مقدار E را برای توابع $f(x) = 1, x, \ldots$ برابر صفر قرار می‌دهیم.

$f(x) = 1$ در این صورت

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \int_0^{3h} dx = 3h$$

...برای $E = 0$ مقدار سمت راست رابطه (۳۱) عبارت است از :

$$\sum_{k=0}^{3} A_k f_k = \sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{3} A_k = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

...براین برای $f(x) = 1$ معادله زیر نتیجه می‌شود :

$$3h = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \qquad (۳۲)$$

...به طور مشابه برای $f(x) = x$ معادله زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{9h^2}{2} = hA_1 + 2hA_2 + 3hA_3 \qquad (۳۳)$$

زیرا

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \int_0^{3h} x\,dx = \frac{1}{2}(9h^2)$$

و

$$\sum_{k=0}^{3} A_k f_k = \sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{3} A_k x_k = 0 + A_1 h + 2hA_2 + 3hA_3$$

به طور مشابه برای توابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$f(x) = x^2 \Longrightarrow \int_0^{3h} x^2 dx = 9h^3 = h^2 A_1 + 4h^2 A_2 + 9h^2 A_3 \qquad (34)$$

$$f(x) = x^3 \Longrightarrow \int_0^{3h} x^3 dx = \frac{81h^4}{4} = h^3 A_1 + 8h^3 A_2 + 27h^3 A_3 \qquad (35)$$

پس از ساده کردن معادلات (۳۲) تا (۳۵) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 3h \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = \frac{9h}{2} \\ A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 9h \\ A_1 + 8A_2 + 27A_3 = \frac{81h}{4} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه خواهیم داشت :

$$A_0 = \frac{3h}{8}, \qquad A_1 = \frac{9h}{8}, \qquad A_2 = \frac{9h}{8}, \qquad A_3 = \frac{3h}{8}$$

بنابراین فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن-کاتس را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\int_0^{3h} f(x)dx \simeq \frac{3h}{8}(f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h))$$

و با تغییر متغیر $X = x_0 + x$ فرمول قاعده چهار نقطه‌ای به صورت زیر خواهد بود :

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(X)dX \simeq \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad (36)}$$

روش فوق‌الذکر به روش **ضرائب مجهول** نیز معروف است.

مثال ۱۰. با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن-کاتس مقدار انتگرال $\int_0^1 xe^x dx$ را به دست

فرمول چهار نقطه‌ای است پس $n = 3$ و از آن $h = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$ لذا

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1$$

$$\int_0^1 xe^x dx \simeq \frac{1}{8}[f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{2}{3}) + f(1)]$$
$$= \frac{1}{8}[0 + e^{\frac{1}{3}} + 2e^{\frac{2}{3}} + e^1] = 1{,}00117$$

گاوس

ش گاوس نقاط و ضرائب در رابطه (۳۰) مجهول فرض می‌شوند، پس در فرمول

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E$$

$(n+1)$ نقطه $x_0, x_1, \cdots, x_n$ و $(n+1)$ ضریب $A_0, A_1, \cdots, A_n$ مجهول هستند.به منظور دست آوردن این $2n + 2$ مجهول برای توابع $f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^{2n+1}$ قرار می‌دهیم $E =$.

بنابراین با این عمل $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ برای انتگرال‌گیری چند جمله‌ایهای تا درجه $2n + 1$ دقیق می‌باشد.

نکته: برای آشنایی با روش‌های گاوس در حالت کلی از قبیل گاوس-لژاندر، گاوس-چبیشف و ... به یکی از کتب آنالیز عددی پیشرفته مراجعه کنید، در این بخش صرفاً بعضی از فرمولهای گاوس-لژاندر معرفی می‌شوند.

توجه: تفاوت اساسی روش گاوس با روشهای قبلی این است که در روشهای قبل تمام فرمولهای بیان شده برای نقاط متساوی‌الفاصله x_k می‌باشند.در حالی که در روش گاوس چنین نیست.همچنین

فرمولهای قاعده گاوس برای فاصله $[-1,1]$ به دست می‌آیند.واضح است که فاصله‌های $[a,b]$ و $[-1,1]$ را به سادگی می‌توان باتغییر متغیر زیر به هم تبدیل نمود.فرض کنید $x \in [a,b]$ و $u \in [-1,1]$ در این صورت هرگاه قرار دهیم :

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)]$$

خواهیم داشت :

$$dx = \frac{b-a}{2} du$$

لذا

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g(u)du$$

که در آن

$$g(u) = f(\frac{1}{2}((b-a)u + (b+a)))$$

فرمول دونقطه‌ای گاوس

هرگاه فرمول دونقطه‌ای گاوس را برای $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ بخواهیم به دست آوریم بایستی داشته باشیم :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{1} A_k f(x_k) + E \qquad (37)$$

که در آن برای توابع $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ داریم $E = 0$.

با قرار دادن توابع فوق در رابطه (۳۷) و با $E = 0$ به دستگاهی با چهار معادله و چهار مجهول می‌رسیم که از آن خواهیم داشت :

$$A_0 = A_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

...دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \qquad (38)}$$

...مپیوتری روش گاوس دو نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$.

... مقدار انتگرال $\int_0^1 F(x)dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش گاوس دو نقطه‌ای ... می‌کند.با تبدیل فاصله $[0,1]$ به فاصلهٔ $[-1,1]$ بایستی $\int_{-1}^{1} g(u)du$ محاسبه شود، لذا ...در اختیار برنامه قرار داده می‌شود.برای توابع مختلف F می‌توان توابع تبدیل شده g را به ...ورد و در اختیار برنامه قرار داد تا انتگرال مورد نظر محاسبه شود.خروجی برنامه مقدار انتگرال ...ه شده است.

```
c
c     Gaussian Rule (2-point method)
c
c     for function F(x)= EXP(-x**2)
c
      dimension p(2)
      g(x) = exp(-(x+1) ** 2 / 4.) / 2.
      p(1) =-0.577350269
      p(2) = -p(1)
      s = 0.
      do 10 i = 1,2
         s = s + g(p(i))
10    continue
      write(*,*) "INTEGRAL = " , s
      end
```

مثال ۱۱. برای محاسبه $\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt$ دستور دو نقطه‌ای گاوس را بکار ببرید.

حل: با تغییر متغیر

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi(x+1)}{4}$$

نتیجه می‌شود :

$$\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin\frac{\pi(x+1)}{4}\,dx$$

$$f(x) = \sin\frac{\pi(x+1)}{4} \Longrightarrow f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.32589$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.94541$$

لذا بنا بر رابطه (۳۸) خواهیم داشت :

$$\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt \simeq \frac{\pi}{4}[0.32589 + 0.94541] = 0.99848$$

نکته: توجه کنید که در مثال قبل ابتدا فاصلهٔ $[0, \pi/2]$ به فاصلهٔ $[-1, 1]$ تغییر داده شده و سپس از فرمول مربوطه استفاده شده است.

مثال ۱۲ : با استفاده از روش گاوس دو نقطه‌ای مقدار تقریبی انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

حل . با قرار دادن $x = \frac{u+3}{2}$ خواهیم داشت $dx = \frac{1}{2}du$، لذا

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\frac{u+3}{2})}{(\frac{u+3}{2})}\,du = \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\frac{u+3}{2})}{u+3}\,du \simeq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

لذا $f(x) = \frac{\sin^2(\frac{x+3}{2})}{x+3}$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.361691231 \quad , \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.2664...$$

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \simeq 0.628166467$$

... نقطه‌ای گاوس

...شابه فرمول دو نقطه‌ای، دستور انتگرالگیری ۳ نقطه‌ای گاوس به صورت زیر به دست

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] \qquad (39)}$$

...وجه: نقاط و ضرائب دستورهای مختلف انتگرالگیری گاوس در جداولی موجود هستند که ...ان از آنها استفاده نمود.

...برنامه کامپیوتری روش گاوس سه نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)\,dx$.

...برنامه مقدار انتگرال $\int_0^1 F(x)\,dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش گاوس دو نقطه‌ای ...حاسبه می‌کند. با تبدیل فاصله $[0,1]$ به فاصلهٔ $[-1,1]$ بایستی $\int_{-1}^{1} g(u)\,du$ محاسبه شود، لذا ... g در اختیار برنامه قرار داده می‌شود. برای توابع مختلف F می‌توان توابع تبدیل شده g را به ...ست آورد و در اختیار برنامه قرار داد تا انتگرال مورد نظر محاسبه شود. خروجی برنامه مقدار انتگرال ...حاسبه شده است.

```
      Gaussian Rule (3-point method)

      for function F(x)= EXP(-x**2)

      dimension p(3),w(3)
      g(x) = exp(-(x+1) ** 2 / 4.) / 2.
      p(1) =-0.77459667
      p(2) = 0.
      p(3) = -p(1)
      w(1) = 5. / 9.
      w(2) = 8. / 9.
      w(3) = w(1)
      s = 0.
      do 10 i = 1,3
         s = s + w(i) * g(p(i))
10    continue
      write(*,*) "INTEGRAL = " , s
      end
```

مثال ۱۳ : جواب مثال ۱۲ را به کمک دستور سه نقطه‌ای گاوس به دست آورید.

حل: با داده‌های مثال ۱۲ داریم :

$$f(۰) = ۰٫۳۳۱۶۶۵۴۱۶$$

$$f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = ۰٫۳۶۱۴۷۳۲۴۶ \quad , \quad f(\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = ۰٫۲۳۹۲۶۴۵۱۲$$

لذا با توجه به فرمول (۳۹) خواهیم داشت :

$$\int_۱^۲ \frac{\sin^۲ x}{x}dx \simeq \frac{۱}{۹}[۵٫۶۵۷۰۱۲۱۱۸] = ۰٫۶۲۸۵۵۶۹۰۲$$

انتگرالهای منفرد

های قبل محاسبه انتگرالهایی به صورت $\int_a^b f(x)dx$ مورد بحث قرار گرفت که در آن تمام فاصله $[a,b]$ معین و تعریف شده بود.در این قسمت انتگرالهایی را به صورت زیر گیریم :

$$\int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{x}}dx$$

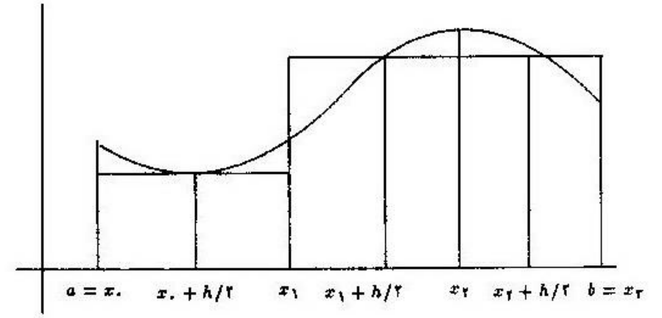
$$\int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$$

$$\int_{-۱}^۱ \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$$

ن توابعی که می‌خواهیم انتگرال آنها را محاسبه کنیم در یک یا هر دو نقطه انتهایی فاصله وری تعریف نشده‌اند.در انتگرال الف تابع $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x = ۰$ تعریف نشده این نقطه را نقطه منفرد یا تکین تابع می‌نامیم.همچنین نقطه $x = ۱$ یک نقطه تکین تابع $\frac{}{\sqrt{۱}}$ در انتگرال قسمت ب می‌باشد.هر چند انتگرالهای فوق را می‌توان به روشهای تحلیلی ست آورد اما هر گاه بخواهیم از روشهای عددی برای چنین انتگرالهایی استفاده کنیم، چون هایی مانند روش ذوزنقه و سیمپسون از مقادیر تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی فاصله انتگرالگیری اده می‌کنند، بنابراین محاسبه انتگرالهای فوق به این روشها میسر نیست، در اینجا تنها یک روش برای محاسبه چنین انتگرالهایی توضیح می‌دهیم.

۱.۴. قاعده نقطه میانی

برای توضیح این روش، فرض کنید فاصله $[a,b]$ را به صورت زیر به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشیم، برای محاسبه مساحت زیر نمودار تابع f در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ مساحت مستطیل به عرض h و طول $f(x_i + \frac{h}{۲})$ را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین در این روش قرار می‌دهیم :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq hf(x_i+\frac{h}{2}) \qquad (40)}$$

لذا برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ با استفاده از قاعده نقطه میانی، به روش زیر عمل می‌کنیم :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

و با استفاده از فرمول (۴۰) هرگاه $M(h)$ تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش نقطه میانی باشد که هر زیر فاصله دارای طول h است، خواهیم داشت :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq M(h) = h[f(x_0+\frac{h}{2}) + \cdots + f(x_i+\frac{h}{2}) + \cdots + f(x_{n-1}+\frac{h}{2})]$$

مثال ۱۴. تقریبی از $\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $h=0.03$ و $h=0.01$ به روش نقطه میانی به دست آورید.

حل:

۰+۰/۰۱۵ ۰/۰۳+۰/۰۱۵ ۰/۰۶+۰/۰۱۵

$$\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.03) = 0.03(f(0.015)+f(0.045)+f(0.075))$$

$$= 0.03(8.1650 + 4.7140 + 3.6515)$$

$$= 0.4959$$

x_n

$x_n = 0.09$

$$\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.01) = 0.01[\frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.015}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{0.085}}] = 0.539587$$

واقعی انتگرال عبارتست از $\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 0.6$ ، زیرا

$$\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^{0.09} = 0.6$$

$M(0.03)$ با مقدار واقعی حدود ۰/۱۰۴ و خطای $M(0.01)$ با مقدار واقعی حدود
باشد. بنابراین توصیه می‌شود در چنین انتگرالهایی برای قسمتی که نزدیک نقطه تکین
h را بسیار کوچک اختیار کنید و برای بقیهٔ فاصله h را یک مقدار بزرگ‌تر در نظر بگیرید.

انتگرال $\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{0.01}\frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{0.01}^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$\int_0^{0.01}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $M(0.002)$ و انتگرال $\int_{0.01}^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $M(0.02)$ تقریب بزنید.

$$\int_0^{0.01}\frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.002) = 0.002[\frac{1}{\sqrt{0.001}} + \frac{1}{\sqrt{0.003}} + \frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.007}} + \frac{1}{\sqrt{0.009}}] = 0.173031$$

چنین

$$\int_{0.01}^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.02) = 0.02[\frac{1}{\sqrt{0.02}} + \frac{1}{\sqrt{0.04}} + \frac{1}{\sqrt{0.06}} + \frac{1}{\sqrt{0.08}}] = 0.393782$$

لذا

$$\int_{۰}^{۰٫۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰٫۱۷۳۰۳۱ + ۰٫۳۹۳۷۸۲ = ۰٫۵۶۶۸۱۳$$

مثال ۱۶. خطای مقدار به دست آمده برای انتگرال $\int_{۰}^{۰٫۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ در مثال ۱۵ با مقدار واقعی یعنی ۰٫۶ چقدر است.

حل:

$$\text{خطا} = \text{مقدار واقعی} - \text{مقدار تقریبی}$$

$$= ۰٫۶ - ۰٫۵۶۶۸۱۳ = ۰٫۰۳۳۱۸۷$$

توجه: مقدار خطای به دست آمده در مثال ۱۶ کمتر از خطای مقادیر به دست آمده برای انتگرال د. مثال ۱۴ می‌باشد.برای کم کردن خطا h را بایستی کوچکتر گرفت.البته برای hهای کوچکتر محاسبه با دست بسیار طولانی خواهد بود، لذا بایستی از برنامه‌های کامپیوتری استفاده نمود.

تذکر. توجه کنید که روش‌های گاوس از جمله روشهایی هستند که به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله نیاز ندارند، لذا در انتگرالهای منفرد می‌توان از آن فرمولها جهت تعیین مقدار تقریبی انتگرال استفاده نمود.

تعریف ۱.۴. قواعد انتگرالگیری عددی را که نیاز به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله ندارند، **فرمولهای باز** می‌نامیم. همچنین قواعد انتگرالگیری عددی را که نیاز به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله دارند، فرمولهای **بسته** می‌نامیم.

۵.۴ خطای روشهای انتگرالگیری

قبل از بیان خطای روشهای انتگرالگیری بیان شده در این فصل، دو قضیه زیر را که در محاسبه خطاها مورداستفاده قرار می‌گیرند، در نظر بگیرید.

...گاه تابع H بر فاصله $[c,d]$ پیوسته و تابع g در این فاصله انتگرالپذیر بوده و تغییر
...نفی همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد) در این صورت

$$\int_c^d g(x)H(x)dx = H(\gamma)\int_c^d g(x)dx$$

$\gamma \in$ ...

... هرگاه تابع H بر فاصله $[c,d]$ پیوسته باشد و

$$\min_{c\le x\le d} H(x) \le \alpha \le \max_{c\le x\le d} H(x)$$

... β وجود دارد به طوری که

$$H(\beta) = \alpha$$

...ت آوردن خطای روشهای انتگرالگیری از چند جمله‌ای درونیاب استفاده می‌کنیم، روند
...ا را برای روش ذوزنقه به طور کامل شرح داده و خطای سایر روشها را بیان می‌نماییم.

... خطای روش ذوزنقه

...ده ذوزنقه‌ای را برای محاسبه $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ به وسیله چند جمله‌ای درونیاب f که در
... و x_{i+1} با f هم مقدار است، به دست می‌آوریم.در فصل سوم خطای این چند جمله‌ای
...ت زیر بیان شد :

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{۲!} f''(\eta_x), \qquad \eta_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

...ر آن $P(x) = f_i + s\Delta f_i$.هرگاه از طرفین رابطه اخیر انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{۲!} f''(\eta_x)dx \quad (۴$$

هرگاه فرض کنیم $f''(x)$ تابعی پیوسته است، چون برای x در $[x_i, x_{i+1}]$ داریم

$$x - x_i \geq 0$$

$$x - x_{i+1} \leq 0$$

لذا هرگاه قرار دهیم $g(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$ ، همواره خواهیم داشت :

$$g(x) \leq 0$$

یعنی $g(x)$ بر فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ تغییر علامت نمی‌دهد و چون تابع $H(x) = f''(\eta_x)$ نیز پیو
فرض شده است، بنا بر قضیه ۱.۴ رابطه (۴۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) = \frac{f''(\eta_i)}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx \quad (۴۲)$$

که در آن $x_i \leq \eta_i \leq x_{i+1}$.هرگاه در انتگرال سمت راست عبارت فوق تغییر متغیر $x = x_i + sh$
را انجام دهیم، خواهیم داشت :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx = -\frac{h^3}{6}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۴۲) خواهیم داشت :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_i) \qquad (۴۳)$$

در نتیجه برای محاسبه خطای $T(h)$ یعنی محاسبه $ET(h)$، چون

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

ت :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - T(h) = [\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1)] + [\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + [\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(- \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})] + \cdots + [\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}($$

ه (۴۳) مقدار خطا عبارت است از :

$$ET(h) = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_0) - \frac{h^3}{12}f''(\eta_1) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''$$

$$= -\frac{h^3}{12}[f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})]$$

ار دهیم :

$$m = min\{f''(x): \ a \leq x \leq b\}$$

$$M = max\{f''(x): \ a \leq x \leq b\}$$

صورت بنا به خاصیت ماکسیمم و مینیمم تابع $f''(x)$ داریم :

$$m \leq f''(\eta_i) \leq M \qquad , \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

n نامساوی در رابطه (۴۵) را با هم جمع کنیم،خواهیم داشت :

$$nm \leq f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1}) \leq nM$$

ران

$$m \leq \frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})}{n} \leq M$$

هرگاه قرار دهیم $\alpha = \frac{f''(\eta_0)+f''(\eta_1)+\cdots+f''(\eta_{n-1})}{n}$ بنابراین چون

$$m \le \alpha \le M$$

بنا بر قضیه ۲.۴ یک $\beta \in [a,b]$ هست که

$$f''(\beta) = \alpha$$

یعنی

$$f''(\beta) = \frac{f''(\eta_0)+\cdots+f''(\eta_{n-1})}{n}$$

و از آن

$$f''(\eta_0)+f''(\eta_1)+\cdots+f''(\eta_{n-1}) = nf''(\beta)$$

بنابراین رابطه (۴۴) به صورت زیر خواهد بود :

$$ET(h) = -\frac{nh^3}{12}f''(\beta)$$

و چون $nh = b-a$ لذا خطای انتگرال‌گیری روش ذوزنقه به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{ET(h) = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\beta) \qquad (46)}$$

نتیجه ۱. بنا بر رابطه (۴۶) خطای قاعده ذوزنقه‌ای متناسب با h^2 است، بنابراین هرگاه h نصف شود مقدار خطا $\frac{1}{4}$ خواهد شد.

نتیجه ۲. بنا بر رابطه (۴۶) قاعده ذوزنقه‌ای برای چند جمله‌ای‌های تا درجه یک دقیق است زیرا مشتق مرتبه دوم در این توابع صفر است.

توجه: هرگاه M_2 یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد، یعنی

$$|f''(x)| \le M_2 \qquad , \qquad x \in [a,b]$$

... :

$$\boxed{|ET(h)| \le \frac{(b-a)}{12}h^2 M_2 \qquad (47)}$$

...ساوی (۴۷) برای برآورد h، به طوری که خطای $T(h)$ از مقدار معینی بیشتر نباشد به ...

مثلاً هرگاه بخواهیم $|ET(h)| \le \epsilon$ کافی است h را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم :

$$\frac{(b-a)}{12}h^2 M_2 \le \epsilon$$

...قریبی از $\int_0^1 x\sin x\,dx$ به دست آورید به طوری که خطای آن حداکثر 10^{-2} باشد.

...رسم $a=0$، $b=1$ و $\epsilon = 10^{-2}$، برای به دست آوردن M_2 چون

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

$$|f''(x)| = |2\cos x - x\sin x| \le 2|\cos x| + |x||\sin x| \le 2+1 = \ldots$$

$= M_2$، بنابراین بایستی h را طوری به دست آوریم که داشته باشیم :

$$\frac{(1-0)}{12}h^2(3) \le 10^{-2}$$

$$\frac{h^2}{4} \le 10^{-2} \Longrightarrow h \le 0.2$$

...این قرار می‌دهیم $h = 0.2$ و $T(0.2)$ را حساب کنیم.

$$T(0.2) = \frac{0.2}{2}(0 + 2(0.2\sin 0.2 + 0.4\sin 0.4 + 0.6\sin 0.6 + 0.8\sin 0.8) + \sin 1) = 0.30578$$

۲.۵.۴ خطای سایر روشهای انتگرالگیری

الف.خطای روش سیمپسون .

هرگاه $ES(h)$ خطای روش انتگرالگیری سیمپسون با طول زیر فاصله h باشد با روشی مشابه روش به کار رفته در محاسبه $ET(h)$ می‌توان نشان داد که داریم :

$$\boxed{ES(h) \simeq -\frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴} f^{(۴)}(\eta) \qquad (۴۸)}$$

که در آن $\eta \in [a,b]$.

نتیجه ۱. رابطه (۴۸) نشان می‌دهد که خطای $S(h)$ متناسب با $h^{۴}$ بوده و روش سیمپسون بر چند جمله‌ایهای تا درجه ۳ دقیق است.

نتیجه ۲. چون η مقداری نامعلوم است، لذا هرگاه داشته باشیم

$$|f^{(۴)}(x)| \le M_{۴} \qquad , \qquad x \in [a,b]$$

بنابراین کران بالای خطای زیر را برای $S(h)$ خواهیم داشت

$$\boxed{|ES(h)| \le \frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴} M_{۴} \qquad (۴۹)}$$

با استفاده از رابطه (۴۹) می‌توان $S(h)$ را با دقتی که از قبل تعیین می‌شود حساب کرد. مثلاً هرگاه بخواهیم $S(h)$ را چنان به دست آوریم که

$$|ES(h)| \le \epsilon$$

کافی است h را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴} M_{۴} \le \epsilon$$

h را طوری به دست آورید که $S(h)$ مقدار $\int_{۰}^{\pi/۲} x\cos x\,dx$ را با حداکثر خطای

گند.

$a=۰$، $b=\frac{\pi}{۲}$، $\epsilon=۱۰^{-۵}$ و $f(x)=x\cos x$ ، لذا برای تعیین $M_{۴}$ چون

$$f^{(۴)}(x) = ۴\sin x + x\cos x$$

$x > ۰$ خواهیم داشت :

$$|f^{(۴)}(x)| = |۴\sin x + x\cos x| \le ۴|\sin x| + |x||\cos x| \le ۴ + \frac{\pi}{۲} <$$

ر می‌دهیم $M_{۴} = ۶$ و از آن :

$$\frac{b-a}{۱۸۰}h^{۴}M_{۴} = \frac{\frac{\pi}{۲}-۰}{۱۸۰}h^{۴}\times ۶ = \frac{\pi h^{۴}}{۶۰} \le ۱۰^{-۵}$$

ن بایستی

$$h \le ۰/۱ \times \sqrt[۴]{\frac{۶}{\pi}} \simeq ۰/۱۱۷۶$$

چون داریم $nh = b-a = \frac{\pi}{۲}$ پس $n = \frac{\pi}{۲h}$ و از آن

$$n = \frac{\pi}{۲h} \ge \frac{\pi}{۲\times ۰/۱۱۷۶} = ۱۳/۳۵۷۱$$

ون در روش سیمپسون بایستی n زوج باشد، لذا قرار می‌دهیم $n = ۱۴$ و از آن

$$h = \frac{\pi/۲}{n} = \frac{\pi}{۲۸} \simeq ۰/۱۱۲۲$$

که از ۰/۱۱۷۶ کمتر است.

ب.خطای قاعده نقطه میانی.

خطای قاعده نقطه میانی را با $EM(h)$ نشان می‌دهیم که برابر است با :

$$\boxed{EM(h) \simeq \frac{(b-a)}{۲۴}h^{۲} f''(\eta) \qquad (۵۰)}$$

که $\eta \in [a,b]$. هرگاه $|f''(x)| \le M_2$ برای $x \in [a,b]$ در این صورت

$$\boxed{|EM(h)| \le \frac{(b-a)}{24} h^2 M_2 \qquad (51)}$$

نتیجه. رابطهٔ (۵۱) نشان می‌دهد که خطای $M(h)$ متناسب با h^2 بوده و روش نقطه میانی
چند جمله‌ایهای تا درجهٔ یک دقیق است.

مجموعه مسائل فصل چهارم

۱- تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. فاصله $[1, 1.30]$ را به صورت $1.0(0.05)1.30$
جدول بندی کنید و مقادیر خواسته شده زیر را به دست آورید.

الف. با استفاده از رابطه (۸) مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

ب. با استفاده از رابطه (۹) مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

پ. با استفاده از رابطه (۱۰) یک تقریب برای $f''(1)$ به دست آورید.

جواب. الف. ۰٫۴۹۴ ب. ۰٫۴۹۹۹ پ. ۰٫۲۳۶-.

۲- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه (۸) مقادیری برای $f'_i,\ i = 1, 2, \ldots, 5$ به دست آور

۳- مساله ۲ را با استفاده از رابطه (۹) حل کنید.

۴- برای تابع مسألهٔ ۱ با استفاده از رابطه (۱۰) مقادیری برای $f''_i,\ i = 1, 2, \ldots, 5$ به دس
آورید.

۵- برای تابع مسألهٔ ۱ با استفاده از رابطه (۱۲) تقریبی برای $f'(1.125)$ به دست آورید.

جواب. ۰٫۴۷۱۴.

۶- انتگرال $\int_1^{1.3} \sqrt{x}\,dx$ را در نظر بگیرید. مقادیر خواسته شده را با $(5D)$ به دست آورید.

الف. $T(0.3)$ ب. $T(0.15)$ پ. $T(0.1)$ ت. $T(0.05)$

جواب. الف. ۰٫۳۲۱۰۲ ب. ۰٫۳۲۱۳۷ پ. ۰٫۳۲۱۴۳ ت. ۰٫۳۲۱۴۷

۷- با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را با $h = 1$ ، $h = 0.5$ و $h = 0.25$
$(4D)$ به دست آورید.

$T(0.25) = 0.6970, \quad T(0.5) = 0.7083, \quad T(1) = 0.75$

$\int_0^1 x^2 dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ حساب کنید.

$$T(\tfrac{1}{4}) = \frac{11}{32}, \quad T(\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{8}, \quad T(1) =$$

ی از $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ را با $T(\frac{\pi}{8})$ به دست آورید.

۰٫۹۸۷۱

بهایی از $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ را با $T(1)$ و $T(\frac{1}{2})$ به دست آورید.

$$T(\tfrac{1}{2}) = \frac{67}{60} \quad ,T(1) = \frac{7}{6}$$

مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را با $S(0.1)$ به دست آورید.

۰٫۶۹۳۱

مقدار انتگرال $\int_0^1 x^3 dx$ را با $S(0.5)$ به دست آورید.

۰٫۲۵

مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ را با $S(0.25)$ به دست آورید. (قرار دهید $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

۰٫۹۴۶۱

مقدار $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ را به روش سیمپسون و $h = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{64}$ به دست آورید.

ب. $S(\frac{\pi}{8}) = 1.0001344$

$S(\frac{\pi}{64}) = 1.00000003, \quad S(\frac{\pi}{32}) = 0.999999983, \quad S(\frac{\pi}{16}) = 1.000008$

- تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید. مقدار $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ را به روش ذوزنقه و روش سیمپسون
دست آورید.

x_i	0	$\pi/12$	$2\pi/12$	$3\pi/12$	$4\pi/12$	$5\pi/12$	$\pi/2$
f_i	0	0.25882	0.5	0.70711	0.86603	0.96593	1

جواب. $T(\frac{\pi}{12}) = 0.99429$ ، $S(\frac{\pi}{12}) = 1.00003$

۱۶- با استفاده از فرمول نیوتن-کاتس چهار نقطه‌ای $(n = 3)$ مقدار $\int_1^3 e^{-x/2} dx$ را تقریب کنید

جواب. ۰٫۷۶۶۹۲

۱۷- با استفاده از فرمول نیوتن-کاتس چهار نقطه‌ای ($n = ۳$) تقریبی از انتگرالهای زیر به دس
آورید.

الف. $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ + x}\,dx$ ب. $\int_{۱٫۱}^{۱٫۵} e^x\,dx$

جواب. الف. ۰٫۱۰۲۴۵۹۸۲۱ ب. ۱٫۴۷۷۵۲۸۸۵۸

۱۸- مقدار $\int_{۱}^{۱٫۵} e^{-x^۲}dx$ را به روش نیوتن-کاتس و با $h = \frac{۱}{۶}$ به دست آورید.

جواب. ۰٫۱۰۹۳۴۰۴

۱۹- مقدار انتگرال مساله ۱۸ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

جواب. ۰٫۱۰۹۴۰۰۳

۲۰- مقدار انتگرال مساله ۱۸ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

جواب. ۰٫۱۰۹۳۶۴۲

۲۱- مقدار $\int_{۱}^{۳} e^x \sin x\,dx$ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

جواب. ۱۰٫۹۵۰۱۴۰

۲۲- مقدار انتگرال مساله ۲۱ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

جواب. ۱۰٫۹۴۸۴۰۳

۲۳- تقریبهایی را از انتگرالهای زیر به قاعده نقطه میانی و به ازای hهای داده شده، به دست آورید

الف. $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + x}$, $h = ۰٫۱$

ب. $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + x^۲}$, $h = ۰٫۲$

پ. $\int_{۰}^{۱} \frac{\sin x}{x}dx$, $h = ۰٫۲$

۲۴- تقریبی از $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}}$ حساب کنید. برای این منظور قرار دهید:

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \int_{۰}^{۰٫۹} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} + \int_{۰٫۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

قاعده نقطه میانی و $h = ۰٫۰۱$ مقدار $\int_{۰٫۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}}$ و $h = ۰٫۱$ مقدار

$\int_{۰}^{۱}$ را حساب کنید.

از $\int_{۰}^{۲} x \sin ۲x\,dx$ را به قاعده ذوزنقه‌ای چنان حساب کنید که خطای آن کمتر از

h و $T(۰٫۵) = ۰٫۳۹۲$

از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از ۰٫۰۰۰۱ و به قاعده ذوزنقه‌ای حساب کنید.

$\int_{۰}^{\pi/۲} \cos$ ب. $\int_{۰}^{\pi/۲} x\cos x\,dx$ پ. $\int_{۰}^{۱} e^x dx$

$h \simeq ۰٫۰۳۴, n = ۲۹$. ب. $n = ۱۱۴$, $h \simeq ۰٫۰۱۳۷۸$

$h = ۰٫۰۲, n$

ود h را برای محاسبه تقریبی $\int_{۰}^{۱} e^x \sin x\,dx$ چنان تعیین کنید که:

باشیم $|ET(h)| \le ۱۰^{-۵}$

باشیم $|ES(h)| \le ۱۰^{-۵}$

الف. $h = ۰٫۰۰۴۵, n = ۲۲۴$ ب. $h = ۰٫۰۷۴۰۰۸, n = ۱۲$

۲- روش انتگرالگیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{۰}^{h} f(\sqrt{x})dx \simeq w_۱ f(۰) + w_۲ f'(۰) + w_۳ f(h)$$

$w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ را طوری به‌دست آورید که روش انتگراگیری فوق برای چند جمله‌ایهای تا

دو دقیق باشد.

جواب. $w_۳ = \frac{۱}{۲}$ و $w_۲ = \frac{۴}{۳}h\sqrt{h} - \frac{h}{۲}$ و $w_۱ = h - \frac{۱}{۲}$

۲۹. فرض کنید در تقریب زیر، معیار دقت آن باشد که رابطه برای چند جمله‌ایهای تا درجه

دقیق باشد:

$$\int_{۰}^{۴} f(x)dx \simeq \sum_{i=۰}^{۳} w_i f(x_i)$$

که در آن $x_0 = 0$، $x_1 = 2$، $x_2 = 5$ و $x_3 = 6$. مطلوبست محاسبه w_i برای $i = 0, 1, 2, 3$

جواب. $w_0 = \frac{2}{5}$، $w_1 = 3$، $w_2 = \frac{12}{5}$، $w_3 = 0$

۳۰. برای محاسبهٔ تقریبی از انتگرال تابع f در فاصلهٔ $[0, 6h]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x)dx \simeq w_1 f(h) + w_2 f(3h) + w_3 f(5h)$$

الف. ضرایب w_1، w_2 و w_3 را چنان تعیین کنید که رابطهٔ فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ دو دقیق باشد.

ب. نشان دهید قاعده فوق برای چند جمله‌ایهای درجهٔ ۳ نیز دقیق است.

جواب. الف. $w_1 = w_3 = \frac{9}{4}h$ و $w_2 = \frac{3}{2}h$

۳۱. قسمتهای الف و ب مساله قبل را در مورد روند انتگرال‌گیری زیر انجام دهید.

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \simeq h[w_1 f(-h) + w_2 f(0) + w_3 f(h)]$$

جواب. $w_1 = w_3 = \frac{1}{3}$، $w_2 = \frac{4}{3}$