کتاب محاسبات عددی

تالیف: دکتر مسعود نیکوکار-دکتر محمد تقی درویشی

باشگاه مهندسان سمنان

فصل سوم: درونیابی و برون یابی

www.sem-eng.com

فصل سوم

درونیابی و برونیابی

۱.۳ مقدمه

در غلب کشورها هر ده سال یکبار جمعیت سرشماری می‌شود. فرض کنید جدول زیر جمعیت کشوری را در سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۹۰ میلادی (به هزار نفر) نشان می‌دهد:

سال	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰
(جمعیت به هزار نفر)	۱۰۷،۹۲۳	۱۲۶،۴۰۷	۱۳۳،۱۱۷	۱۵۰،۹۰۵	۱۷۱،۱۱۰	۱۹۲،۳[illegible]

جدول (۱)

سوال این است که آیا می‌توان با توجه به داده‌های جدول فوق، جمعیت کشور را در سال ۱۹۷۵ و در سال ۲۰۰۰ میلادی در حد قابل قبول تخمین زد.

تخمین جمعیت کشور را در سال ۱۹۷۵ که بین اعداد جدول است درونیابی و تخمین جمعیت در سال ۲۰۰۰ که در فاصله [۱۹۹۰ , ۱۹۴۰] قرار ندارد، برونیابی می‌نامیم.

هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ به صورت $f_0, f_1, \cdots, f_n$ معلوم باشد، درونیابی روندی برای تخمین مقادیر تابع $f(x)$ بین نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ است.

فرض کنید تابع $f(x)$ با جدول زیر داده شده است :

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_i) = f_i$	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

جدول (۲)

درونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \in (x_0, x_n)$ و $i = 1, \cdots, n-1$ ، $x \neq x_i$.

و برونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0, x_n]$.

تعریف ۱.۳. تابعی مانند f که مقادیر آن دربعضی نقاط مشخص است و توسط جدولی مانند جدول (۲) بیان شده است، یک **تابع جدولی** نامیده می‌شود.

۲.۳ درونیابی

فرض کنید تابع f با جدول (۲) داده شده است، به طوری که برای $i \neq j$ داریم : $x_i \neq x_j$. برای تخمین $f(x)$ که برای $x \in (x_0, x_n)$ [redacted]، $x \neq x_i$، یکی از راههای ساده این است که یک چند جمله‌ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در x_i همان f_i باشد.یعنی برای $i = 0, 1, \cdots, n$ داشته باشیم :

$$P(x_i) = f_i \qquad (۱)$$

و بعد به جای $f(x)$ در فاصله $[x_0, x_n]$ با $P(x)$ کار کنیم.دراین ارتباط قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

[redacted]. فقط یک چند جمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه n، وجود دارد که در شرط (۱) صدق می‌کند.

در قسمت‌های بعد به معرفی چند روش برای تعیین $P(x)$، که در شرط (۱) صدق می‌کند، خواهیم

لت.

[redacted]. چند جمله‌ای $P(x)$ که در شرط (۱) صدق می‌کند، **چند جمله‌ای درونیاب** f

می‌شود.

۱.۳ چند جمله‌ایهای لاگرانژ

این روش فرض می‌کنیم $L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x)$ هر یک، یک چند جمله‌اي درجه n

ند و داشته باشیم

$$\boxed{P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n \qquad (۲)}$$

در آن برای $j = 0, 1, \cdots, n$ داریم :

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)} \qquad (۳)$$

(۳) داریم :

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

براین خواهیم داشت :

$$P(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

نی چند جمله‌ای $P(x)$ که با (۲) تعریف می‌شود، در شرط (۱) صدق می‌کند.

[redacted]. چند جمله‌ای $L_j(x)$ که با (۳) تعریف می‌شود.چند جمله‌ای لاگرانژ نامیده می‌شود

یک چند جمله‌ای از درجه n می‌باشد.

مثال ۱. چند جمله‌ای $P(x)$ را که مربوط به تابع جدولی زیر است، به دست آورید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

: در این مثال داریم $n = 2$ بنابراین چند جمله‌ایهای لاگرانژ $L_0(x)$ ،$L_1(x)$ ،$L_2(x)$ را
...کی از درجه ۲ هستند به دست می‌آوریم :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -(x^2-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

...ن با توجه به رابطه (۲) داریم :

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2$$
$$= 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x)$$
$$= \frac{x^2-x}{2} - (x^2-1) + \frac{3}{2}(x^2+x)$$
$$P(x) = x^2 + x + 1$$

... چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۱ در شرط (۱) صدق می‌کند، زیرا مثلاً

$$P(x_0) = P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 = f_0$$

$$P(x_2) = P(1) = 1 + 1 + 1 = 3 = f_2$$

... برای تابع جدولی مثال ۱ تقریبی از $f(0.5)$ بدست آورید.

چون $x = 0.5$ بین نقاط جدولی مثال ۱ قرار داشته و برابر هیچکدام از آنها نیست، پس

...عنوان تقریب $f(0.5)$ محاسبه می‌کنیم، یعنی

$$f(0.5) \simeq P(0.5)$$
$$= 0.25 + 0.5 + 1 = 1.75$$

...ند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را بدست آورید.

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	7

...م $n = 3$، لذا بایستی چند جمله‌ایهای از درجه ۳ لاگرانژ $L_0(x)$ ، $L_1(x)$ ،$L_2(x)$ و $L_3(x)$
... به دست آوریم :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x^3-x}{6}$$

...له‌ای درونیاب $P(x)$ عبارت است از :

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

...به جدول داریم :

$$P(x) = -2L_0(x) - 1L_1(x) + 0L_2(x) + 7L_3(x)$$
$$= \frac{-2(x^3-3x^2+2x)}{-6} - \frac{x^3-2x^2-x+2}{2} + 0 + 7\frac{x^3-x}{6}$$

$$P(x) = x^3 - 1$$

مثال ۴. برای تابع جدولی مثال قبل تقریبهایی از $f(-\frac{1}{2})$ و $f(\frac{3}{2})$ به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه $P(x) = x^3 - 1$ خواهیم داشت :

$$f(-\frac{1}{2}) \simeq P(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{8}$$
$$f(\frac{3}{2}) \simeq P(\frac{3}{2}) = \frac{19}{8}$$

مثال ۵. با اضافه کردن نقطه $(-2, -9)$ به جدول مثال ۳ چند جمله‌ای درونیاب را به دست آورید.

حل: جدول جدید عبارت است از :

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	-9	-2	-1	0	7

لذا $n = 4$ و چند جمله‌ایهای لاگرانژ عبارتند از :

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)(x^2-1)}{24} \quad , \quad L_1(x) = \frac{x(x-1)(x^2-4)}{-6}$$
$$L_2(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-1)}{4} \quad , \quad L_3(x) = \frac{x(x+1)(x^2-4)}{-6}$$
$$L_4(x) = \frac{x(x^2-1)(x+2)}{24}$$

در نتیجه چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از

$$P(x) = -9L_0(x) - 2L_1(x) - L_2(x) + 0 \times L_3(x) + 7L_4(x)$$
$$= -\frac{9}{24}x(x-2)(x^2-1) + \frac{2}{6}x(x-1)(x^2-4) - \frac{1}{4}(x^2-4)(x^2-1)$$
$$+ 0 + \frac{7}{24}x(x^2-1)(x+2)$$
$$\boxed{P(x) = x^3 - 1}$$

...ند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۵ همان چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۳ ...لیل آن این است که چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۴ از نقطه $(-2, -9)$ ...مچنین با اینکه در مثال ۵ داریم $n = 4$ چند جمله‌ای درونیاب از درجه ۳ می‌باشد.

... روش لاگرانژ

...بات برای تعیین چند جمله‌ای درونیاب زیاد است.

... چند جمله‌ای درونیاب، تنها بعد از اتمام محاسبات تعیین می‌شود.

...افه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدولی، کلیهٔ عملیات را بایستی مجدداً انجام داد.

چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن

۴.۳ فرض کنید $x_0, x_1, \cdots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \cdots, f_n$ مقادیر تابع f ...نقاط باشند. تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول بین x_i و x_{i+1} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \qquad (4)}$$

...تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول را بین x_0 و x_1 و بین x_1 و x_2 بنویسید.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$$

۵.۳. تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین x_i، x_{i+1} و x_{i+2} به صورت زیر تعریف ...ود :

$$\boxed{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}} \qquad (5)}$$

...۷. تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین x_0, x_1 و x_2 را بنویسید.

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

نکته: مشابه مثالهای فوق تفاضلات تقسیم شده از مرتبه بالاتر قابل تعریف است، اما به کمک جدول می‌توان تفاضلات تقسیم شده از مرتبه‌های مختلف را بدون نوشتن فرمولهای (۴) و (۵) و با تکیه بر مقادیر تفاضلات تقسیم شدهٔ محاسبه شده از مرتبهٔ پایین‌تر نوشت. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۸. جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

حل: برای این منظور، جدول زیر را خواهیم داشت:

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم
-1	1		
		$\frac{1-1}{-1-0}=0$	
0	1		$\frac{0-2}{-1-1}=1$
		$\frac{1-3}{0-1}=2$	
1	3		

مثال ۹. با اضافه نمودن نقطه $(2,7)$ به جدول مثال ۸، مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

حل: با استفاده از مقادیر به دست آمده در مثال ۸ کافیست نقطه $(2,9)$ را به آخر جدول اضافه نموده و تفاضلات جدید را محاسبه کنیم.

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-1	1			
		0		
0	1		1	
		2		0
1	3		1	
		4		
2	7			

مثال ۱۰. جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	-1	1	1	5	19

حل: جدول تفاضلات به صورت زیر است:

تفاضلات تقسیم شدهٔ مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
-1	-1				
		$\frac{-1-1}{-1-0}=2$			
0	1		$\frac{2-0}{-1-1}=-1$		
		$\frac{1-1}{0-1}=0$		$\frac{-1-2}{-1-2}=1$	
1	1		$\frac{0-4}{0-2}=2$		$\frac{1-1}{-1-3}=0$
		$\frac{1-5}{1-2}=4$		$\frac{2-5}{0-3}=1$	
2	5		$\frac{4-14}{1-3}=5$		
		$\frac{5-19}{2-3}=14$			
3	19				

هرگاه کسرها را ننویسیم، جدول فوق به صورت زیر خلاصه می‌شود:

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
-۱	۱				
		۲			
۰	۱		-۱		
		۰		۱	
۱	۱		۲		۰
		۴		۱	
۲	۵		۵		
		۱۴			
۳	۱۹				

فرمول چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن :

چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ عبارتست از

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f_0 &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \cdots + \\ &(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n] \qquad (6) \end{aligned}}$$

که در آن $f[x_0, x_1, \cdots, x_i]$ تفاضل مرتبه iام بین نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_i$ برای $i = 1, \cdots, n$ می‌باشد و به صورت زیر برحسب تفاضلات مراتب قبلی محاسبه می‌شود :

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_i] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{i-1}] - f[x_1, \cdots, x_i]}{x_0 - x_i}$$

مثال ۱۲. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید.

x_i	۰	۱	۳	۶
f_i	۱	-۶	۴	۱۶۹

جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است :

تفاضلات تقسیم شدهٔ مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۱			
		-۷		
۱	-۶		۴	
		۵		۱
۳	۴		۱۰	
		۵۵		
۶	۱۶۹			

رابطه (۶) چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

لات تقسیم شده مورد نیاز در رابطه فوق، اعداد بالایی جدول تفاضلات هستند که زیر آنها خط شده است، لذا خواهیم داشت :

$$P(x) = 1 - 7x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-3)$$

$$P(x) = x^3 - 8x + 1$$

با افزودن نقطه (۱۰, ۹۲۱) به تابع جدولی مثال قبل، مجدداً چند جمله‌ای درونیاب را ست آورید.

$P(x) = x^3 - 8x + 1$ چون این نقطه در

حل: جدول جدید تابع f، به صورت زیر است :

x_i	۰	۱	۳	۶	۱۰
f_i	۱	۶-	۴	۱۶۹	۹۲۱

و جدول تفاضلات جدید به کمک جدول قبلی به صورت زیر خواهد بود :

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
۰	۱				
		۷-			
۱	۶-		۴		
		۵		۱	
۳	۴		۱۰		۰
		۵۵		۱	
۶	۱۶۹		۱۹		
		۱۸۸			
۱۰	۹۲۱				

جدول تفاضلات مرتبه چهارم صفر شده است بنابراین در این حالت، چند جمله‌ای درونیاب همان چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۱۱ یعنی چند جمله‌ای زیر خواهد بود :

$$P(x) = x^{3} - 8x + 1$$

نکته: برعکس روش چند جمله‌ای‌های لاگرانژ، با اضافه نمودن نقطه یا نقاطی به یک جدول، برای محاسبه چند جمله‌ای درونیاب جدید از تمام محاسبات قبلی استفاده می‌شود.

مثال ۱۳. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید:

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

ول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است :

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۱			
		۰		
۱	۱		$\frac{1}{2}$	
		۱		$-\frac{1}{12}$
۲	۲		$\frac{1}{6}$	
		$\frac{3}{2}$		
۴	۵			

د جمله‌ای درونیاب به صورت زیر خواهد بود :

$$P(x) = 1 + 0 + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)$$

$$P(x) = \frac{1}{12}(-x^{3} + 9x^{2} - 8x + 12)$$

۱۴ فرض کنید $f(x) = \frac{1}{1+x^{2}}$، به روش نیوتن چند جمله‌ای از درجه حداکثر چهار را ست آوریدکه تابع f را در نقاط متساوی الفاصله زیر درونیابی کند :

$$x_i = \frac{10i}{4} - 5 \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

: نقاط درونیابی عبارتند از :

$$x_0 = -5, \quad x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{5}{2}, \quad x_4 = 5$$

جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر خواهد بود :

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
−۵	۰/۰۳۸۴۶				
		۰/۰۳۹۷۹			
−۲/۵	۰/۱۳۷۹۳		۰/۰۶۱۰۱		
		۰/۳۴۴۸۳		−۰/۰۲۶۵۳	
۰	۱/۰۰۰۰		−۰/۱۳۷۹۳		۰/۰۰۵۳۰۶
		−۰/۳۴۴۸۳		۰/۰۲۶۵۳	
۲/۵	۰/۱۳۷۹۳		۰/۰۶۱۰۱		
		−۰/۰۳۹۷۹			
۵	۰/۰۳۸۴۹				

با استفاده از اعداد جدول که زیر آنها خط کشیده شده است، چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $x_۰, \cdots, x_۴$ به صورت زیر است

$$P(x) = ۰/۰۳۸۴۶ + ۰/۰۳۹۷۹(x+۵) + ۰/۰۶۱۰۱(x+۵)(x+۲/۵)$$
$$- ۰/۰۲۶۵۳(x+۵)(x+۲/۵)x + ۰/۰۰۵۳۰۶(x+۵)(x+۲/۵)x(x-۲/۵)$$

۳.۲.۳ تفاضلات متناهی و درونیابی یک تابع هرگاه نقاط درونیابی متساوی الفاصله باشند

روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن در حالت کلی برای نقاط $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ چه متساوی الفاصله باشند، چه نباشند، چند جمله‌ای درونیاب را به دست می‌دهند. اما وقتی x_iها متساوی الفاصله باشند، فرمولهای ساده‌تری موجودند که در این قسمت آنها را به دست می‌آوریم.

ـلتری. هرگاه فاصله $[a,b]$ را به N زیر فاصله به صورت $[x_i, x_{i+1}]$ هرکدام به طول h ـسیم کنیم، می‌نویسیم :

$$x = a(h)b$$

که در آن $h = \frac{b-a}{N}$.

ـال ۲۵. نقاط $x = ۱(۰/۱)۲$ عبارتند از :

$$x_۰ = ۱, \quad x_۱ = ۱/۱, \quad x_۲ = ۱/۲, \cdots, x_{۱۰} = ۲$$

توجه: همانگونه که مثال ۱۵ نشان می‌دهد نقاط $x = a(h)b$ عبارتند از :

$$x_i = a + ih \quad , \quad i = ۰, ۱, ۲, \cdots, N$$

و

$$x_{i+1} - x_i = h \quad , \quad i = ۰, ۱, ۲, \cdots, N-۱$$

و هرگاه $a = x_۰$. در این صورت

$$x_i = x_۰ + ih \quad , \quad i = ۰, ۱, ۲, \cdots, N$$

در حالتی که نقاط x_i متساوی‌الفاصله هستند، یک تبدیل خطی را که باعث تغییرها می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$s(x) = s = \frac{x - x_۰}{h} \Longrightarrow x(s) = x = x_۰ + sh$$

بنابراین برای تبدیل خطی فوق خواهیم داشت :

$$f(x) = f(x_۰ + sh)$$

که آن را به طور خلاصه با f_s نشان می‌دهیم، یعنی

$$\boxed{f(x) = f(x_\circ + sh) = f_s \qquad (۷)}$$

رابطه (۷) یک چند جمله‌ای برحسب x را به یک چند جمله‌ای بر حسب s تبدیل می‌کند.

تعریف ۶.۳. عملگر **تفاضل پیشرو**، Δ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\boxed{\Delta^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = \circ \\ \Delta^{i-1} f_{s+1} - \Delta^{i-1} f_s, & i > \circ \end{cases} \qquad (۸)}$$

مثال ۱۶. Δf_s و $\Delta^2 f_s$ را بنویسید.

حل: بنا به روابط (۸) داریم :

$$\Delta f_s = \Delta^\circ f_{s+1} - \Delta^\circ f_s = f_{s+1} - f_s$$

$$\Delta^2 f_s = \Delta f_{s+1} - \Delta f_s = (\Delta^\circ f_{s+2} - \Delta^\circ f_{s+1}) - (f_{s+1} - f_s)$$

$$= f_{s+2} - 2 f_{s+1} + f_s$$

مشابه جدول تفاضلات تقسیم شده، هرگاه نقاط x متساوی‌الفاصله باشند، می‌توان جدول تفاضلات را که جدول **تفاضلات متناهی** هم نامیده شود، تشکیل داد.

مثال ۱۷. برای $n = 3$ جدول تفاضلات به صورت زیر است :

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
$x_\circ$	$f_\circ$			
		$\Delta f_\circ$		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_\circ$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_\circ$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

...تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید.

x_i	-1	$\circ$	1	2
f_i	$\circ$	-1	2	9

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	$\circ$			
		$-1 - \circ = -1$		
$\circ$	-1		$3 + 1 = 4$	
		$2 + 1 = 3$		$4 - 4 = \circ$
1	2		$7 - 3 = 4$	
		$9 - 2 = 7$		
2	9			

...چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو:

...هرگاه x_i نقاط متساوی‌الفاصله باشند و $x = x_\circ + sh$، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب ...برحسب تفاضلات پیشرو به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f_\circ + s\Delta f_\circ + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_\circ + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_\circ + \cdots \\ + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_\circ \qquad (۹) \end{aligned}}$$

...طه (۹) چند جمله‌ای $P(x)$ را برحسب تفاضلات پیشرو نشان می‌دهد، که به فرمول تفاضلی [illegible] است.و با توجه به اینکه داریم :

$$\frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-i+1)}{i!} = \binom{s}{i}$$

بنابراین رابطهٔ (۹) را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم :

$$\boxed{P(x) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0 \qquad (10)}$$

مثال ۱۹، فرمول چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را برحسب تفاضلات پ
نیوتن به دست آورید.

x_i	1	2	3	4
f_i	2	5	10	17

حل: جدول تفاضلات پیشرو به صورت زیر است :

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
1	<u>2</u>			
		<u>3</u>		
2	5		<u>2</u>	
		5		0
3	10		2	
		7		
4	17			

چند جمله‌ای درونیاب برحسب s عبارت است از

$$P(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 = 2 + 3s + \frac{s(s-1)}{2} \times 2 = s^2 + 2s + 2$$

و چون $x = x_0 + sh$ و اینکه $h = 1$ و $x_0 = 1$ بنابراین $x = 1 + s$ و یا $s = x - 1$.

لذا چند جمله‌ای درونیاب برحسب x عبارت است از :

$$P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1$$

. **عملگر تفاضل پسرو**، ∇، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\boxed{\nabla^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = 0 \\ \nabla^{i-1} f_s - \nabla^{i-1} f_{s-1}, & i > 0 \end{cases} \qquad (11)}$$

∇f_s و $\nabla^2 f_s$ را به دست آورید.

استفاده از روابط (۱۱) خواهیم داشت :

$$\nabla f_s = \nabla^0 f_s - \nabla^0 f_{s-1} = f_s - f_{s-1}$$

$$\nabla^2 f_s = \nabla f_s - \nabla f_{s-1} = (f_s - f_{s-1}) - (\nabla^0 f_{s-1} - \nabla^0 f_{s-2})$$

$$= f_s - 2f_{s-1} + f_{s-2}$$

برای $n = 3$، جدول تفاضلات پسرو را بنویسید.

این جدول به صورت زیر می‌باشد:

x_i	f_i	∇	∇^2	∇^3
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

مثال ۲۱. برای تابع جدولی مثال ۱۸، جدول تفاضلات پسرو را بنویسید:

x_i	f_i	∇	$\nabla^۲$	$\nabla^۳$
-۱	۰			
		-۱		
۰	-۱		۴	
		۳		۰
۱	۲		۴	
		۷		
۲	۹			

فرمول چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار $f(x)$ وقتی x نزدیک نقاط انتهایی جدول است، لازم است که از تفاضلا پسرو، که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شود، استفاده کنیم.

چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_۰, x_۱, \cdots, x_{n-۱}, x_n$ عبارت است از :

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+۱)}{۲!}\nabla^۲ f_n + \frac{s(s+۱)(s+۲)}{۳!}\nabla^۳ f_n + \cdots \\ + \frac{s(s+۱)(s+۲)\cdots(s+n-۱)}{n!}\nabla^n f_n \qquad (۱۲) \end{aligned}}$$

که $x = x_n + sh$. رابطه (۱۲) چند جمله‌ای $P(x)$ را برحسب تفاضلات پسرو نشان می‌دهد، که به فرمول تفاضل پسرو نیوتن موسوم است.

توجه . همانگونه که مثال ۲۲ نشان می‌دهد $\nabla^i f_n$ برای $i = ۱, \cdots, n$ اعداد انتهای جدول تفاضلات است.

مثال ۲۳. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مثال ۱۹ را با استفاده از تفاضلات پسرو بنویسید.

حل: با استفاده از فرمول (۱۲) و اعداد انتهایی جدول تفاضلات مثال ۱۹ داریم :

$$\begin{aligned} P(x) &= f_۲ + s\nabla f_۲ + \frac{s(s+۱)}{۲}\nabla^۲ f_۲ \\ &= ۱۷ + ۷s + \frac{s(s+۱)}{۲}۲ = s^۲ + ۸s + ۱۷ \end{aligned}$$

فوق، چند جمله‌ای درونیاب f بر حسب s است. برای به دست آوردن چند جمله‌ای سب x، چون $x = s + ۴$ پس $s = x - ۴$، لذا

$$P(x) = (x-۴)^۲ + ۸(x-۴) + ۱۷ = x^۲ + ۱$$

شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب

دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ عبارت است از :

$$\begin{vmatrix} P(x) & ۱ & x & x^۲ & \cdots & x^n \\ f_۰ & ۱ & x_۰ & x_۰^۲ & \cdots & x_۰^n \\ f_۱ & ۱ & x_۱ & x_۱^۲ & \cdots & x_۱^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & ۱ & x_n & x_n^۲ & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = ۰$$

$P(x_k)$ بنابراین هرگاه در دترمینان فوق قرار دهیم $x = x_k$ در این صورت دو سطر متناظر دترمینان مساوی بوده و بنابراین دترمینان صفر است هرگاه دترمینان را برحسب سط دهیم در این صورت یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه n به دست می‌آید. استفاده س به علت سخت بودن محاسبه دترمینان زیاد مورد توجه نیست.

. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به کمک روش دترمینان به دست آورید.

x_i	۰	۲
f_i	۱	۳

حل: بایستی بسط دترمینان زیر را بنویسیم؛ در این مثال داریم $n = 1$.

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2P(x) - 1(2) + x(1-3) = 0 \Longrightarrow P(x) = x + 1$$

۳.۳ خطای چند جمله‌ای درونیاب

هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط دو به دو متمایز $x_0, x_1, \cdots x_n$ بوده و f دارای مشتق مرتبه $n+1$ باشد، آن گاه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

که در آن c عددی نامشخص بوده و $x_0 < c < x_n$ و $f^{(k)}(x)$ مشتق مرتبه kام تابع f می‌باشد. به دلیل مشخص نبودن c، هرگاه M یک کران بالا برای $f^{(n+1)}(x)$ بر فاصله $[x_0, x_n]$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M, \qquad x \in [x_0, x_n]$$

بنابراین

$$\boxed{|f(x) - P(x)| \le |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \frac{M}{(n+1)!} \qquad (13)}$$

رابطه (۱۳) یک کران بالا برای خطای چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ ارائه می‌دهد.

مثال ۲۵: چند جمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$ را در نقاط $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ به دست آورده و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید. مقدار $|f(\frac{1}{2}) - P(\frac{1}{2})|$ را با کران بالا در $x = \frac{1}{2}$ مقایسه کنید.

مربوط به تابع عبارت است از :

x_i	f_i	تفاضل مرتبه اول
0	1	
		-1
1	0	

جمله‌ای درونیاب به صورت زیر است :

$$P(x) = 1 + (x - 0) \times (-1) = 1 - x$$

ت که :

$$f(\frac{1}{2}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad , \qquad P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$|f(\frac{1}{2}) - P(\frac{1}{2})| = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 0/21 \qquad (2D)$$

یک کران بالا برای $|f(x) - P(x)|$ باید کران بالایی برای مشتق دوم تابع f به دست

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$$
$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$|f''(x)| = |-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}x| \le \frac{\pi^2}{4}$$

$$|f(x) - P(x)| \le |(x-0)(x-1)| \times \frac{\pi^2/4}{2!} = \frac{\pi^2}{8}|x^2 - x|$$

یعنی کران بالای خطا عبارت است از $\frac{\pi^۲}{۸}|x^۲ - x|$، مقدار این کران بالا برای $x = \frac{۱}{۲}$ برابر است با :

$$\frac{\pi^۲}{۸}\left|\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}\right| = \frac{\pi^۲}{۳۲} = ۰/۳۱ \qquad (۲D)$$

که با مقدار واقعی خطا یعنی ۰/۲۱ به مقدار ۰/۱ اختلاف دارد. مقدار خطا و همچنین کران بالای خطا اعدادی بزرگ هستند که بیانگر خوب نبودن تقریب یا نامناسب بودن چند جمله‌ای درجه اول به عنوان یک تقریب تابع $\cos\frac{\pi}{۲}x$ می‌باشد.

مثال ۲۶. فرض کنید $f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}x$. چند جمله‌ای درونیاب f را در نقاط ۰، ۱ و ۲ به دست آورید و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید.

حل: با توجه به نقاط داده شده و ضابطه تابع f جدول تفاضلات زیر را خواهیم داشت :

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	$f_i = \sin\frac{\pi}{۲}x_i$	اول	دوم
۰	۰		
		۱	
۱	۱		-۱
		-۱	
۲	۰		

بنابراین چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از :

$$P(x) = ۰ + (x-۰)(۱) + (x-۰)(x-۱)(-۱) = -x^۲ + ۲x$$

ران بالای خطا باید مشتق سوم تابع $f(x)$ را حساب کنیم.

$$f'(x) = \frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}$$
$$f''(x) = -\frac{\pi^۲}{۴}\sin\frac{\pi x}{۲}$$
$$f'''(x) = -\frac{\pi^۳}{۸}\cos\frac{\pi x}{۲}$$
$$|f'''(x)| = \left|-\frac{\pi^۳}{۸}\cos\frac{\pi x}{۲}\right| \le \frac{\pi^۳}{۸} = M$$

$$|f(x) - P(x)| \le |(x-۰)(x-۱)(x-۲)| \times \frac{\pi^۳/۸}{۳!} = \frac{\pi^۳}{۴۸}|x(x-۱)(x$$

برونیابی

f در نقاط $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ مقادیر معلوم $f_۰, f_۱, \cdots, f_n$ را داشته باشد، در بخش‌های مین تابع $f(x)$ را در $x = \bar{x}$ که $\bar{x}$ در فاصله $[x_۰, x_n]$ قرار داشت، مورد بررسی قرار این حال یک سوال طبیعی این است که هرگاه $\bar{x} < x_۰$ و یا $\bar{x} > x_n$، در این صورت $f(\bar{x})$ را چگونه تحمین بزنیم؟ چون در این حالتها $\bar{x}$ خارج فاصله $[x_۰, x_n]$ قرار دارد، مین مقدار تابع f را در $\bar{x}$ **برونیابی** می‌نامیم.برای برونیابی می‌توان از همان چند جمله‌ای تابع f استفاده نمود.درونیابی و برونیابی دو مفهوم از یک روند می‌باشند.اما درونیابی بیشتر ابی مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا هرگاه رابطه (۱۳) یعنی کران بالای خطا را در نظر بگیریم، توان نشان داد که هرگاه $\bar{x}$ به اندازه کافی به نقاط مرکزی x_iها نزدیک باشد، خطا کمترین مقدار **دارد**.برعکس هرگاه x خارج فاصله $[x_۰, x_n]$ باشد که در حالت برونیابی چنین وضعی داریم، **عاملهای** $x_i - \bar{x}$ در رابطه (۱۳) می‌توانند مقادیر بزرگی باشند.بنابراین مقدار خطای چند جمله‌ای $P(x)$ به عنوان تقریب تابع $f(x)$ زیاد خواهد بود، مگر $\bar{x}$ به یکی از نقاط انتهایی فاصلهٔ $[x_۰, x_n]$

بسیار نزدیک باشد. لذا برونیابی نسبت به درونیابی دارای دقت کمتری است و بایستی برونیابی را با احتیاط مورد استفاده قرار داد.

مثال ۲۷. برای تابع جدولی مثال ۱۹ مقادیر $f(۰/۵)$ و $f(۴/۲)$ را تخمین بزنید.

حل: در مثال ۱۹ و مثال ۲۳ چند جمله‌ای درونیاب $f(x)$ به صورت زیر به دست آمد:

$$P(x) = x^{۲} + ۱$$

بنابراین

$$f(۰/۵) \simeq P(۰/۵) = ۱/۲۵$$

$$f(۴/۲) \simeq P(۴/۲) = ۱۸/۶۴$$

استفاده از چند جمله‌ای درونیاب در تمام نقاط درونیابی x_i برای $i = ۰, ۱, \dots, n$ تنها روند مورد استفاده در برونیابی نیست، بلکه می‌توان از درونیابی خطی نیز استفاده نمود که ذیلاً توضیح داده می‌شود.

هرگاه چند جمله‌ای درونیاب گذرنده از دو نقطه (x_k, y_k) و $(x_{k+۱}, y_{k+۱})$ را بخواهیم به دست آوریم با استفاده از تفاضلات تقسیم شده نیوتن خواهیم داشت:

$$y = y_k + (x - x_k) f[x_k, x_{k+۱}]$$

$$y = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+۱} - x_k}(y_{k+۱} - y_k) \qquad (۱۴)$$

رابطه (۱۴) نشان دهنده خط ماربر دونقطه (x_k, y_k) و $(x_{k+۱}, y_{k+۱})$ می‌باشد.

حال برای برونیابی، هرگاه $\bar{y} = f(\bar{x})$ و $\bar{x} < x_۰$ در این صورت با قرار دادن $k = ۰$ در رابطه (۱۴) داریم:

$$\bar{y} = y_۰ + \frac{\bar{x} - x_۰}{x_۱ - x_۰}(y_۱ - y_۰) \qquad (۱۵)$$

$x > x_n$ با قرار دادن $k = n - ۱$ در رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$$\bar{y} = y_{n-۱} + \frac{\bar{x} - x_{n-۱}}{x_n - x_{n-۱}}(y_n - y_{n-۱}) \qquad (۱۶)$$

ن روابط (۱۵) و (۱۶) می‌توانند برای برونیابی مورد استفاده قرار گیرند.

۲۸. تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید:

x_i	-۱	۰	۱	۲
y_i	۰	-۱	۲	۹

ک روابط (۱۵) و (۱۶) مقادیر $f(-۱/۵)$ و $f(۲/۲)$ را تخمین بزنید.

داریم:

$$x_۰ = -۱, \quad x_۱ = ۰, \quad x_۲ = ۱, \quad x_n = x_۳ = ۲$$

$$y_۰ = ۰, \quad y_۱ = -۱, \quad y_۲ = ۲, \quad y_n = y_۳ = ۹$$

ن صورت برای $\bar{x} = -۱/۵$ از رابطهٔ (۱۵) خواهیم داشت:

$$\bar{y} = ۰ + \frac{-۱/۵ + ۱}{۰ + ۱}(-۱ - ۰) = ۰/۵$$

نابراین $f(-۱/۵) \simeq ۰/۵$.

برای $\bar{x} = ۲/۲$ از رابطه (۱۶) داریم:

$$\bar{y} = ۲ + \frac{۲/۲ - ۱}{۲ - ۱}(۹ - ۲) = ۱۰/۴$$

لذا $f(۲/۲) \simeq ۱۰/۴$.

لازم به ذکر است درفصل هشتم روشی به نام تقریب‌حداقل مربعات معرفی خواهد شد که برای برونیابی نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

مجموعه مسائل فصل سوم

۱- هرگاه $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ نقاط درونیابی و $f_۰, f_۱, \cdots, f_n$ مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند نشان دهید یک و تنها یک چند جمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه n، وجود دارد به طوری که :

$$P(x_i) = f_i, \qquad i = ۰, ۱, \cdots, n$$

۲- چند جمله‌ای‌های لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۳	۲	۷	۵۹

جواب .

$$L_۰(x) = -\frac{۱}{۸}(x^۳ - ۷x^۲ + ۱۴x - ۸) \quad , L_۱(x) = \frac{۱}{۳}(x^۳ - ۶x^۲ + ۸x)$$
$$L_۲(x) = -\frac{۱}{۴}(x^۳ - ۵x^۲ + ۴x) \quad , L_۳(x) = \frac{۱}{۲۴}(x^۳ - ۳x^۲ + ۲x)$$

۳- چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مسأله ۲ را به دست آورده به کمک آن تقریبی از $f(۳)$ به دست آورید.

جواب. $P(x) = x^۳ - ۲x + ۳$, $f(۳) \simeq ۲۴$

۴- برای تابع جدولی زیر تقریبی از $f(۰/۶)$ به دست آورید.

x_i	۰/۴	۰/۵	۰/۷	۰/۸
f_i	−۰/۹۱۶۲۹۱	−۰/۶۹۳۱۴۷	−۰/۳۵۶۶۷۵	−۰/۲۲۳۱۴۴

جواب . $f(۰/۶) \simeq -۰/۵۰۹۹۷۵$

۵- با استفاده از چند جمله‌ایهای لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

$$P(x) = \frac{۱}{۱۲}(-x^۳ + ۹x^۲ - ۸x + ۱۲)$$

دولی مسأله ۵ تفاضلات تقسیم شده زیر را به دست آورید.

$f[۲,۱$ ب. $f[۱,۲,۴]$ پ. $f[۰,۱,۲]$

$f[۰,۱,۲,۴$

$\frac{۳}{۲}$ ب. $\frac{۱}{۶}$ پ. $\frac{۱}{۲}$ ت. $-\frac{۱}{۱۲}$

تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ایهای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۴ و ۵ را رید.

تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	−۱	۱	۲
f_i	−۳	۰	۴

$$P(x) = \frac{۱}{۶}(۵x^۲ + ۹x - ۱۴)$$

ک فرمولهای پیشرو و پسرو نیوتن تقریبهایی از $f(۱/۱)$ و $f(۲)$ برای تابع جدولی زیر به رید.

x_i	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
f_i	۰/۷۶۵۱۹۷۷	۰/۶۲۰۰۸۶۰	۰/۴۵۵۴۰۲۲	۰/۲۸۱۸۱۸۶	۰/۱۱۰۳۶۳

$f(۱/۱) \simeq ۰/۷۱۹۶۴۸۰$ و $f(۲) \simeq ۰/۲۲۳۸۷۵۵$

- به کمک شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب، چند جمله‌ای درونیاب توابع جدولی مسائل ۵ و ۸ را به دست آورید.

۱۱- برای تابع جدولی مساله ۲ مقادیر f(۰٫۵) و f(۴٫۳) را تخمین بزنید.

جواب. f(۰٫۵) ≃ ۲٫۱۲۵ و f(۴٫۳) ≃ ۷۲٫۹۰۷

۱۲- به کمک چند جمله‌ای درونیاب به دست آمده در مساله ۸ برای f(۲٫۴) و f(۰) مقدیری به دست آورید.

جواب. f(۲٫۴) ≃ ۶٫۰۶۷ و f(۰) ≃ −۲٫۳۳۳

۱۳- مقادیر خواسته شده در مسائل ۱۱ و ۱۲ را به کمک فرمولهای (۱۵) و (۱۶) به دست آورید.

۱۴- با به دست آوردن یک چند جمله‌ای درجه چهارکه تابع جدولی زیر را درونیابی می‌کند مقادیر f(۵)، f(۶) و f(۷) را پیشگویی (برونیابی) کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۱	−۱	۱	−۱	۱

جواب. ۳۱، ۱۲۹، ۳۵۱

۱۵- مانند مساله ۱۴ در مورد تابع جدولی زیر عمل نموده و مقادیر f(۵)، f(۶) و f(۷) را پیشگویی کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۰	۱	۰	۰

جواب. ۱۰، ۴۵، ۱۲۶