کتاب محاسبات عددی

تالیف: دکتر مسعود نیکوکار-دکتر محمد تقی درویشی

باشگاه مهندسان سمنان

فصل دوم: حل عددی معادلات $f(x)=0$

فصل دوم

حل عددی معادلات $f(x) = ۰$

۱.۲ مقدمه

یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه می‌شویم، حل معادله‌ای به شکل $f(x) = ۰$ است که در آن f یک تابع مفروض است. منظور از حل معادله $f(x) = ۰$، یافتن مقادیری از متغیر x است که به ازای آنها مقدار تابع صفر شود. هرگاه $f(\alpha) = ۰$، آن گاه α را یک ریشه معادله می‌نامیم و یا می‌گوییم α یک صفر تابع f است.

خواننده با حل تحلیلی معادلاتی مانند معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ و تعیین ریشه‌های آن آشنا می‌باشد. همچنین بعضی معادلات مانند معادلات مثلثاتی، نظیر

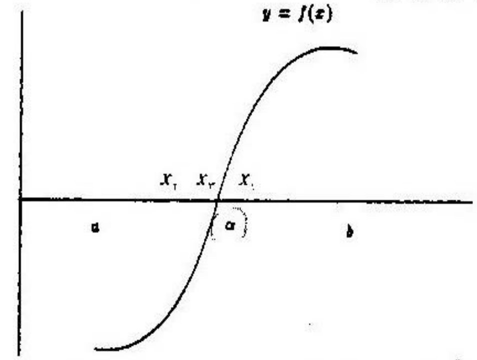
$$\sin ۲x + ۳\cos ۲x = ۱$$

به روشهای کلاسیک قابل حل هستند. اما معادلاتی مانند معادلات زیر، قابل حل با روشهای تحلیلی

۲.۳ روش‌های عددی حل معادله $f(x)=0$

۲.۳.۱ روش دو بخشی یا روش تنصیف

هرگاه شرایط ۱ تا ۳ برقرار بوده و α ریشه معادله $f(x)=0$ باشد، در این صورت نقطهٔ $(\alpha,0)$ بر روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار دارد، مطابق شکل زیر:



در روش دو بخشی وسط فاصله $[a,b]$ را به عنوان اولین تقریب α در نظر می‌گیریم، یعنی قرار می‌دهیم:

$$x_1=\frac{a+b}{2}$$

برای x_1 سه حالت وجود دارد:

۱- $f(x_1)=0$، که در این صورت x_1 ریشه معادله بوده و قرار می‌دهیم $\alpha=x_1$.

۲- $f(a)f(x_1)<0$ یعنی ریشه بین a و x_1 است، که در این صورت در تکرار بعدی فاصله $[a,x_1]$ را برای تعیین ریشه معادله در نظر می‌گیریم.

۳- $f(a)f(x_1)>0$، یعنی ریشه بین x_1 و b است، که در این صورت در تکرار بعدی فاصلهٔ $[x_1,b]$ را برای تعیین ریشه معادله در نظر می‌گیریم

با مقدمه فوق، الگوریتم ا یر خواهیم داشت :

وریتم روش دو بخشی.

م ۱. قرار دهید $x=\frac{a+b}{2}$.

م ۲. اگر $f(a)f(x)<0$، آن‌گاه ریشه در فاصله (a,x) است، قرار دهید $b=x$ و مجدداً

م ۱ را در فاصله جدید $[a,b]$ تکرار کنید.

م ۳. اگر $f(a)f(x)>0$، آن‌گاه ریشه در فاصله (x,b) است، قرار دهید $a=x$ و مجدداً

دم ۱ را در فاصله جدید $[a,b]$ تکرار کنید.

قدم ۴. اگر $f(a)f(x)=0$، آن‌گاه x ریشه است و عملیات خاتمه پیدا می‌کند.

نکته ۱. از آنجا که لزومی ندارد که قدم ۴ اتفاق بیافتد، بنابراین جهت کنترل خطا و پایان الگوریتم باید معیارهای توقف ذکر شده را در الگوریتم به طور مناسب به کار گرفت.

نکته ۲. روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد، یعنی همواره با دقت مورد نظر به جواب خواهیم رسید.

برنامه روش دو بخشی برای حل معادلهٔ $F(x)=0$.

در این برنامه تابع $F(x)=x+\cos x$ اختیار شده است.مقادیر a و b و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Bisection Method
c
        F(x)=x+cos(x)
        read(*,*) a,b,eps
        x=(a+b)/2
        n=1
10      if (abs(F(x)) .ge. eps) then
           if ( F(x) * F(a) .gt. 0 ) then
              a=x
           else
              b=x
           endif
           x=(a+b)/2
           n=n+1
           goto 10
        else
           write(*,*) "ROOT = ",x
           write(*,*) "ITERATION = ",n
        endif
        end
```

مثال ۱. تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۳x-e^{-x}=۰$ را که در فاصلهٔ $(۰٫۲۵,۰٫۲۷)$ قرار دارد، با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم؛ $|f(x_n)|<۰٫۰۰۱$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.

با توجه به الگوریتم مذکور، جدول زیر را خواهیم داشت :

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۶	−	۰٫۰۰۸۹
۲	۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۵	+	−۰٫۰۰۹۹
۳	۰٫۲۵۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۷۵	+	−۰٫۰۰۰۵

چون $|f(x_۳)|=۰٫۰۰۰۵<۰٫۰۰۱$ بنابراین $x_۳$ را به عنوان تقریب ریشه معادله در نظر می‌گیریم لذا هرگاه α ریشه مورد نظر باشد، با سه رقم اعشار قرار می‌دهیم :

$$\alpha \simeq ۰٫۲۵۸$$

تذکر ۱. با توجه به نکته بیان شده در فصل اول چون در مثال ۱ تقریب را با سه رقم اعشار خواسته‌ایم، محاسبات میانی را با چهار رقم اعشار انجام داده و در نهایت $x_۳$ را تا سه رقم اعشار گرد نموده به عنوان تقریب α قرار داده‌ایم. بدیهی است این تعداد رقم اعشار برای محاسبات میانی عموماً در هر مسأله مفید نخواهد بود و باید بسته به نوع مسأله، خود استفاده کننده از الگوریتم، در این مورد تصمیم بگیرد.

تذکر ۲. دقت کنید که شرایط ۱ تا ۳ برای معادلهٔ مثال ۱ برقرارند، زیرا داریم :

$$\begin{cases} f(a)=f(۰٫۲۵)=-۰٫۰۲۸۸ \\ f(b)=f(۰٫۲۷)=+۰٫۰۴۶۶ \end{cases}$$

پس f در فاصله $(۰٫۲۵,۰٫۲۷)$ دارای ریشه می‌باشد، همچنین داریم :

$$f'(x)=۳+e^{-x}>۰$$

(همواره)

مثال ۲. تقریبی از ریشه معادله $x^۳+x-۱=۰$ را که در فاصلهٔ $(۰,۱)$ قرار دارد، به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)|<۱۰^{-۲}$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است. تقریب

را با $۴D$ به دست آورید.

حل:

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰٫۵	+	−۰٫۳۷۵
۲	۰٫۵	۱	۰٫۷۵	−	۰٫۱۷۱۸۸
۳	۰٫۵	۰٫۷۵	۰٫۶۲۵	+	−۰٫۱۳۰۸۶
۴	۰٫۶۲۵	۰٫۷۵	۰٫۶۸۷۵۰	−	۰٫۰۱۲۴۵
۵	۰٫۶۲۵	۰٫۶۸۷۵	۰٫۶۵۶۲۵	+	−۰٫۰۶۱۱۳
۶	۰٫۶۵۶۲۵	۰٫۶۸۷۵	۰٫۶۷۱۸۸	+	−۰٫۰۲۴۸۳
۷	۰٫۶۷۱۸۸	۰٫۶۸۷۵	۰٫۶۷۹۶۹	+	−۰٫۰۰۶۳۱

چون $|f(x_۷)| = ۰٫۰۰۶۳۱ < ۱۰^{-۲}$ لذا تقریب ریشه با $۴D$ عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۰٫۶۷۹۷$$

مثال ۳. تقریبی از ریشه معادله $x^۲ - (۱-x)^۵ = ۰$ را که در فاصله $(۰, ۱)$ قرار دارد با $۴D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.

حل:

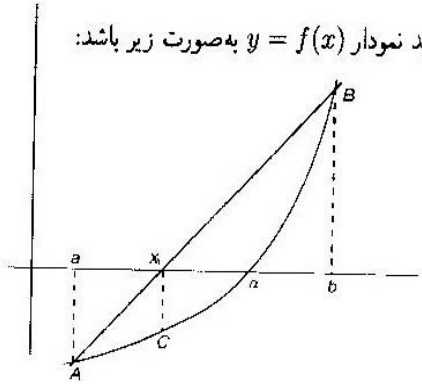
n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰٫۵	−	۰٫۲۱۸۷۵
۲	۰	۰٫۵	۰٫۲۵	+	−۰٫۱۷۴۸۰
۳	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۳۷۵	−	۰٫۰۴۵۲۶
۴	۰٫۲۵	۰٫۳۷۵	۰٫۳۱۲۵۰	+	−۰٫۰۵۵۹۳
۵	۰٫۳۱۲۵۰	۰٫۳۷۵	۰٫۳۴۳۷۵	+	−۰٫۰۰۳۵۵

چون $|f(x_۵)| = ۰٫۰۰۳۵۵ < ۱۰^{-۲}$ بنابراین تقریب ریشه با $۴D$ عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۰٫۳۴۳۸$$

۲.۳ روش نابجایی

برای توضیح روش نابجایی، فرض کنید نمودار $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد:



دو نقطه A و B واقع بر منحنی را با یک خط مستقیم به هم وصل می‌کنیم، محل تلاقی این خط با محور xها را به عنوان اولین تقریب α یعنی $x_۱$ در نظر می‌گیریم. حال چون (طبق شکل فوق) ریشه بین $x_۱$ و b است مجدداً با یک خط مستقیم دو نقطه B و C بر روی منحنی را به هم وصل می‌کنیم و محل تلاقی این خط با محور xها را $x_۲$ یعنی دومین تقریب ریشه در نظر می‌گیریم. این کار را تا جایی ادامه دهیم که به اندازهٔ کافی به ریشه α نزدیک شویم.

برای تعیین $x_۱$ ابتدا معادله خط AB را می‌نویسیم، این معادله به‌صورت زیر است:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

زیرا مختصات نقاط A و B به ترتیب عبارتند از $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$. چون $(x_۱, ۰)$ بر روی خط فوق واقع است، لذا خواهیم داشت:

$$\frac{۰ - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_۱ - a}{b - a}$$

از آن

$$x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

حال با توجه به اینکه ریشه در فاصلهٔ $[a,x_1]$ و یا در فاصلهٔ $[x_1,b]$ قرارگرفته باشد، عمل فوق را ر یکی از فاصله‌های مذکور تکرار می‌کنیم بنابراین با توجه به مفروضات روش دو بخشی، در روش ابجایی قرار می‌دهیم :

$$\boxed{x = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \qquad (1)}$$

ر حالتهای زیر را بررسی می‌کنیم :

گر $f(a)f(x) < 0$ آن گاه ریشه در (a,x) است، لذا قرار می‌دهیم $b=x$ و x جدید را از رابطه ۱) حساب می‌کنیم.

گر $f(a)f(x) > 0$ آن گاه ریشه در (x,b) است، لذا قرار می‌دهیم $a=x$ و x جدید را از رابطه ۱) حساب می‌کنیم.

گر $f(a)f(x) = 0$ آن گاه ریشه برابر x بوده و کار تمام است.

کته روش نابجایی نیز مانند روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد.

رنامه روش نابجایی برای حل معادلهٔ $F(x)=0$.

در این برنامه تابع $F(x)=x+\cos x$ اختیار شده است.مقادیر a و b و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.


```
c
c       Regula Falsi Method
c
        F(x)=x+cos(x)
        read(*,*) a,b,eps
        x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a))
        n=1
10      if (abs(F(x)) .ge. eps) then
           if ( F(x) * F(a) .gt. 0 ) then
              a=x
           else
              b=x
           endif
           x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a))
           n=n+1
           goto 10
        else
              write(*,*) "ROOT = ",x
              write(*,*) "ITERATION = ",n
        endif
        end
```

مثال ۴. تقریبی از ریشه معادله $f(x)=3x-e^{-x}=0$ را به روش نابجایی با سه رقم اعشار به دست آورید.این ریشه در فاصله $(0/25, 0/27)$ قرار دارد.محاسبات را تا جایی ادامه دهید که $|f(x_n)| \geq 2 \times 10^{-2}$.

حل: با توجه به رابطه (۱) و اینکه $a = ۰٫۲۵$ و $b = ۰٫۲۷$ داریم :

$$x_۱ = \frac{۰٫۲۵ \times ۰٫۰۴۶۶ - ۰٫۲۷ \times (-۰٫۰۲۸۸)}{۰٫۰۴۶۶ - (-۰٫۰۲۸۸)} = ۰٫۲۵۷۶$$

$$f(x_۱) = -۰٫۰۰۰۱$$

لذا $|f(x_۱)| = ۰٫۰۰۰۱ < ۲ \times ۱۰^{-۴}$ بنابراین $x_۱$ تقریب ریشه بوده و این تقریب با سه رقم اعشار عبارت است از :

$$\alpha \simeq ۰٫۲۵۸$$

(نتیجه را با مثال ۱ مقایسه کنید.)

مثال ۵. تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^۲ - ۲^x = ۰$ را که در فاصله $(-۱, ۰)$ قرار دارد به روش نابجایی با $۴D$ به دست آورید به طوری که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$.

حل: هرگاه قرار دهیم $x_n = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$، جدول زیر را خواهیم داشت :

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-۱	۰	$-۰٫۶۶۶۶۷$	۰٫۵	$-۰٫۱۸۵۵۲$	$-$
۲	-۱	$-۰٫۶۶۶۶۷$	$-۰٫۷۵۶۸۸$	۰٫۵	$-۰٫۰۱۸۹۲$	$-$
۳	-۱	$-۰٫۷۵۶۸۸$	$-۰٫۷۶۵۷۴$	۰٫۵	$-۰٫۰۰۱۷۹$	$-$

چون $|f(x_۳)| = ۰٫۰۰۱۷۹ < ۱۰^{-۲}$ پس $x_۳$ تقریب مورد نظر ریشه است.لذا با $۴D$ تقریب ریشه عبارت است از :

$$\alpha \simeq -۰٫۷۶۵۷$$

مثال ۶. به روش نابجایی تقریبی از ریشه منفی معادله $f(x) = \sin x - \frac{x}{۲} = ۰$ را که در فاصله $(-۲, -۱)$ قرار دارد با $۴D$ به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$.

برای $x_n = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$، جدول زیر را خواهیم داشت:

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-۲	-۱	$-۱٫۷۹۰۱۳$	۰٫۰۹۰۷۰	$-۰٫۰۸۰۹۸$	$-$
۲	-۲	$-۱٫۷۹۰۱۳$	$-۱٫۸۸۹۱۲$	۰٫۰۹۰۷۰	$-۰٫۰۰۵۲۰$	$-$

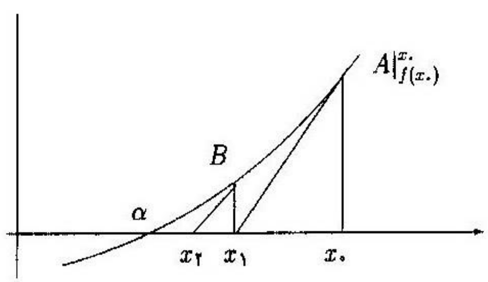
چون $|f(x_۲)| = ۰٫۰۰۵۲ < ۱۰^{-۲}$ پس $x_۲$ تقریب مورد نظر از ریشه است. بنابراین با $۴D$ این تقریب عبارت است از :

$$\alpha \simeq -۱٫۸۸۹۱$$

توجه: هنگام محاسبه معادلاتی که شامل توابع مثلثاتی هستند، مد (حالت) رادیان ماشین حساب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳.۳.۲ روش نیوتن-رفسون

برای توضیح این روش، فرض کنید نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد :



همانگونه که شکل فوق نشان می‌دهد α ریشه مورد نظر است. هرگاه $x_۰$ تقریبی از ریشه باشد، از نقطه $A(x_۰, f(x_۰))$ واقع بر منحنی $y = f(x)$ مماس بر منحنی را رسم می‌کنیم .محل تلاقی این مماس را با محور طولها $x_۱$ می‌نامیم.سپس از نقطه $B(x_۱, f(x_۱))$ واقع بر منحنی مماس را

رسم می‌کنیم و محل تلاقی این مماس جدید را با محور طولها x_2 می‌نامیم. این عمل را تا جایی ک... به تقریب مطلوب برسیم؛ یعنی x_nها به اندازه کافی به ریشه نزدیک شوند، ادامه می‌دهیم

با داشتن $x_۰$ برای تعیین $x_۱$، بایستی معادله خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ را در نقط... $A(x_۰, f(x_۰))$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور xها تعیین کنیم. ضریب زاویه این خط مماس $m = f'(x_۰)$ است، بنابراین معادله خط مماس عبارت است از :

$$y - f(x_۰) = f'(x_۰)(x - x_۰)$$

محل تلاقی این خط با محور طولها را $(x_۱, ۰)$ می‌گیریم، لذا

$$۰ - f(x_۰) = f'(x_۰)(x_۱ - x_۰)$$

که اگر $f'(x_۰) \neq ۰$ خواهیم داشت :

$$x_۱ = x_۰ - \frac{f(x_۰)}{f'(x_۰)}$$

بنابراین در حالت کلی با در دست داشتن x_n خواهیم داشت :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (۲)}$$

رابطه (۲) فرمول تکرار روش نیوتن-رفسون یا به اختصار روش تکرار نیوتن نامیده می‌شود.

روش نیوتن تضمین همگرایی ندارد، اما به محض قرار گرفتن در مسیر همگرایی می‌توان نشان داد x_nها سریع به جواب مورد نظر میل می‌کند.

برنامه روش نیوتن برای حل معادلهٔ $F(x) = ۰$.

در این برنامه تابع $F(x) = x - \cos x$ اختیار شده است. مشتق تابع $\mathrm{Fprime}(x) = ۱ + \sin x$ به برنامه داده شده است. مقدار $x_۰$ و دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و مشتق آن و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست

...وردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به ...ست آوردن ریشه است.

```
c
c     Newton's Method
c
      F(x)=x-cos(x)
      Fprime(x)=1+sin(x)
      read(*,*) x0,eps
      x=x0 - F(x0) / Fprime(x0)
      n=1
10    if (abs(F(x)) .lt. eps ) goto 20
      x0=x
      x=x0 - F(x0) / Fprime(x0)
      n=n+1
      goto 10
20    write(*,*) "ROOT = ",x
      write(*,*) "ITERATION = ",n
      end
```

ریشه معادلهٔ $f(x) = x - \cos x = ۰$ را که در فاصلهٔ $[۰, ۱]$ قرار دارد به روش نیوتن با چهار رقم اعشار به دست آورید به طوری که $|x_n - x_{n-1}| < ۱۰^{-۴}$ که x_n تقریب ریشه مورد نظر در تکرار nام است. قرار دهید $x_۰ = ۰/۵$.

حل: داریم $f(x)=x-\cos x$ و $f'(x)=1+\sin x$، لذا از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\cos x_n}{1+\sin x_n}$$

با قرار دادن $x_0=0.5$ داریم:

$$\begin{cases} x_1=0.75522 \\ x_2=0.73914 \\ x_3=0.73909 \end{cases}$$

چون $|x_3-x_2| = 5\times 10^{-5} < 10^{-4}$ لذا x_3 تقریب ریشه مورد نظر است و با $4D$ این تقریب عبارتست از:

$$\alpha \simeq 0.7391$$

مثال ۸. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ را که در فاصله $[1.5, 2]$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-3}$. قرار دهید $x_0=1.75$.

حل: داریم $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ و $f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$، لذا رابطه زیر را برای محاسبه x_nها خواهیم داشت:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\sin x_n-\frac{x_n}{2}}{\cos x_n-0.5}$$

$$x_0=1.75$$

$$x_1=1.91069$$

$$x_2=1.89563$$

$$f(x_2)=-0.00011$$

$\alpha \simeq 1.8956$

چون $|f(x_2)| < 10^{-3}$ لذا x_2 تقریبی از ریشه مورد نظر است و با $4D$ این تقریب عبارتست از:

$$\alpha \simeq 1.8956$$

توجه. همانگونه که مثالهای ۷ و ۸ نشان می‌دهند، تعداد تکرارهای لازم برای محاسبه ریشه یک معادله به روش نیوتن کمتر از این تعداد به روشهای قبلی است. همچنین هرگاه در مثال ۷ پس از محاسبه x_3 تکرارها را ادامه دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_3=0.73909 \\ x_4=0.73909 \\ x_5=0.73909 \\ \vdots \end{cases}$$

به طور مشابه هرگاه در مثال ۸ پس از محاسبه x_2 تکرارها را ادامه دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_2=1.89563 \\ x_3=1.89549 \\ x_4=1.89549 \\ \vdots \end{cases}$$

مثال ۹. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $f(x)=3e^x-\frac{1}{x}=0$ را که در فاصله $(0.2, 0.3)$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید. قرار دهید $x_0=0.25$.

حل: داریم $f(x) = ۳e^x - \frac{۱}{x}$ و $f'(x) = ۳e^x + \frac{۱}{x^۲}$، لذا:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{۳e^{x_n} - \frac{1}{x_n}}{۳e^{x_n} + \frac{1}{x_n^2}}$$

$x_0 =$ ۰٫۲۵

$x_1 =$ ۰٫۲۵۷۴۵

$x_2 =$ ۰٫۲۵۷۶۳

$x_3 =$ ۰٫۲۵۷۶۳

$\vdots$

بنابراین $\alpha \simeq$ ۰٫۲۵۷۶ تقریب ریشه با چهار رقم اعشار است.

مثال ۱۰. با ارائه روند تکراری نیوتن-رفسون ریشهٔ kام یک عدد مثبت c را حساب کنید و از آنجا تقریبی برای $\sqrt{۲}$ بیابید.

حل: معادله $f(x) = x^k - c = 0$ را در نظر می‌گیریم لذا برای یافتن ریشه kام c بایستی ریشهٔ معادله $f(x) = 0$ را به دست آوریم. طبق روش تکراری نیوتن-رفسون با داشتن x_0 داریم:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - c}{kx_n^{k-1}} = \frac{kx_n^k - x_n^k + c}{kx_n^{k-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n^k + c}{kx_n^{k-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{c}{x_n^{k-1}}\right)$$

لذا برای یافتن تقریبی از $\sqrt[۲]{۲}$ داریم:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

در این صورت:

$x_1 =$ ۱٫۵۰۰۰۰۰۰ $\quad x_2 =$ ۱٫۴۱۶۶۶۶۷ $\quad x_3 =$ ۱٫۴۱۴۲۱۵۷

$x_4 =$ ۱٫۴۱۴۲۱۳۶ $\quad x_5 =$ ۱٫۴۱۴۲۱۳۶ $\quad \ldots$

۱٫۴۱ را به عنوان تقریبی از $\sqrt{۲}$ برمی‌گزینیم.

روش وتری

$$\lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

مقداری نزدیک x_n باشد، مثلاً x_{n-1}، در این صورت

$$\boxed{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \simeq f'(x_n) \qquad (۳)}$$

در فرمول نیوتن، یعنی رابطه (۲) به جای $f'(x_n)$ مقدار تقریبی آن را از رابطه (۳) قرار دهیم به دست می‌آوریم:

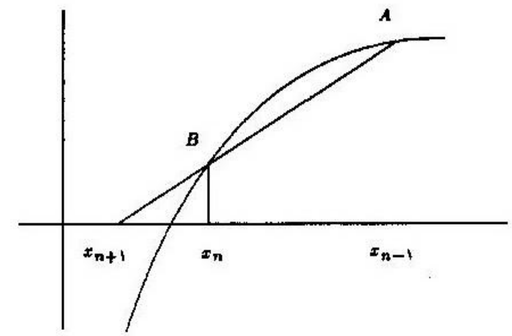
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (۴)}$$

) فرمول روش وتری برای به دست آوردن ریشهٔ معادله $f(x) = 0$ نامیده می‌شود. برای تقریب‌های ریشه یعنی برای محاسبه x_nها از فرمول وتری به دو مقدار اولیه x_0 و x_1 نیاز

اینکه این روش را وتری نامند، آن است که در مرحلهٔ nام x_{n+1} از محل برخورد خط (وتر)

واصل نقاط $A|_{f(x_{n-1})}^{x_{n-1}}$ و $B|_{f(x_n)}^{x_n}$ با محور xها به دست می‌آید.به شکل زیر توجه کنید :



نکته: تفاوت عمده روش وتری با روش نابجایی در این است که در روش نابجایی در هر مرحله بررسی می‌شود و فاصله‌ای در نظر گرفته می‌شود که تابع در آن تغییر علامت می‌دهد در حالی که در روش وتری صرفاً زیر فاصلهٔ آخر که نقاط انتهایی آن در تکرار اخیر به دست آمده‌اند، جهت تکرار روش به کار برده می‌شود و به همین دلیل روش وتری تضمین همگرایی ندارد، اما می‌توان نشان داد که سرعت همگرایی روش وتری (در صورت همگرایی) بیشتر از روش نابجایی است.

برنامه روش وتری برای حل معادلهٔ $F(x) = ۰$.

در این برنامه تابع $F(x) = x^۳ + x - ۱$ اختیار شده است و مقادیر اولیه $x_۰$ و $x_۱$ و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c  Secant Method
c
      F(x)= x**3 + x - 1
      read(*,*) x0,x1,eps
```



```
      x=x1 - (F(x1)*(x1-x0)) /(F(x1)-f(x0))
      n=1
10    if (abs(F(x)) .lt. eps ) goto 20
      x0=x1
      x1=x
      x=x1 - (F(x1)*(x1-x0)) /(F(x1)-F(x0))
      n=n+1
      goto 10
20    write(*,*) "ROOT = ",x
      write(*,*) "ITERATION = ",n
      end
```

ل ۱۱. با استفاده از روش وتری ریشه‌معادله $x^۳ + x - ۱ = ۰$ را با سه رقم اعشار به دست ید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۰/۰۰۱$.قرار دهید $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۱$.

ل: با استفاده از رابطه (۴) و $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۱$ خواهیم داشت :

$$x_۲ = ۰/۵$$

$$x_۳ = ۰/۶۳۶۴ \qquad f(x_۳) = -۰/۱۰۵۹$$

$$x_۴ = ۰/۶۹۰۱ \qquad f(x_۴) = ۰/۰۱۸۸$$

$$x_۵ = ۰/۶۸۲۰ \qquad f(x_۵) = -۰/۰۰۰۸$$

ون $|f(x_۵)| < ۰/۰۰۱$ پس

$$\alpha \simeq ۰/۶۸۲ \qquad (۳D)$$

۵.۳.۲ روش تکرار ساده

در این روش پس از آزمون شرایط موجود بودن ریشه برای معادله $f(x)=0$ در فاصله $[a,b]$، معادله $f(x)=0$ پس از ~~...~~ به صورت $x=g(x)$ نوشته می‌شود. به طوری که α ریشهٔ هر دو معادله باشد، یعنی :

$$f(\alpha)=0 \qquad \& \qquad \alpha=g(\alpha)$$

توجه ۱. معمولاً از روی یک معادله $f(x)=0$ به صورتهای مختلفی می‌توان به شکل $x=g(x)$ رسید.

مثال ۱۲. معادله $f(x)=x^2-x-2=0$ را در نظر بگیرید، در این صورت برای تابع $g(x)$ انتخابهای زیر وجود دارد :

الف. $g(x)=x^2-2$

ب. $g(x)=\sqrt{x+2}$ $x^2=x+2 \Rightarrow x=\underbrace{\sqrt{x+2}}_{g(x)}=\{x=g(x)\}$

پ. $g(x)=1+\frac{2}{x}$

توجه ۲. بدیهی‌ترین صورتهای ممکن برای تبدیل معادله $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$ عبارتند از :

$$\begin{cases} x=x-f(x) \\ x=x+f(x) \end{cases}$$

پس از نوشتن معادله $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$، هرگاه x_0 تقریبی از α، ریشه معادله باشد x_nها به طریق زیر ساخته می شوند :

$$x_1=g(x_0)$$
$$x_2=g(x_1)$$
$$x_3=g(x_2)$$
$$\vdots$$

...طور کلی با در دست داشتن x_n قرار می‌دهیم :

$$\boxed{x_{n+1}=g(x_n), \quad n=0,1,2\cdots \qquad (5)}$$

...طه (۵) فرمول روش تکرار ساده برای به دست آوردن ریشه α معادله $f(x)=0$، نامیده می‌شود.

...ط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده :

...ی اطمینان از اینکه x_nهایی که از رابطه (۵) محاسبه می‌شوند، به ریشه α از معادله $f(x)=0$ ...ل می‌کنند یا خیر، دو شرط زیر را به عنوان شرط کافی همگرایی دنباله $\{x_n\}$ بیان می‌کنیم :

برای $x\in[a,b]$ داشته باشیم $g(x)\in[a,b]$ (۱) [illegible]

برای $x\in[a,b]$ داشته باشیم $|g'(x)|<1$

...: شرایط فوق شرایط کافی هستند، بنابراین هرگاه تابع $g(x)$ دارای دو شرط فوق باشد x_nها ...ل میل می‌کنند. لذا پس از تشکیل معادله $x=g(x)$، ابتدا شرایط فوق را بررسی می‌کنیم هرگاه $g(x)$ در هر دو شرط صدق کرد با داشتن x_0 مقادیر x_n را از رابطه (۵) محاسبه می‌کنیم، ... $g(x)$ حداقل یکی از شرایط را نداشت، یک g دیگر انتخاب می‌کنیم.

...نامه روش تکرار ساده برای حل معادلهٔ $F(x)=0$.

...ن برنامه برای به دست آوردن ریشه معادلهٔ $F(x)=e^{-x}-\sin x=0$ مورد استفاده قرار ...فته است. تابع $G(x)$ به صورت $G(x)=x+e^{-x}-\sin x$ اختیار شده است. مقدار x_0 و

دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و $G(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c     Fixed Point Iteration Method
c
c     This program solves the equation EXP(-X)-SIN(X)=0
c     by fixed point iteration, using the iteration function
c     G(X)=X+EXP(-X)-SIN(X)
c
      F(x)= exp(-x) - sin(x)
      G(x)=x+exp(-x)-sin(x)
      read(*,*) x0,eps
      x=G(x0)
      n=1
10    if (abs(F(x)) .lt. eps ) goto 20
      x0=x
      x=G(x0)
      n=n+1
      goto 10
20    write(*,*) "ROOT = ",x
      write(*,*) "ITERATION = ",n
      end
```


مثال ۳. برای تعیین تقریب ریشه معادله $f(x) = 3xe^{x} - 1 = 0$ که در فاصله $(0,1)$ قرار دارد از روش تکرار ساده استفاده کنید. قرار دهید $x_0 = 0.5$ و تقریب را با $3D$ به دست آورید.

حل: معادله را به شکل $x = \frac{e^{-x}}{3}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{3}$$

برای نشان دادن دارا بودن شرایط ۱ و ۲ برای تابع g به صورت زیر عمل می‌کنیم، چون $x \in (0,1)$ پس

$$0 < x < 1$$

$$-1 < -x < 0$$

$$e^{-1} < e^{-x} < e^{0}$$

$$\frac{1}{3e} < \frac{e^{-x}}{3} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3e} < g(x) < \frac{1}{3}$$

چون $\frac{1}{3e} = 0.12$، بنابراین $0 < 0.12 < g(x) < \frac{1}{3} < 1$

$g(x) \in (0,1)$

لذا برای $x \in (0,1)$ داریم: $g(x) \in (0,1)$. در ضمن

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{3}$$

و اگر $x \in (0,1)$ خواهیم داشت: $|g'(x)| < 1$

$$|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{3} < \frac{e^{0}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

بنابراین $g(x)$ مناسب است. با استفاده از $x_0 = 0.5$ و از رابطه

$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

داریم :

$$x_1 = 0.2022 \quad (4D)$$

$$x_2 = 0.2723$$

$$x_3 = 0.2539$$

$$x_4 = 0.2586$$

$$x_5 = 0.2574$$

$$x_6 = 0.2577$$

$$x_7 = 0.2576$$

$$x_8 = 0.2576$$

$$x_9 = 0.2576$$

لذا

$$\alpha \simeq 0.258 \quad (3D)$$

مثال ۴۲. تقریبی از ریشهٔ معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصلهٔ $[0, 1]$ قرار دارد با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| \leq 10^{-2}$. قرار دهید $x_0 = 0.5$.

حل: داریم $x = \cos x$ لذا قرار می‌دهیم $g(x) = \cos x$، برای $x \in [0, 1]$ نشان می‌دهیم $g(x) \in [0, 1]$:

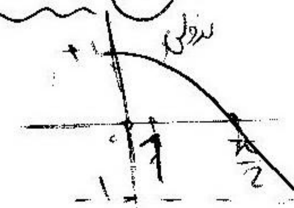
$$0 \leq x \leq 1$$

چون تابع کسینوس بر $[0, 1]$ تابعی نزولی است، پس

$$\cos 1 \leq \cos x \leq \cos 0$$

$$0.5403 \leq \cos x \leq 1$$

نزولی



...ی داریم $g'(x) = -\sin x$ و بایستی نشان دهیم $|g'(x)| = |\sin x| < 1$ برای $x \in$ ... چون تابع سینوس روی $[0, 1]$ تابعی صعودی است، پس برای $0 \leq x \leq 1$ خواهیم

$$\sin 0 \leq \sin x \leq \sin 1$$

$$0 \leq \sin x \leq 0.8415 < 1$$

...این $|g'(x)| < 1$ در نتیجه $g(x)$ مناسب است. برای $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = \cos x_n$ داریم :

$$x_1 = 0.5403$$

$$x_2 = 0.8576$$

$$x_3 = 0.6543$$

$$x_4 = 0.7935$$

$$x_5 = 0.7014$$

$$x_6 = 0.7640$$

$$x_7 = 0.7221$$

$$x_8 = 0.7504$$

$$x_9 = 0.7314$$

$$x_{10} = 0.7442, \qquad f(x_{10}) = 0.0086$$

چون $|f(x_{10})| < 10^{-2}$ لذا $(3D)$ $\quad \alpha \simeq 0.744$

توجه. گاهی به جای بیان اینکه " تقریب ریشه را طوری به دست آورید که $|f(x_n)| \leq \epsilon$ " می‌گویند " ریشه را با تقریب ϵ به دست آورید ".

$|f(x_n)| \leq \epsilon$

مجموعه مسائل فصل دوم

۱- تقریبی از ریشه معادلات زیر را به روش دو بخشی حساب کنید، به طوری که $|f(x_n)| < \epsilon$ (a، b و ϵ داده شده‌اند) تقریب‌ها را با $4D$ به دست آورید.

الف. $x - \cos x = 0 \quad , a = 0 \quad , b = 1 \quad , \epsilon = 10^{-3}$

ب. $x^2 - 3 = 0 \quad , a = 1 \quad , b = 2 \quad , \epsilon = 10^{-3}$

پ. $x^3 + x - 1 = 0 \quad , a = 0 \quad , b = 1 \quad , \epsilon = 10^{-2}$

جواب.

الف. $x_{10} = 0.73927 \quad , \alpha \simeq 0.7393$

ب. $x_{11} = 1.73195 \quad , \alpha \simeq 1.7320$

پ. $x_7 = 0.61719 \quad , \alpha \simeq 0.6172$

۲- به روش دو بخشی تقریبی از ریشه معادلات زیر را با تقریب ϵ به دست آورید، نتایج را با $4D$ به دست آورید. (a، b و ϵ داده شده‌اند)

الف. $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0 \quad , a = 1 \quad , b = 3 \quad , \epsilon = 0.003$

ب. $x \sin x - 1 = 0 \quad , a = 1 \quad , b = 1.5 \quad , \epsilon = 0.03$

پ. $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \quad , a = 1 \quad , b = 2 \quad , \epsilon = 0.004$

جواب.

الف. $x_8 = 1.89844 \quad , \alpha \simeq 1.8984$

ب. $x_2 = 1.12500 \quad , \alpha \simeq 1.125$

پ. $x_9 = 1.36523 \quad , \alpha \simeq 1.3652$

۳- با روش نابجایی معادلات زیر را با تقریب ϵ با $4D$ به دست آورید.(a، b و ϵ داده شده‌اند)

الف. $2\sin x + x - 2 = 0 \quad , a = 0.6 \quad , b = 0.8 \quad \epsilon = 10^{-4}$

ب. $3\sin x - x - \dfrac{1}{x} = 0 \quad , a = 0.7 \quad , b = 0.9 \quad \epsilon = 5 \times 10^{-5}$

پ. $x + \cos x = 0 \quad , a = -0.75 \quad , b = -0.73 \ , \epsilon = 3 \times 10^{-5}$

جواب.

$\alpha \simeq 0.7046$ ب. $\alpha \simeq 0.7631$ پ. $\alpha \simeq -0.7391$

ریشه معادله $f(x) = x - 0.2\sin x - 0.5$ را که در فاصله $[0.5, 1]$ قرار دارد به نیوتن به دست آورید.

ب. $x_3 = 0.61546816$

به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $e^{-x} = \sin x$ را که در فاصله $(0, 1.2)$ قرار دارد با ۷ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$.(قرار دهید $x_0 = 0.6$)

اب. $x_3 = 0.58853274$ و $\alpha \simeq 0.5885327$

به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $x^2 - 3 = 0$ را که در فاصله $[1, 2]$ قرار دارد با $3D$ به ست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-3}$.(قرار دهید $x_0 = 2$)

اب. $x_3 = 1.7321$ و $\alpha \simeq 1.732$

به روش وتری تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$ را که در فاصله $(1, $) قرار دارد با تقریب 0.002 و با $3D$ به دست آورید.(قرار دهید $x_0 = 1$ و $x_1 = 1.5$)

$\epsilon \Rightarrow |f(x_n)| < 10^{-3}$

واب. $\alpha \simeq 1.198$

با استفاده از روش نیوتن کوچکترین ریشه معادله $\tan x = x$ را با تقریب 0.0001 پیدا کنید.(ن ریشه در فاصله $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ قرار دارد.) قرار دهید $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ و ریشه را با $5D$ به دست آورید.

اهنمایی. معادله را به صورت $f(x) = \sin x - x\cos x = 0$ باز نویسی کنید.

جواب. $\alpha \simeq 4.49341$

۹- با روش تکرار ساده تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x) = x - \sin x - 0.25 = 0$ را که در فاصله $(1.1, 1.3)$ قرار دارد به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < 10^{-3}$ (جواب را با $3D$ به دست آورید.)

جواب. برای $g(x) = \sin x + 0.25$ و $x_0 = 1.2$ داریم $\alpha \simeq 1.171$

۱۰- معادله $f(x) = x^2e^x - 1 = 0$ ریشه‌ای در $[0, 1]$ دارد. برای تعیین تقریبی از این ریشه به روش تکرار ساده $g(x)$ مناسب ارائه دهید و با فرض $x_0 = 0{,}7$ تقریبی از ریشه چنان حساب کنید که داشته باشیم $|f(x_n)| < 0{,}00001$. (جواب با $4D$)

جواب. $g(x) = \sqrt{e^{-x}}$ و $\alpha \simeq 0{,}7035$

۱۱- معادلهٔ $f(x) = e^x - 4x^2 = 0$ دارای ریشه‌ای در فاصلهٔ $[0, 1]$ است. با قرار دادن $x = \frac{1}{2}e^{x/2}$ و انتخاب $x_0 = 0$ این ریشه را با تقریب $0{,}001$ حساب کنید. (جواب با $4D$)

جواب. $x_8 = 0{,}71466$ و $\alpha \simeq 0{,}7147$