# دنباله عددی و سری عددی (۳)

در جلسهٔ قبل اشاره داشتیم به اینکه سری‌های اعداد حقیقی غیر منفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و آزمون‌های همگرایی که مطرح کردیم مربوط به سری‌های اعداد غیرمنفی بودند. دلیل اهمیت سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی قضیهٔ زیر است:

**(۸ـ۱) قضیه.** فرض کنید $(z_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد مختلط باشد. اگر $\sum_{n=k}^{\infty}|z_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$ نیز همگراست.

بدین ترتیب اگر بتوانیم به کمک یکی از آزمون‌های جلسهٔ قبل همگرایی سری قدرمطلق‌های جملات یک سری را به اثبات برسانیم، همگرایی سری اولیه نتیجه می‌شود. اگر برای سری $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$، سری قدرمطلق‌ها، یعنی $\sum_{n=k}^{\infty}|z_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty}z_n$ را همگرای مطلق می‌نامند. پس طبق قضیهٔ بالا، همگرایی مطلق، همگرایی را نتیجه می‌دهد. برای اثبات قضیهٔ بالا نخست به یک نکتهٔ کلی اشاره می‌کنیم.

**(۸ـ۲) گزاره.** فرض کنید $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد مختلط باشد، $c_n=a_n+ib_n$، و $c=a+ib$ یک عدد مختلط. در این صورت $c_n\longrightarrow c$ اگر و تنها اگر $a_n\longrightarrow a$ و $b_n\longrightarrow b$.

**اثبات.** داریم

$$|a_n-a|,|b_n-b|\leq|c_n-c| \qquad (۱)$$

و

$$|c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \tag{۲}$$

نامساوی اولی بیان این مطلب است که در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قأمه کوچکتر از وتر است، و نامساوی دوم بیان این مطلب که طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است (شکل ۱).

فرض کنید $c_n \longrightarrow c$، پس برای هر $e > 0$، $N$ وجود دارد که $|c_n - c| < e$ برای هر $n > N$. بنابراین از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که $|a_n - a| < e$ و $|b_n - b| < e$ وقتی $n > N$. پس $c_n \longrightarrow c$ نتیجه می‌دهد $a_n \longrightarrow a$ و $b_n \longrightarrow b$. بالعکس فرض کنید $a_n \longrightarrow a$ و $b_n \longrightarrow b$. برای $e$ داده شده، $N_1$ و $N_2$ وجود دارند که:

$$n > N_1 : \quad |a_n - a| < \tfrac{e}{2}$$

$$n > N_2 : \quad |b_n - b| < \tfrac{e}{2}$$

با قرار دادن $N = \max\{N_1, N_2\}$ می‌بینیم که اگر $n > N$، آنگاه طبق نامساوی (۲) داریم $|c_n - c| < e$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

به زبان هندسی، گزارهٔ ۸—۲ حکم می‌کند که شرطی لازم و کافی برای $c_n \longrightarrow c$ این است که مؤلفهٔ افقی (قسمت حقیقی) $c_n$ به مؤلفهٔ افقی (قسمت حقیقی) $c$ میل کند و مؤلفهٔ قائم (قسمت موهومی) $c_n$ به مؤلفهٔ قائم (قسمت موهومی) $c$.

حال قضیهٔ ۸—۱ را در حالتی که $c_n$ ها حقیقی باشند در نظر بگیرید. پس دنباله‌ای از اعداد حقیقی $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ داریم که $\sum_{n=k}^{\infty} |c_n|$ همگراست. می‌نویسیم:

$$c_n = (c_n + |c_n|) + (-|c_n|)$$

چون $\sum |c_n|$ همگرا فرض شده است، اگر همه جملات در عدد ثابت $(-1)$ ضرب شوند، نتیجه می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(-|c_n|)$ همگراست. پس اگر ثابت شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(c_n + |c_n|)$ نیز همگراست،آنگاه مجموع جمله به جملهٔ دو سری همگرای فوق، همگرا خواهد شد. ولی داریم

$$0 \leq c_n + |c_n| \leq 2|c_n|$$

و $\sum_{n=k}^{\infty}(۲|c_n|)$ همگراست، پس طبق آزمون مقایسهٔ جلسهٔ قبل، ۷—۵، سری $\sum_{n=k}^{\infty}(c_n + |c_n|)$ همگراست.

اکنون قضیهٔ ۸—۱ را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. فرض کنید $c_n = a_n + ib_n$، پس $|a_n| \le |c_n|$ و $|b_n| \le |c_n|$. اگر $\sum |c_n|$ همگرا باشد، طبق آزمون مقایسه، $\sum |a_n|$ و $\sum |b_n|$ همگرا خواهند شد. ولی $a_n$ و $b_n$ اعداد حقیقی هستند، پس طبق بحث بالا $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نیز همگرا می‌شوند. بنابراین طبق گزارهٔ ۸—۲، $\sum c_n$ که در آن $c_n = a_n + ib_n$ نیز همگراست و اثبات ۸—۱ به انجام می‌رسد.

**(۸—۳) چند مثال.**

**(۸—۳—۱)** همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n+i)^۲}$ را بررسی می‌کنیم. داریم $|n+i| = \sqrt{n^۲+۱} > n$، پس $|\frac{۱}{(n+i)^۲}| < \frac{۱}{n^۲}$ و در مقایسه با سری $p$، به‌ازای $p=۲$، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{|n+i|^۲}$ همگراست، در نتیجه $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n+i)^۲}$ همگراست.

همگرایی مطلق شرطی کافی برای همگرایی است ولی یک شرط لازم نیست. مثلاً با آن که سری هارمونیک $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست، اگر جملات را یکی در میان منفی کنیم، سری حاصل، یعنی:

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + - \cdots$$

همگراست. در واقع آزمون کلی زیر برقرار است:

**(۸—۴) آزمون سری متناوب لایب‌نیتس.** فرض کنید $(a_n)_{n=۱}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد حقیقی نامنفی باشد که:

$$a_۱ \ge a_۲ \ge a_۳ \ge \cdots$$

و $a_n \longrightarrow ۰$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$. در این صورت سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}a_n$ همگراست.

**اثبات.** به دنبالهٔ مجموع‌های جزیی این سری نگاه می‌کنیم:

$$S_۱ = a_۱, S_۲ = a_۱ - a_۲, S_۳ = a_۱ - a_۲ + a_۳, \ldots$$

مجموع‌های جزیی با اندیس فرد، یعنی $S_۱, S_۳, S_۵, \ldots$ را در نظر بگیرید. چون $a_{۲n} \geq a_{۲n+۱}$، داریم:

$$S_{۲n+۱} = S_{۲n-۱} - a_{۲n} + a_{۲n+۱} \leq S_{۲n-۱}$$

پس

$$\cdots \leq S_۵ \leq S_۳ \leq S_۱$$

همین طور چون $a_{۲n+۱} \geq a_{۲n+۲}$، برای مجموع‌های جزیی زوج داریم $S_{۲n+۲} = S_{۲n} + a_{۲n+۱} - a_{۲n+۲} \geq S_{۲n}$، پس:

$$\cdots \geq S_۶ \geq S_۴ \geq S_۲$$

توجه کنید که $a_۱$ یک کران بالایی برای دنباله مجموعهای جزیی زوج است زیرا که $a_i \geq a_{i+۱}$، پس:

$$\begin{aligned} S_{۲n} &= a_۱ - a_۲ + - = \cdots - a_{۲n} \\ &= a_۱ - (a_۲ - a_۳) - \cdots - (a_{۲n-۲} - a_{۲n-۱}) - a_{۲n} \\ &\leq a_۱ \end{aligned}$$

بنابراین دنبالهٔ مجموع‌های جزیی با اندیس زوج به کوچکترین کران بالایی خود، مثلاً $S$ میل می‌کند. نشان می‌دهیم کل دنبالهٔ مجموع‌های جزیی، $(S_n)_{n=۱}^{\infty}$، به $S$ میل می‌کند. فرض کنید $e > ۰$ داده شده است. از آنجا که $S_{۲n} \longrightarrow S$، $N_۱$ وجود دارد که:

$$n > N_۱ : \quad |S_{۲n} - S| < \frac{e}{۲}$$

از طرفی دیگر، فرض کرده‌ایم $a_n \longrightarrow ۰$، پس $N_۲$ وجود دارد که:

$$n > N_۲ : \quad |a_n| < \frac{e}{۲}$$

حال اگر قرار دهیم $N = ۲ \max\{N_۱, N_۲\}$، اگر $n = ۲k > N$ داریم $k > N_۱$، پس $|S_n - S| < \frac{e}{۲} < e$ و اگر $n = ۲k - ۱ > N$، آنگاه $۲k > N_۲$ و:

$$\begin{aligned} |S_{۲k-۱} - S| &\leq |S_{۲k-۱} - S_{۲k}| + |S_{۲k} - S| \\ &= |a_{۲k}| + |S_{۲k} - S| \\ &< \tfrac{e}{۲} + \tfrac{e}{۲} = e \end{aligned}$$

پس $S_n \longrightarrow S$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

در واقع ایدهٔ اثبات فوق بسیار ساده و جالب توجه است. از آنجا که جملات سری متناوباً تغییر علامت می‌دهند و قدرمطلق جملات نوعاً کوچکتر می‌شوند (به هر حال هیچ‌گاه بزرگتر نمی‌شوند)، دنبالهٔ $S_n$ روی محور حقیقی متناوباً به چپ و راست می‌جهد در حالی که دامنهٔ جهش آن رو به تنازل به صفر است ($a_n \longrightarrow ۰$). به این ترتیب $S_{۲n}$ ها از طرف چپ و $S_{۲n+۱}$ ها از طرف راست به سوی نقطه‌ای روی محور حقیقی تجمع می‌کنند (شکل ۲).

با توجه به این گزاره، سری‌های زیر همگرا هستند:

$$۱ - \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۱}{۳} - \tfrac{۱}{۴} + - \cdots$$
$$۱ - \tfrac{۱}{۳} + \tfrac{۱}{۵} - \tfrac{۱}{۷} + - \cdots$$

در آینده مجموع این دو سری خاص را محاسبه خواهیم کرد.

در این مقطع لازم است نکته‌ای در مورد به‌کارگیری نماد $\sum$ به عنوان حد سری گوشزد کنیم. $\sum$ معمولاً به معنای "مجموع" به‌کار می‌رود، مثلاً $\sum_{i=۱}^{n} a_i = a_۱ + \cdots + a_n$. از آنجا که $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$ به معنای انباشتن متوالی ولی تمام نشدنی $a_i$ هاست، نماد $\sum$ بی‌مورد نیست ولی نباید پنداشت که این "مجموع نامتناهی" لزوماً خواص جمع معمولی را دارد. دیدیم که اگر هر جملهٔ یک سری را در عدد ثابت $c$ ضرب کنیم، حد سری نیز در همان عدد ضرب خواهد شد (تعمیم قانون بخشی)، و نیز اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند، $\sum(a_n + b_n)$ نیز همگراست و به مجموع $\sum a_n$ و $\sum b_n$ میل می‌کند. این نوعی قانون جابجایی (تعویض‌پذیری) عمل جمع به بی‌نهایت عامل جمع است ولی اگر سری‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ خود همگرا نباشند، سری مجموع جملات متناظر، یعنی $\sum(a_n + b_n)$ می‌تواند رفتار غیرمنتظره‌ای داشته باشد. در واقع ثابت می‌شود که اگر $\sum a_n$ یک سری همگرا باشد که همگرای مطلق نباشد، می‌توان با جابه‌جا کردن عوامل جمع، حد مجموع را به هر عدد دلخواه میل داد! روش کار را با مثال سری زیر نشان می‌دهیم. همین نوع استدلال در حالت کلی کار می‌کند. سری

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + - \cdots \qquad (۳)$$

را در نظر بگیرید. این در واقع مجموع دو سری غیر همگراست که جملهٔ نمونهٔ هر یک به صفر میل می‌کند. یکی از این سری‌ها، سری جملات با مخرج زوج است:

$$-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}-\cdots$$

این سری با ضرب کردن جملات سری هارمونیک در $(-\frac{۱}{۲})$ پدید آمده است پس لزوماً واگراست (و گرنه با ضرب کردن جملات در $-۲$، سری هارمونیک همگرا می‌شود). از طرفی دیگر چون $\frac{۱}{۲} < ۱$، $\frac{۱}{۴} < \frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۶} < \frac{۱}{۵}$، ... ، سری جملات با مخرج فرد نیز واگراست. حد سری (۳) قطعاً از ۱ کوچکتر است زیرا با نوشتن سری به صورت زیر:

$$۱+(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳})+(-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵})+(-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷})+\cdots$$

چون مجموع داخل هر پرانتز منفی است، هر بار عددی از مجموع قبلی کم می‌شود. با این حال نشان می‌دهیم با جابجایی مناسب می‌توان مجموع سری را به مثلاً عدد ۲ میل داد. برای این کار نخست جملات فرد $۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\cdots$ را تا جایی جمع می‌کنیم که از ۲ بیشتر شود. جدول زیر که از محاسبه با ماشین حساب حاصل شده است نشان می‌دهد باید تا $\frac{۱}{۱۵}$ جلو رفت:

$$\begin{array}{rcl}
۱ & < & ۲ \\
۱+\frac{۱}{۳} & \simeq & ۱/۳۳۳۳ < ۲ \\
۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵} & \simeq & ۱/۵۳۳۳ < ۲ \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۳} & \simeq & ۱/۹۵۵۱ < ۲ \\
۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۵} & \simeq & ۲/۰۲۱۸ > ۲
\end{array}$$

حال جملات زوج (منفی) را از مجموع محاسبه شده کم می‌کنیم تا مجموع کوچکتر از ۲ شود. در واقع در اینجا افزودن $-\frac{۱}{۲}$ کافی است:

$$(۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۵})-\frac{۱}{۲}\simeq ۱/۵۲۱۸$$

مجدداً جملات فرد (مثبت) را به ترتیب می‌افزاییم تا مجموع از ۲ تجاوز کند. محاسبه با ماشین حساب می‌دهد:

$$(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{41}) \simeq 2/0041 > 2$$

اکنون از جملات زوج استفاده می‌کنیم تا مجموع از ۲ کوچکتر شود:

$$(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{41}) - \frac{1}{4} \simeq 1/7541$$

با ادامه دادن این فرایند می‌بینیم که میزان انحراف از ۲ تدریجاً کوچکتر می‌شود زیرا که $\frac{1}{n}$ به تدریج کوچکتر می‌شود. روشن است که به جای ۲ می‌توان با این روش مجموع را به هر عددی میل داد.

قضیه‌ای جالب حکم می‌کند که این پدیده برای سری‌های همگرای مطلق رخ نمی‌دهد، یعنی اگر یک سری همگرای مطلق باشد، هیچ‌گونه جابجایی در جملات اثری بر حد سری نخواهد داشت. نکته تمایز از وضعیت بالا این است که در بالا به سبب واگرایی $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ قادر بودیم با افزودن جملات، مجموع را به ۲ برسانیم ولی در مورد سری‌های همگرای مطلق، هیچ زیردنباله‌ای از سری، واگرا نخواهد شد و قادر نخواهیم بود نوسان‌های مورد نیاز را ایجاد کنیم.