بسم الله الرحمن الرحیم

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: اقتصادي رياضي

څانګه: محاسبه

مولف: عبدالعزیز جلیلی

ژباړن: عزت الله څواب

د ښار کمېټه:

- محمد آصف ننګ د تخنیکي او مسلکي زده کړو معین
- دیپلوم انجنیر عبدالله کوزابي د تعلیمي نصاب رییس
- محمد اشرف وحدت په تعلیمي نصاب کې د معینیت د مقام سلاکار

د تصحیح کمېټه:

- محب الرحمن محب
- عبدالجمیل ممتاز
- احمد فهیم سپین غر

د ګرافیک او ډیزاین څانګې مسئول : محمد جان علیرضایي

ګرافیک او ډیزاین: محمد سلیم خان

چاپ کال: ۱۳۹۲ لمریز کال

تیراژ: ۳۰۰۰

چاپ ځل: لومړی

وېب پاڼه: www.dmtvet.gov.af

برېښنالیک: info@dmtvet.gov.af

ISBN کډ: ۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۵۳۸

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ور سره عرب، ګوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

د پوهنې وزير پيغام

ګرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د يوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغې ټولنې د پياوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زيار پورې تړلې دي. همدا بشري قوه او کاري متې دي چې د هيواد انکشافي اهدافو ته د رسيدو لارې چارې طی کوي او د يوه نيکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمينوي.

انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د يوه سوکاله ژوند د اسبابو او ايجاباتو د تکميل لپاره خپل اغيزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځايه ده چې د يوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپيريال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هيڅ حالت کې نه نفی کيږي او نه هم منقطع کيږي.

په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت مسووليت او مکلفيت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانينو ته په ژمنتيا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چابکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپيڅلي هدف ته د رسيدو په خاطر د انساني ظرفيت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنيکي کادرونو روزنه او پراختيا يو اړين مقصد دی. همدا په تخنيکي او مسلکي زده کړو مزين تنکي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سيستماتيک ډول د هيواد انکشاف محقق او ميسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تګ لاره، دولتداري او ټولنيز نظام د اسلام له سپيڅلو احکامو څخه الهام اخيستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي بايد په علمي معيارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړيتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفيت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربيت او په سوچه اسلامي روحيې د هغوی پالنه نه يوازې پخپل ذات کې يوه اساسي وجيبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه يې وژغوري او د نورو له سياسي او اقتصادي احتياج څخه يې آزاد کړي.

زموږ ګران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربيون بايد په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نيکمرغه افغانستان ارمان، يوازې او يوازې د دوی په پياوړو متو، ويښ احساس او نه ستړي کيدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنيکي زده کړو له امله کيدای شي په ډيرو برخو کې د افغانستان انکشافي اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو ليکوالانو، مولفينو، ژباړونکو، سموونکو او تدقيق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهير کې د ټولو کورنيو او بهرنيو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومي منّنه کوم. له درنو او پياوړو استادانو څخه رجامندانه هيله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدريس او فعاله تدريب سره دې د زړه په ټول خلوص، صميمي هڅو او وجداني پيکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي. د نيکمرغه، مرفه، پرمختللي او وياړمن افغانستان په هيله

فاروق وردګ
د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

لړلیک

سریزه

په پیل کې هڅه شوې ده، چې د ځینو اصطلاحاتو او مفاهیمو په توضیح کولو سره لوستونکي د ریاضي له ژبې سره اشنا کړو او دوی د هغو مفاهیمو یو ټولیز تصویر له ځان سره ولري، چې اړتیا ورته لري.

دا کتاب د انستیټیوټ د لومړي کال د موضوعاتو په سویه ساده مثالونه لري، چې د توابعو په ګرافونو، معادلاتو، د معادلو په سیستم، مټرکسونو، دیټرمنانتونو، لوګارتم، سلسلو، لمټونو، مشتقاتو، د مشتق د کارولو او ورسره د تابع د تحولاتو او د صنعت او اقتصاد لپاره لارښوونې لري.

دا موضوعات په ساده عامو جملو کې له بېلګو سره یو ځای توضیح شوي.

له دې هرې موضوع نه یو ځانګړی کتاب جوړېږي؛ خو دلته هڅه شوې ده، چې په شنلي او لنډ ډول د ډېرو ساده او روښانه مثالونو پر مټ توضیح شي.

د دې مثالونو په زده کړې سره محصلین کولی شي، چې کم تر کمه د دې کتاب موضوعات زده او درک کړي.

سربېره پر دې د دې موضوعاتو په زده کولو سره محصل نه یواځې دا چې کولای شي د خپلې مسلکي ریاضیکي ساحې ستونزې حل کړي، بلکې له دې ور هاخوا کولای شي، چې د پرمختللیو ریاضیاتو لپاره تیاری و نیسي.

دا کتاب د محاسبې په څانګو کې د تدریس وړ دی، د دې کتاب د لیکلو اصلي انګېزه د مفرداتو د راټولولو، د ادارې او د محصلینو د غوښتنو او د مسلکي معینیت د تعلیمي نصاب د پراختیا د محترم ریاست هڅه او لارښوونه وه.

د دې کتاب په تدوین کې د معاصرو لویو ریاضي پوهانو له تألیفاتو او د اقتصادي مدیریت او حسابدارۍ د څانګو له ریاضیکي درسونو نه ګټه اخستیل شوې ده. دا کتابونه به له نیمګړتیاوو خالي نه وي؛ خو هیله ده محصلین، څېړونکي او د نظر خاوندان په خپلو ارزښتمنو نظرونو او منطقي وړاندیزونو د دې کتاب په سمون او بشپړتیا کې له لیکوال سره همکاري وکړي.

په درنښت

عبدالعزیز جلیلي

ټولیزه موخه:

د محاسبې په چاروکې د لازمو او د اړتیا وړ مهارتونو لاسته راوړل، د اقتصادي ریاضي د اصولو، اصطلاحاتو او قواعدو سره سم د ریاضي د مسایلو حل او په تولید، صنعت، احصایې او نورو برخو کې د دې کارول او ورسره د انسانانو ورځنی تکامل او پرمختګ او د ژوند په چارو کې له اقتصادي ریاضي نه ګټه اخیستل.

لومړی څپرکی

د رياضي ځینې مفاهیم او اصطلاحات

ټولیزه موخه

د رياضي د اصطلاحاتو بیانول، تحلیل او کارونه

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین د لاندېنیو موضوعاتو په اړه معلومات لاسته راوړي:

- له قواعدو، اصولو او اصطلاحاتو څخه په سمه توګه ګټه اخیستنه او د هغو توضیح.
- د مسایلو په بیان او حل کې د قواعدو، اصولو او اصطلاحاتو کارونه او ورسره د اقتصادي رياضي د مسایلو هوارول.
- د مفاهیمو او اصطلاحاتو په اړه د اقتصادي رياضي د موضوعاتو او قضیو تجزیه او تحلیل.

Exponentتوان یا (طاقت)

هر کله چې یو الجبري حد څو ځلې په خپل ځان کې ضرب شي، کولای شو هغه داسې ولیکو:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a..........\cdot a}_{n}=a^{n}$$

په دې صورت کې a ته قاعده (Base) او n ته توان یا طاقت ویل کېږي.

طاقت په الجبر کې د قوانینو لرونکی دی.

د طاقت لرونکو عددونو قوانین

۱- د ضرب قانون: که چېرې قاعدې مساوي وي، له قاعدو څخه د یوې قاعدې په نظر

کې نیولو سره توانونه جمع کېږي. مثلاً:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$1-a^2 = a\cdot a \qquad a^3 = a\cdot a\cdot a$$

$$a^2\cdot a^3 = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^{2+3} = a^5$$

$$2-x^4\cdot x^3 = x^{4+3} = x^7 \qquad 3-(-x)^2\cdot(-x)^5 = (-x)^{-2+5} = (-x)^3$$

$$3-x^{2m+3}\cdot x^{-m-5} = x^{m-2}$$

که چېرې قاعدې مختلفې او توانونه مساوي وي، په دې صورت کې قاعدې ضربېږي او له توانونو څخه یو نیول کېږي. مثلاً:

$$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$$

$$1-(3xP)^5\cdot(2aPx)^5 = (6aPx)^5$$

$$2-(2xy)^{m+3}\cdot(-2x^2aP)^{m+3} = (-4x^3aPy)^{m+3}$$

که چېرې یو توان په سر بل توان ولري، په دې صورت کې له لاندې رابطې څخه کار اخسیتل کېږي:

$$(a^n)^m = a^{nm} \to (x^2)^3 = x^2\cdot x^2\cdot x^2 = x^6$$

$$(x^2)^3 = x^6$$

$$((x^{-2})^3)^2 = x^{-2\cdot3\cdot2} = x^{-12}$$

2- د تقسیم قانون: که چېرې قاعدې مساوي وې له قاعدو څخه یوه قاعده په نظر کې نیول کېږي او د صورت له توان څخه د مخرج توان منفي کوو:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

مثال:

$$1-\frac{a^5}{a^3} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = a\cdot a = a^2$$

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

که چېرې په پورته رابطه کې توانونه مساوي وي لاندې نتیجه په لاس راځي.

$$\frac{a^n}{b^n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \to \left(\frac{a^n}{a^n}\right) = \left(\frac{a}{a}\right)^0 = 1$$

که د تقسیم په قانون کې قاعدې مختلفې او توانونه مساوي وي کولای شو ولیکو:

يعنې قاعدې تقسيمېږي او پر يوه توان ليکل کېږي.

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

مثال:

$$\frac{(6x^3p^2)^4}{(3x^2p)^4}=\left(\frac{(6x^3p^2)}{(3x^2p)}\right)^4=(2xp)^4$$

له پورته رابطې څخه لاندې رابطه پيداکولای شو.

$$a^{-1}\cdot a^1=1\rightarrow a^{-1}=\frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

مثالونه:

$$1-(mx)^{-5}\div(mx)^{-3}=(mx)^{-5+3}=(mx)^{-2}=\frac{1}{(mx)^2}$$

$$2-\left(\frac{1}{n}\right)^{-3/2}\div(n-1)^{-3/2}=\frac{\left(1/3\right)^{-3/2}}{(n-1)^{-3/2}}=\left(\frac{1}{n}\right)^{-3/2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}$$

$$=\left(\frac{1}{n}\right)^{-3/2+3/2}=\left(\frac{1}{n}\right)^{0}=1$$

فکتوريل، د فکتوريل مفهوم او د فکتوريل د استعمال ځای

د طبيعي عددونو سيټ په نظر کې نيسو: $N=\{1-2-3-4-5-6-7-8-9........\}$

يو په بل کې د دې ټولو عددونو د ضرب حاصل فکتوريل نومېږي او په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$1\cdot2\cdot3\cdot4............n=n!$$

د $n!$ دا رنګه ښودنې ته د n فکتوريل ويل کېږي، کولای شو $n!$ په لاندې ډول هم وړاندې کړو.

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)......3\cdot 2\cdot 1$$
$$n! = n(n-1)! \Rightarrow (n-1)! = \frac{n!}{n}$$
$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

که چېرې $n=1$ قېمت واخلې په نتیجه کې صفر فکتوریل دی.

$$0! = 1$$

مثالونه:

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$
$$(n-3)! = (n-3)(n-4)(n-5)....3\cdot 2\cdot 1$$
$$(n+1)! = (n+1)n!$$

فکتوریل په ترکیبي انالیز کې د کارونې زیات ځایونه لري، همدارنګه د ضریب د لاسته راوړلو لپاره د بینوم حدونو انکشافي شکل $(a+b)^n$ کېدای شي د ګټې اخستنې وړ وي.

۱ - د پارټیشن په عملیه کې بدلون (permutation)، چې د شیانو، اعدادو، حروفو او کلماتو مخې ته ځای پرځای کول دي، د مثال په ډول:

د a توری یواځې یو بدلون لري a

د a,b دوو بدلونونو لرونکي دي ab , ba

د a,b,c شپږو بدلونونو لرونکي دي abc bac cab acb bca cba

له پورتنیو رابطو څخه دا نتیجه په لاس راځي.

$1! = 1$ $\quad$ $2! = 1\cdot 2 = 2$

$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

ګورو چې د اجزاء په زیاتېدو د ډلو شمېر هم زیاتېږي، که اجزاء هرڅومره زیاتېږي د ډلو پېژندل ستونزمن کېږي؛ خو کولای شو، چې له فکتوریل څخه په ګټې اخستنې د هغو شمېر معلوم کړو، د مثال په ډول که m د اجزاء شمېر وي د ډلو شمېر به یې د $Pm = m!$ دي فورمول د اجزاوو د ځای پر ځای کولو له مخې ټاکل کېږي.

مثال: د یو څلور رقمي عدد 1,3,5,4 د ځای پر ځای کولو د رقمونو شمېر په کار دی، په دې ځای کې لکه څنګه چې ارقام څلور رقمي دي د پورته فورمول له مخې لرو:

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

۲ - په ترتیب (Arrangement) کې

$$\binom{n}{A_m} = \frac{m!}{(m-n!)}$$

۳ - په ترکیب کې

$$\left({}_{m}^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} \right.$$

په دوه حده انکشاف کې

$$(a+b)_n^n \in IN$$

$$(a+b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{na^{n-1}}{1!}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + \frac{n!}{n!}b^n$$

$$(a+b)^7 = \frac{a^7}{0!} + \frac{7ab}{1!} + \frac{6\cdot 7}{2!}a^5b^2 + \frac{5\cdot 6\cdot 7}{3!}a^4b^3 + \frac{4\cdot 5\cdot 7}{4!}a^3b^4 + \cdots + b^7$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

یادونه: باید وویل شي چې د ریاضي په یو شمېر موضوعاتو کې، چې فکتوریل کارول کېږي د ترکیبي انالیز موضوعات یادول د دې کتاب په بحث کې نه دي؛ بلکې د فکتوریل د کارونې ځایونه پکې شامل دي.

مثلاً:

$$e = \sum_{K=0}^{n} = \frac{1}{K!}$$

جذري الجبري افادې

که $n \in N$,$a, x \in R^+$ او $x^n = a$ وي؛ نو $x = \sqrt[n]{a}$ دی. لیدل کېږي، چې د دې رابطو په منځ کې منطقي تعادل موجود دی.

مثالونه

$$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$$

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

جذر

که الجبري افاده د کسري توان $a^{m/n}$ لرونکې وي، کولای شو هغه د الجبري جذر په شکل ولیکو

دعدد توان تر جذر لاندې a $\qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

د جذر توان n

مثالونه

$$(3x)^{2/3} = \sqrt[3]{(2x)^2}, (x+y)^{7/6} = \sqrt[6]{(x+y)^7} = \sqrt[6]{(x+y)^6}\cdot\sqrt[6]{(x+y)} = (x+y)^6\cdot\sqrt{x+y}$$

د جذرونو همدرجه کول

که جذري الجبري افادې د مختلفو جذري درجو لرونکې وي؛ د همدرجه کولو لپاره یې ترټولو کوچنی مشترک مضرب د جذرونو درجې ټاکو، په جذري درجه یې تقسیموو او نتیجه د افادې په طاقت کې تر جذر لاندې نیسو.

مثال

$$\sqrt[5]{a^2}, \sqrt[3]{b} = \sqrt[15]{a^6}, \sqrt[15]{b^5}$$

$$\sqrt[5]{3^2}, \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{3^6}, \sqrt[15]{3^5}$$

د جذرونو مقایسه

په هغه صورت کې چې جذر همدرجه وي، هغه جذر لوی دی چې مجذور یې لوی وي.

مثال

$$\sqrt{64}, \sqrt{25}$$

$$\sqrt{64} > \sqrt{25}$$

که د جذرونو درجې یو شان نه وي، اول یې همدرجه کوو او بیا یې مقایسه کوو.

مثال

$$\sqrt[5]{6}, \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[15]{6^3}, \sqrt[15]{4^5} \to \sqrt[15]{216}, \sqrt[15]{1064} \to \sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{4}$$

مثال

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{2} \to \sqrt[6]{3^2}, \sqrt[6]{2^2}$$

$$\sqrt[6]{9}, \sqrt[6]{4} \Rightarrow \sqrt{3} > \sqrt[3]{2}$$

د جذرونو فورمولونه

$$1) \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$2) \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$$

$$3) \sqrt[n]{a^n} = (a)^{n/n} = a$$

$$4) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$5) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$6) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

پر جذري الجبري افادو باندې اساسي عملیې

د هغو جذرونو ضرب، چې د یو شان جذري درجو درلودونکې وي:

$$1)\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^t}=\sqrt[n]{(a)^{m+t}}$$
$$2)\sqrt[3]{(3x)^3}\cdot\sqrt[3]{(2x)^2}=\sqrt[3]{(3x)^3\cdot(2x)^2}=\sqrt[3]{108x^5}$$
$$3)\left(-2\cdot\sqrt[4]{2x^2y^3}\right)\left(3\sqrt[4]{3x^3y^2}\right)=-6\cdot\sqrt[4]{6x^5y^5}=-6xy\sqrt[4]{6xy}$$

که چېرې جذري توانونه متفاوت وي، همدرجه کوو يې او بيا يې ضربوو .

مثال

$$1)\sqrt[3]{x^2y^4}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt[6]{(x^2y^4)^2}\cdot\sqrt[6]{(xy)^3}$$
$$=\sqrt[6]{(x^4y^8)\cdot\left(x^3y^3\right)}=\sqrt[6]{x^7y^{11}}=xy\cdot\sqrt[6]{xy^5}$$
$$2)\sqrt[5]{2x^3y^2}\cdot\sqrt{2xy}=\sqrt[11]{(2x^3y^2)^2}\cdot\sqrt[10]{(2xy)^5}$$
$$=\sqrt[10]{(4x^6y^4)(32x^5y^5)}=\sqrt[10]{(2^2x^6y^4)(2^5x^5y^5)}$$
$$=\sqrt[10]{(2^7x^{11}y^9)}=x\cdot\sqrt[10]{(2^7xy^9)}$$

د جذرونو د تقسيم عمليه

که چېرته جذري توانونه مساوي وي، تر همدغه جذري توان لاندې مجذورونه تقسيموو.

$$\frac{\sqrt[n]{x^p}}{\sqrt[n]{x^t}}=\sqrt[n]{x^{p-t}}$$

مثالونه

$$1)6\cdot\sqrt[4]{3}\div3\cdot\sqrt[4]{2}=2\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$
$$2)\sqrt[3]{m+n}\div\sqrt[3]{(m+n)^2}=\frac{\sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{(m+n)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{m+n}}$$

که چېرې جذرونه مختلفې درجې ولري:

$$1)\sqrt[3]{(ax)^5}\cdot\sqrt{ax}=?$$
$$=\sqrt[6]{((ax)^5)^2}\cdot\sqrt[6]{(ax)^3}=\sqrt[6]{(ax)^{10}\cdot(ax)^3}=\sqrt[6]{(ax)^{13}}=(ax)^2\cdot\sqrt[6]{ax}$$

تر جذرونو لاندې د افادو د عامل رفع او د هغو عکس

د امکان په صورت کې د جذر د درجې په نظر کې نيولو سره مجذور تجزيه کوو او له جذر نه يې خلاصوو.

$$1)\sqrt[3]{54x^5}=\sqrt[3]{27x^3\cdot2x^2}=\sqrt[3]{(3x)^3\cdot2x^2}=3x\sqrt[3]{2x^2}$$
$$2)\sqrt{54x^5}=\sqrt{9\cdot6x^4\cdot x}=\sqrt{3^2\left(x^2\right)^2\cdot6x}=3x^2\cdot\sqrt{6x}$$
$$3)\sqrt[3]{81x^9y^3}=\sqrt[3]{27\cdot3x^9\cdot y^3}=3x^2y\sqrt[3]{3}$$

د مجذور په توګه د غیر جذري افادې راوړل

په دې صورت کې د افادې توان د جذر د توان په اندازه پورته وړو: یعنې $a\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt{a^5b}$

مثالونه

$$1)2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{12}$$
$$2)y\cdot\sqrt[3]{2x}=\sqrt[3]{(2y)^3\cdot 2x}=\sqrt[3]{8xy^3}$$

د جذرونو د جمعې او تفریق عملیې

په جذري افادو د جمعې او تفریق عملیه هغه وخت ترسره کولای شو، چې جذرونه یو شان وي. جذرونو ته هغه وخت یو شان جذرونه وایو، چې جذري درجه یې له یو بل سره مساوي او تر جذر لاندې افادې له یو شان درجې او تورو تشکیل شوې وي.

مثلاً:

$$1)3\sqrt[5]{3a^2x}-\sqrt[5]{3a^2x}=(3-1)\sqrt[5]{3a^2x}=2\sqrt[5]{3a^2x}$$
$$2)\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(1+2)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

مرکب جذرونه

د یوه جذري عدد ترکیب له یوه غیر جذري عدد سره او یا هم د دوو یا څو غیر مشابه همدرجه جذرونو ترکیب ته مرکب جذرونه وایي.

مثلاً:

$$2-\sqrt{2},\sqrt{5}+3,\sqrt{x}+a,\sqrt{a}-\sqrt{b}$$
$$a\sqrt{x}+2y,-m+\sqrt{n},2\sqrt{c}-\sqrt{x}$$

۱- د مرکبو جذرونو د جمعې اوتفریق عملیه: پر مشابه جذرونو د جمعې او منفي عملیه کېدای شي؛ نو بناً په مرکبو جذرونو کې هم دا قاعده د تطبیق وړ ده.

$$1)A=3+2\sqrt{5}A+B=\{3+2\sqrt{2}+\left(-7+4\sqrt{5}\right)\}=-4+6\sqrt{5}$$
$$B=4\sqrt{5}-7$$

$$2)A-B=\frac{\begin{array}{c}3+2\sqrt{5}\\ \mp 7\pm\cdot\sqrt{5}\end{array}}{10-\sqrt{5}}$$

$$3)A=3x+4\sqrt{2y}$$
$$B=-3\sqrt{2y}+x$$

$$\mathrm{A+B}=\frac{\begin{array}{c}3x+4\sqrt{2y}\\ x-3\sqrt{2y}\end{array}}{4x+\sqrt{2y}}$$

$$A-B=\frac{\begin{array}{c}3x+4\sqrt{2y}\\ \pm x\mp 3\sqrt{2y}\end{array}}{2x+7\sqrt{2y}}$$

۲- د مرکبو جذرونو د ضرب عملیه: په مرکبو جذرونو کې د ضرب عملیه د الجبري پولینومونو د ضرب په څېر ده:

مثال:

$$1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=x-y$$

$$2)\left(x+\sqrt{y}\right)\left(2x-\sqrt{y}\right)=2x^2-x\sqrt{y}+2x\sqrt{y}-\sqrt{y^2}=2x^2-x\sqrt{y}+y$$

د جذرونو د ناطق کولو عملیه

په يوه جذر کې ناطق کول داسې يوه عمليه ده، چې که چېرې تر جذر لاندې افاده ضرب شي او له هغې څخه يوه غير جذري افاده لاسته راشي، په مرکبو جذرونو کې د ناطق کولو عامل د هغې مزدوج دی، هره جذري افاده په ځانګړي ډول د ناطق کولو عامل لري.

$$1)\sqrt[n]{x} \quad\rightarrow\quad \sqrt[n]{(x)^{n-1}}$$

$$2)\sqrt[3]{x} \quad\rightarrow\quad \sqrt[3]{x^2}$$

$$3)\sqrt[7]{m^3} \quad\rightarrow\quad \sqrt[7]{m^4}$$

$$4)\sqrt{P} \quad\rightarrow\quad \sqrt{P}$$

$$5)2x+\sqrt{y} \quad\rightarrow\quad 2x-\sqrt{y}$$

$$6)3x+\sqrt{2m} \quad\rightarrow\quad 3x-\sqrt{2m}$$

$$7)\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} \quad\rightarrow\quad \left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$$

$$8)\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y} \quad\rightarrow\quad \left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$$

۳- د مرکبو جذرونو د تقسيم عمليه: د مرکبو جذرونو د تقسيم په عمليه کې له ناطق سازۍ نه په ګټه اخيستو مخرج په غير جذري افاده بدلوو او بيا د تقسيم عمليه تر سره کوو.

مثالونه

$$1)\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$2)\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{(x-y)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}=\frac{(x-y)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{(x-y)}=$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$$

لومړي څپرکي پوښتنې

۱- د اعدادو په کرښه د $\sqrt{5}$ موقیعت وټاکئ؟

۲- له طاقت او جذر نه یې خلاص کړئ؟ $i^5, -i.i^3, i^8.i$

$\sqrt{i^4}, \sqrt[6]{-1}, \sqrt[4]{-16}$

۳- لاندې افادې جذري شکل ته راوړئ؟ $\left(x^2-1\right)^{1/2}, \left(2xy^3\right)^{1/2}$

٤- لاندې افادې د طاقت په شکل ولیکئ؟ $\sqrt[14]{(x+a^2)^7}, \sqrt[4]{(3xy)^6}$

۵- همدرجه یې کړئ؟ $\sqrt[6]{2n}, \sqrt[3]{9n}, \sqrt[5]{y^2+1}, \sqrt[15]{y^2+1}$

٦- مقایسه یې کړئ؟ $\sqrt[7]{6}, \sqrt[6]{5}, \sqrt[5]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{x^2}, \sqrt[5]{x}$

۷- لاندې افادې ساده کړئ؟ $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[2]{\sqrt{(x+y)^{32}}}}}, \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{(5x)^{24}}}}$

۸- تقسیم یې کړئ؟ $\sqrt{15ab^2} \div \sqrt[3]{3a^2b}, \sqrt[7]{8x^3} \div 2\sqrt[5]{x^2}$

۹- ضرب یې کړئ؟ $\sqrt[3]{3x^2}, \sqrt{9x}, \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x} = ?$

۱۰- ممکنه عاملونه له جذر نه رفع کړئ؟ $\frac{2}{3}\sqrt{50ab^5}, \frac{1}{3}\sqrt{27x^3y^2}$

دویم څپرکی

معادلې او توابع

ټولیزه موخه

د معادلو، توابع او د هغو د ډولونو په مفهوم پوهېدنه او د توابعو ګراف او په اقتصادي مسایلو کې د هغو کارونه

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین په لاندې برخو کې معلومات ترلاسه کړي:

- د رابطې او تابع مفهوم او د هغو د تحولاتو د ساحې پېژندنه.
- د یو شمېر کاري توابعو او د هغو پېژندل، چې د مربوطه ساحې په منځ کې په کارېږي.
- د ګرافونو رسمولو لپاره له توابعو څخه کار اخیستل او په اقتصادي ډګرونو کې د کمي او کیفي بدلونونو ښودنه.
- د یوې اقتصادي پروژې د اقتصادي رشد په مسایلو کې له توابع نه ګټه اخیستنه.

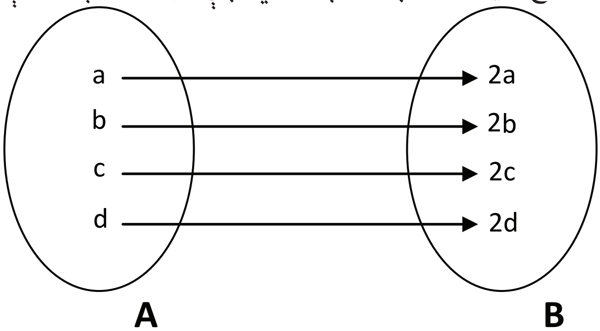
رابطه او تابع

د رابطې مفهوم: په ټولنیز ژوند کې د انسانانو تر منځ بېلابېلې اړیکې شتون لري لکه : محمود د احمد ورور دی، کریم د محمود پلار دی.

وکیل د محمود ملګری دی، مجید د قیوم ملګری دی او داسې نور، په پورته مثالونو کې ورور کېدل، پلار کېدل او ملګری کېدل د انسانانو تر منځ اړیکې راښیي.

د همدې په څېر د ریاضي د کمیتونو په منځ کې بېلابېلې اړیکي شتون لري **لکه:** $9-3>11{,}5>2, a=b$ او نور ، چې$<$ ، $>$ او $=$ علامې د دوو عددونو یا دوو الجبري افادو په منځ کې رابطه ټاکي، همدارنګه د سیټونو تر منځ هم اړیکې شته.

لومړی مثال: که چېرې د $B=\{2a,2b,2c,2d\}, A=\{a,b,c,d\}$ سیټونه په نظر کې ونیسو، ګورو، چې د B سیټ عناصر د A سیټ د عناصرو له دوه چنده کېدو څخه لاسته راغلي؛ نو د A او B سیټونو ترمنځ اړیکه دوه چنده کېدل دي، چې کولای شو په لاندې شکل یې وښایو.

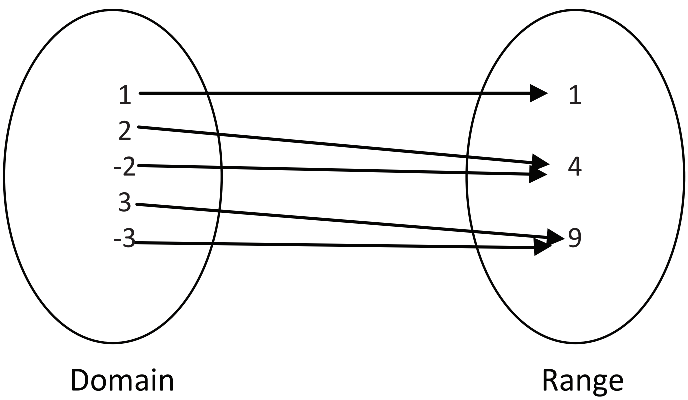


که د دوه چنده کولو رابطه په R وښایو، په دې حالت کې دA او B سیټونو عناصر د R رابطې ته په پام سره لاندې مرتب جوړه سېټونه راښیي.

$R=\{(a,2a), (b,2b), (c,2c), (d,2d)\}$

په دې حالت کې R د مرتب شویو جوړو ګډ سیټ دی، چې د هرې جوړې اوله مرکبه د A سیټ د عنصر مرتب او د هغې دوېمه مرکبه د B سیټ عنصر ښیي. همدارنګه دA سیټ د ډومین Domain په نوم یا د هغې د تعریف ساحه او د B سیټ دRanges په نوم د رابطې د قیمتونو ساحه یادولای شو:

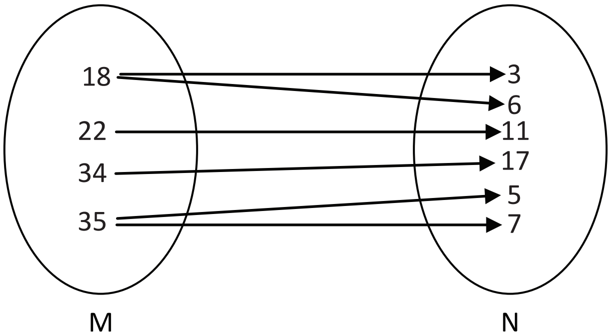
دویم مثال



لیدل کېږي چې د P او Q سیټ تر منځ رابطه د مربع کېدو رابطه ده، چې هغه د ترتیب شویو جوړو په شکل لیکو.

$F = \{(1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9)\}$

دریم مثال:

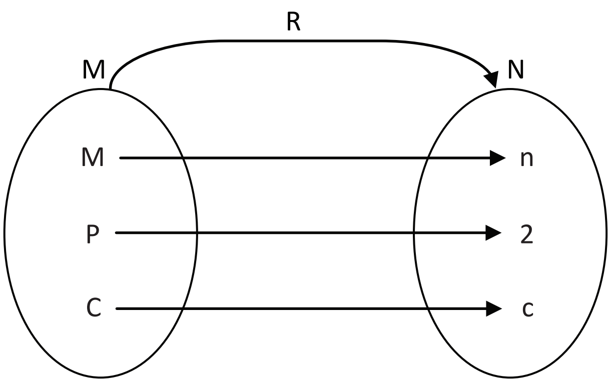


د M او N دوه سیټونه مطالعه کوو، د M او N تر منځ رابطه مضرب کېدل راښيي، چې کولای شو هغه په لاندې مرتب شویو جوړو کې وښایو.

سیټ $K = \{(18,3), (18,6), (12,11), (34,17), (35,5), (35,7)\}$

کله چې د A او B سیټونو عناصر د یو شرط او اصل لاندی ترتیب شوې جوړې جوړې کړي دا اصل او شرط د A او B سیټونو تر منځ رابطه ده.

که چېرې د A او B دوو سیټونو د عناصرو تر منځ یو پر یوه رابطه پیدا شي د A سیټ د B سیټ سره معادله رابطه لري.



که چېرې M یو اختیاري سیټ وي د R یو فرعي سیټ له $M \times M$ څخه د M په رابطه کې وایو:

$R \subset M \times M$

معمولاً د $(x,y)\in R$ لپاره داسې ليکل کېږي. $x \approx y$

معادله رابطه

په M کې يوې رابطې ته هغه وخت معادله رابطه ويل کېږي، چې

د انعکاس خاصيتونه $x \approx x$ $x \in m$ د ټولو لپاره

تناظري خاصيتونه $y \approx x$ $x \approx y \Rightarrow$

انتقالي خاصيتونه $x \approx y, y \approx z \Rightarrow x \approx y$ وي.

نوت: هرکله چې يوکيفي سيټ وی، نو دټولو جفتو مرتب سيټ.

$M \times M := \{(x,y)/x,y \in M\}$

ته د M کارتيزين د ضرب حاصل وايي.

لاندې هر يو مثال يوه رابطه را پېژني:

$1)\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)\}$

هغه سيټ چې د هرې جوړې د اعضاوو مجموعه يې له 3 څخه کمه ده.

$2)\{(0,1),(1,1),(3,1)\}$

$3)\{(1,4),(1,8),(1,9)\}$

$4) y^2 = x, y = x^2, y = \pm\sqrt{x}$

$5) f(x) = 2x^3 - 3$

توابع

د اناليز يو له په زړه پورې مسايلو څخه د توابعو مطالعه ده. يعنې د دوو متحولونو تر منځ د تابعيت(پيروۍ) مطالعه، چې په يو وخت تغير کوي. د علومو په زياتره ساحو، لکه رياضي فزيک، تخنيک، اقتصاد حتا ټولنيزو مسايلو لکه احصايو او نورو کې له همدې مسايلو سره مخ کېږو.

تعريف: تابع د دوه يا څو متغيرو تر منځ تبعي رابطې ته وايي. يا په بل عبارت، يو متغير له بل متغير سره د رابطې له مخې تړاو مومي. چې په دې حالت کې يو ته خپلواک متغير او بل ته تابع متغير وايي، کلي شکل يې $y = f(x)$ دی. په دې ځای کې x خپلواک متغير او y د هغې تابع دی. د خپلواک متغير په هکله ويلای شو، چې x کولای شي په خپله خوښه او خپلواکه توګه د (a,b) په فاصله کې تحول وکړي، همدارنګه تابع کولای شو په لاندې ډول توضېح او تعريف کړو:

د دوو حقیقي اعدادو D او R دوه مجموعې په نظر کې نیسو د f یو تابع د هر حقیقي عدد تابع x ، D مجموعه یواځې یو حقیقي عدد f(x) د R مجموعې ته ربط ورکوي.

د D مجموعه د تابع د تعریف ناحیه او د R مجموعه د F تابع د قیمتونو ناحیه نومېږي. د یاد ربط د لیکلو معمولي بڼه په لاندې ډول ده.

$f - function$ $\quad\quad f : D \rightarrow R$

D - Domain $\quad\quad X \rightarrow f(x)$

R - Range

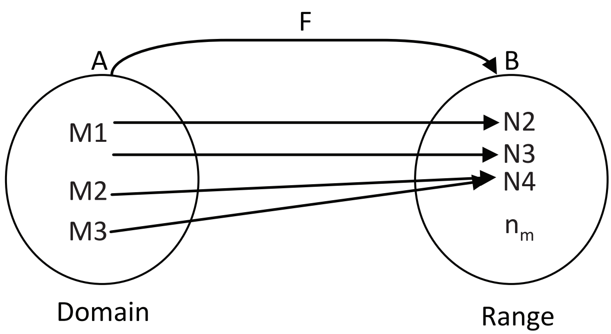
معمولا د لیکلو لاندې ډول کارول کېږي.

د لیکلو پورتنی ډول کولای شي لاندې شکل ته واوړي.

د f توری له D څخه R ته تابع را ښيي، یعنې د F په وسیله د x هر قیمت د D مربوط د f(x) یو قیمت R سره ربط ورکړل شوی دی.

په لنډه توګه تابع داسې تعریفولای شو:

تابع عبارت له یوې رابطې یا د A او B دوه سیټونو ترمنځ ارتباط دی، داسې چې د A د سیټ له هر عنصر سره یواځې او یواځې د B سیټ یو عنصر ربط پیدا کړي.



$y = f(x)$ یا yx دا مفهوم لري، چې y د x تابع دی.

تابع یا Function چې د لومړي ځل لپاره G.W Leibniz ترې په (1716 – 1646) ګټه اخیستې د f یو میپینګ چې د هغې د تعریف ساحه D(f) او د هغې د تصویرساحه B(F) ده د IR فرعي سیټونو تابع نومېږي او دارنګه لیکل کېږي.

$f: \quad D(f) \rightarrow B(f)$

$f: \quad D(f) \rightarrow IR$

د فاصلې په اړه کېدای شي دا ډول توضیح ورکړو:

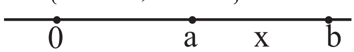
د $a,b \in R$ دوه عددونه په نظر کې نیسو، دا دوه عددونه کولای شي یوه فاصله (انتروال) شي سره د دې چې د x متغیر د{a,b} تر منځ فاصله کې واقع شوی، یعنې $a \le x \le b$ دلته کولای شو ووایو، چې x خپل حقیقي ټول مقادیر په یاده فاصله کې اختیاروي. په پورته نا مساوي کې a د فاصلې لاندې حد او b د فاصلې پورته حد نومېږي.

د انتروال ډولونه

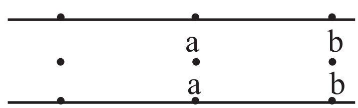
۱- پرانیستې: که په ذکر شوې فاصله کې a او b د فاصلې جز نه وي، په دې حالت کې پرانیستې فاصله نومېږي او په لاندې ډول ښودل کېږي.

(a , b) , a< x <b

$A = \{x / x \in R \ , a < x < b\}$



2 - **نیمه پرانیستی:** په دې حالت کې یو له a او b څخه د فاصلې جز شمېرل کېږي یعنې:



$[a \cdot b), (a \cdot b]$

$a \le x < b \qquad a < x \le b$

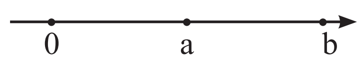
$A = \{x / x \in IR, a \le x < b\}$

$a < x \le b$

3- **تړلې فاصله:** کله چې a او b دواړه هر یو د فاصلې جز وشمېرل شي، په دې حالت کې یاده فاصله تړلې ده.

$[a,b] \qquad a \le x \le b$

$A = \{x / x \in R \ , a \le x \le b\}$



د تابع د تعریف ناحیه

په یوه فاصله کې د متغیرو مقادیرو مجموعه د تعریف ناحیه نومېږي. د تعریف په ناحیه کې که د مستقل متحول په هر قیمت یواځې یو قیمت د مربوط متحول لپاره په لاس راشي . دا چې رابطه د تابع ده البته د یو مقدار برعکسو تابع. د دې په څېر که د تعریف په ساحه کې د مستقل متحول په هر قیمت مربوطه متحول له یو نه زیات قیمت واخلي، په دې حالت کې ذکر شوې رابطه تابع راپېژني.

مثلاً:

$1)\, y = \pm\sqrt{x}$

د تعریف ناحیه $D \to [0,\infty], 0 \le x < \infty$

د پورتنۍ رابطې د تعریف د ناحیې سیټ $D = \{x / x \in R\ , 0 \le x < \infty\}$

$2)\, y = x^2$

د تعریف ناحیه $D \to (-\infty,\infty), -\infty < x < \infty$

$3)\sqrt{x-4}$

د تعریف ناحیه $D \to 4 \le x < \infty, [4,\infty]$

د توابع گراف

څرنګه چې گرافونه پر ریاضي سربېره په فزیک، کیمیا، بیولوژي او نورو طبعي او ټولنیزو علومو، لکه احصایه اقتصاد او نورو کې پکارېږي، د هغو په واسطه ډېر موضوعات واضح بیانېږي.

همدارنګه تابع ډېر کله د خپل مربوطه گراف په واسطه بیانېږي، نو د ډېر اهمیت وړ ده او پکار ده، چې د گرافونو د رسمولو په حالت کې دقت او پاملرنه وشي او د توابعو د گرافونو د ترسیم قوانین او اصول وپېژنو.

دا چې مختلف الجبري توابع د متفاوتو گرافونو لرونکي دي، بناً د گراف د لارښود لپاره ځینې له توابعو څخه رسموو.

د توابعو د گراف هندسي ښودنه

په تحلیلي هندسه کې هر جفت مرتب د حقیقي اعدادو (x,y) په یوه نقطه یو بل ته مخامخ واقع کېږي، داسې چې د x او y عددونه نسبت د مختصاتو یو سیستم ته Cartesian

د ذکر شوي نقطې مختصات دي.
اوس د هر تابع لپاره

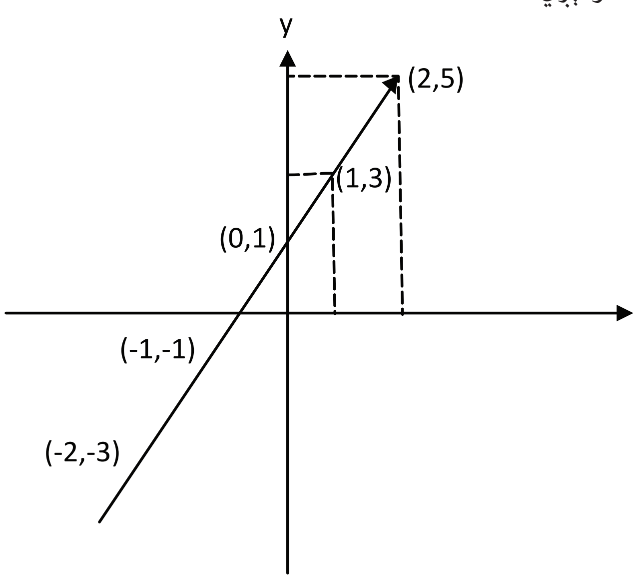
$$f : D \to R$$
$$x \to f(x)$$

کولای شو مرتبې جوړې $(x, f(x))$ په نظر کې ونیسو، دا مرتبې جوړې هغه نقطې په لاس راکوي، چې د x او F(x) مختصاتو لرونکې وي.

تعریف: د هر تابع لپاره

$$f : D \to R$$
$$x \to f(x)$$

د ټولو هغو نقطو مجموعه، چې د$(x, f(x))$ مختصاتو لرونکې ده د f د تابع د ګراف هندسي ښودنه نومېږي.



خرنګه چې پورتنۍ تابع اوله درجه ده، نو د هغې ګراف پر مستقیم خط دی.
له دا ډول توابع $x \to x^m$ یا $y = f(x) = x^m$

په پورته تابع کې m یو ناطق عدد دی، چې په دوو حالتونو کې مطالعه کېږي.

لومړی حالت m په تامو اعدادو کې شامل دی $m \in z$

دویم حالت m په نسبتي اعدادو کې شامل دی $m \in Q$

په لومړي حالت کې $y = x^m$ په څلورو فرعي حالتونو کې مطالعه کېږي.

مثبت جفت $m \to (a)$ مثبت تاق $m \to (C)$

منفي جفت $m \to (b)$ منفي تاق $m \to (d)$

دویم حالت

کسري m په P/q شکل (په داسې حال کې، چې P او q تام اعداد دي).

په پورته توګه لاندې فرعي حالتونه په نظر کې نیول کېږي.

$a - m = \frac{P}{q} > 1$

$b - m = \frac{P}{q} < 1$

$c - 1 < m = \frac{P}{q} < 0$

$d - m = \frac{P}{q} < -1$

د خصوصیاتو لنډه پېژندنه او توابعیه د دې کتاب په درسونو کې کارول کېږي.

۱- مشرح تابع او ضمني تابع: هر کله چې د تابع او مستقل متغیر تر منځ رابطه شتون ولري، چې وکولای شو تابع له هغې استخراج کړو؛ یعنې که په یاده رابطه کې تابع وتوانېږي د دې $y = f(x)$ په څېر و لیکل شي دا رابطه مشرح تابع بلل کېږي.

مثلاً $y + 2 = 3x^2$ یا $xy = x^2 - 1$ او نور ...

او که په یوه رابطه کې له متحولینو څخه د هیڅ یوه لپاره مستقل حل پیدا نه شي، دا رنګه رابطه ضمني تابع نومېږي مثلاً:

$x + x^2y^2 + y = 0$ $y + x^2 + x^2y^2 = 0$

مشرح تابع کېدای شي ناطق یا آهم وي.

$y^2 - x = 0$

ناطق تابع هغه دی، چې د یوه یا دوه پولینومونو له نسبت څخه لاسته راغلی وي.

لکه:

$$y=\frac{3x^2+1}{2x+3} \qquad y=3x^2+2x+1$$

$$y=\pi r^2$$

آهم تابع هغه دی، چې په هغې کې یو یا څو تر جذر لاندې واقع شوي وي.

لکه:

$$y=\sqrt{\frac{2x^2+5}{5x^3+x}} \text{ و غیره} \qquad y=2x^2+\sqrt{3x}+4$$

متمادي او غیر متمادي تابع

که د $y=f(x)$ تابع یو پولینوم وي او x وکولای شي له ∞- څخه تر ∞+ قیمتونه واخلي، داسې چې د X په ټولو قیمتونو د تابع لپاره قیمت وټاکل شي متمادي تابع ده

مثلاً:

$$y=x^3-3$$
$$y=3x+5$$

د دې برعکس که تابع ونه شي کړای د تعریف په حوزه کې د x د متحول د ځینو قیمتونو لپاره قېمت واخلي دا رنګه تابع، چې پکې قیمتونه نا ټاکلي دي متمادي نه دی.

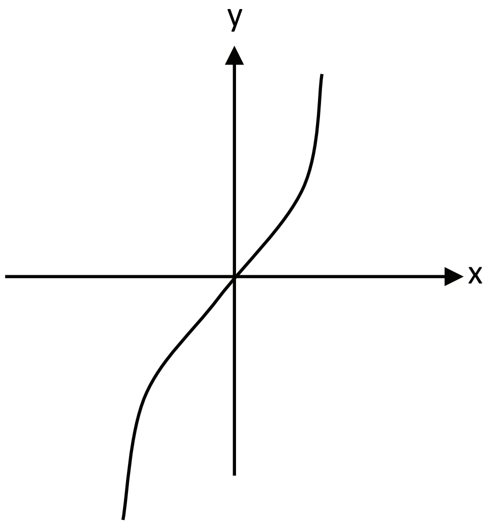
مثلاً:

$$y=\frac{x^2+3x}{x-2}$$

په نوموړي تابع کې لیدل کېږي، چې د $x=2$ په قیمت د تابع قیمت غیر معین دي بناً د $x=2$ په قیمت کې تابع غیر متمادي دی او یا په $y=\sqrt{3-x}$ کې $x>3$ په قیمتونو د تابع قیمت د حقیقي اعدادو په سیټ کې غیر معین دی، بناًء د $x>3$ په قیمتونو د تابع ګراف غیر متمادي دی.

متزایده تابع او متناقصه تابع

که مستقل متحول او تابع یو اړخ ته یونواخت تحول ولري متزایده تابع ورته ویل کېږي. یا په بل عبارت که تابع په یوه ټاکلې فاصله کې د سعودي یو نواخت تغیراتو لرونکې وي، داسې چې په قیمتونو دوه مقداره x_1 او x_2 ولرو $x_1<x_2$ $f(x_1)<f(x_2)$



تابع یو نواخته نزولي ده (متناقص) په هغه حالت کې، چې $x_1 < x_2$ په قیمتونو دا $f(x_1) > f(x_2)$ قیمتونه شي.

د زوج تابع (موازي) او د فرد تابع (متناوب)

که د $y = f(x)$ تابع کې د x عدد قیمت x− ته واړوو او د y عدد په قیمت کې کوم تغیر رانه شي دارنګه تابع (جفت) موازي تابع نومېږي.

د دې برعکس که x په x− بدلوو او د y عدد قیمت y− ته واړوو، تابع ته (طاق) تابع ویل کېږي.

کثیر الحده تابع

دا تابع داسې $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ده. په دې تابع کې $a_0, a_1, a_2 . a_n$ ثابت مقادیر، n کثیر الحده درجه او x د تابع مستقل متحول دی، له دې تابع څخه نورې توابع هم مشتق کېږي، یعنې په $n = 0$ ثابت تابع $n = 1$ خطي تابع $n = 2$ دویمه درجه تابع $n = 3$ درېیمه درجه تابع

ثابته تابع

هغه تابع چې د تغیراتو حدود یې په یو حد کې شامل شوي وي. په دې ډول توابعو کې د تابع مقدار له متغیر سره تړاو نه لري لکه: $y=a$

توان لرونکې تابع

په دارنګه توابعو کې مستقل متغیر د توان یا طاقت په توګه ځای نیسي، چې د $f(x)=a^x$ په څېر ښودل کېږي، البته $a\neq 0,1$ دی، دا هغه وخت دقیقاً متزایده ده، چې کله a>0 وي او هغه وخت دقیقاً متناقصه ده، کله چې a<0 وي.

لوګارتمي تابع

دا تابع په $y=F(x)=Log_a x$ بڼه وي، چې په هغې کې $a\neq 1,0$ وي او x>0 دی.

که دا رانګه $a=e=2.7.828$ وي په دې حالت کې به په طبیعي قاعده کې وي، چې هغه پایه پنرین نومېږي او په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$y=f(x)=Lnx, e=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{K!}$$

که $a=e=2.7.828$ وي، په دې حالت کې به لوګارتم په طبیعي قاعده کې وي، چې هغه نپیرین قاعده نومېږي او په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$y=f(x)=Log_e x \qquad \mathrm{e}=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{K}!}$$

$$y=f(x)=Lnx$$

معکوسه تابع

د $y=f(x)$ تابع په نظر کې نیسو، چې په هغې کې x مستقل متغیر او y د هغه تابع ده. څرنګه چې لیدل کېږي y د x په حساب بیان شوی دی، اوس که داسې رابطه ولیکو، چې په هغې کې x تابع او y مستقل متغیر وي، یا په بل عبارت پورته رابطه د y په حساب بیان کړو؛ په دې حالت کې هغې ته معکوسه تابع ویل کېږي، چې په هغې کې به x د y تابع وي او کولای شو هغه په لاندې ډول وښایو

$$x=f(x), x=f^{-1}(x)$$

تعریف: د f د تابع پر وړاندې، چې په f^{-1} شکل ښودل کېږي د(y,x) جفتو له مجموعې

ځخه عبارت دی، داسې چې د (x,y) جفتونه په f کې قرار لري. f^{-1} یو په یو دی، کله چې F یو په یو وي.

ټولې توابع چې د یوې ټاکلې فاصلې پر مخ وي او د مستقل متحول او تابع ترمنځ یو په یو رابطه ټینګه وي یا دقیقاً نزولي یا صعودي وي او د معکوس لرونکې دي.

$f: D \to R, f$ تابع

$x \to f(x)$

یوه یو په یو تابع ده په داسې حال کې، چې د x په مختلفو قیمتونو پورې مربوط وي یعنې کله چې x_0 , x_1 , x_2 د D د مجموعې مربوط وي او $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ وي د $f(x) \neq f(x) \neq f(x)$ تر منځ دی.

تعریف: هر کله چې د f تابع یو په یو وي، په دې حالت کې:

$$
\begin{aligned}
&f: D \to R \\
&x \to f(x) \\
&f^{-1} = R \to D \\
&x \to f^{-1}(x) \\
&x = f(y)
\end{aligned}
$$

په لنډه توګه ویلی شو، چې دوه تابع ګانې یو له بلې ځخه راګرځېدلې وي، معکوسې توابع ورته وایي، لکه:

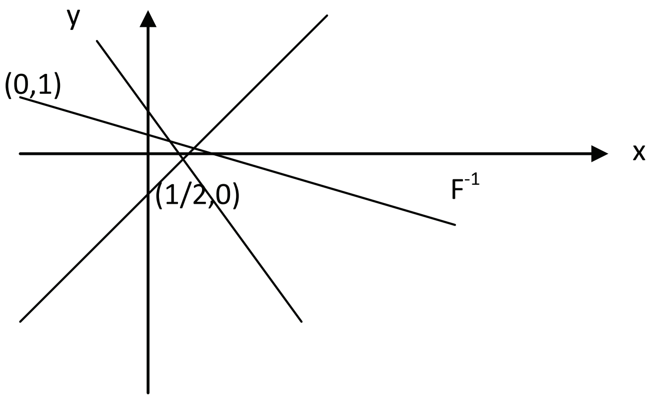
$$
\begin{aligned}
&y = Log_a x \to x = a^y \\
&y = \sin x \to x = \arcsin y \\
&y = \cos x \to x = \arccos x
\end{aligned}
$$

مثال: معکوسه تابع

$$
\begin{aligned}
&f: \mathrm{D} \to && f^{-1} R \to D \\
&\mathrm{x} \to -2\mathrm{x}+1 && \mathrm{x} \to \mathrm{f}^{-1} \\
&\mathrm{y} = -2\mathrm{x}+1 && \mathrm{x} = -\frac{\mathrm{y}-1}{2} \\
&\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{y}-1}{2} && f(\mathrm{y}) = -\frac{\mathrm{y}-1}{2}
\end{aligned}
$$

د معکوسې تابع ګراف

لومړی د f د تابع ګراف رسموو د f د هندسي شودنې د انعکاس له امله y=x عینیت ته په کتو هندسي شودنه تر f^{-1} پورې په لاس راځي.



$y = -2x + 1$

x	0	$1/2$
y	1	0

مثال : د g تابع په پام کې نیسو.

$g_+ : D_+ \to R$

دا تابع په داسې حال کې، چې د D_+ مجموعه ټول غیر منفي عددونه دي یو په یو تابع ده او g_+^{-1}

$g_+^{-1} : R_g \to D_+$
$x \to \sqrt{x}$

د طاقت لرونکې تابع ځانګړنې

که f_a یا $x \to a^x$ په پام کې ونیسو، په دې صورت کې:

$f_a : D \to R$
$x \to a^x$

<u>د لاندې خاصیتونو درلودنکې دي:</u>

۱- د D مجموعه د ټولو حقیقي عددونو له مجموعې څخه عبارت ده؛ خو د R مجموعه ټول مثبت حقیقي عددونه دي.

۲-د x_1, x_2 په ټولو حقیقي قیمتونو کې لاندې رابطه سمه ده. $f_a(x_1 + x_2) = f_a(x_1) f_a(x_2)$

۳- د f_a تابع په $a>1$ ډول دقیقاً متزایده ده او په $0 < a < 1$ ډول متناقصه ده.

د توابعو هندسي جوړښت $y=2^x$ او $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ په لاندې ډول لیدل کېږي. شکل ته په کتو د $a=2>1$ او $a=\frac{1}{2}<1$ پر وړاندې د f_2 او $f_{1/2}$ ورکړل شوو توابعو د 2 او 3 د رابطې خواص کولای شو په شکل کې ووینو.

که پورته توابعو ته په دقت سره وګورو، وینو چې د مستقل متحول او تابع تر منځ یو په یو رابطه موجوده ده. بناً پورته توابع د معکوس درلودونکې دي، چې کولای شو په لاندې شکل کې یې رابطې وګورو.

نو ویلای شو، چې طاقت لرونکې تابع او لوګارتمي تابع یو د بل معکوسې او سرچپه دي.

د توابعو ترکیب

کله چې f او G دوه اختیاري توابع وي؛ په دې حالت کې $(Fog)_x$ نوي تابع د $(fog)_x=f(2(x))$ په وسیله تعریفوو.

fog د f او g ترکیب نومېږي، چې د fog د تعریف ناحیه له x څخه عبارت ده. په دې حالت کې، چې x د g (x) $g(x)$ د تعریف په ناحیه کې د f د تعریف په ناحیه کې دی.

عموما $fog\neq gof$ دی.

مثال:

$$f(x)=x^2$$
$$g(x)=x+1$$
$$(fo2)_x=f(2(x))=f(x+1)=(x+1)^2$$
$$(2of)_x=2(f(x))=2(x^2)=x^2+1$$

نو لیدل کېږي چې:

$$(x+1)^2\neq x^2+1$$

خو اتحادي ترکیب په توابعو کې موجود دی، چې په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$(fog)oh=fo(goh)=$$

تاسې کولای شئ د هغو په لرلو سره تابع تطبیق او ارزیابي کړئ.

$f(x) = x^2$

$2(x) = x + 1$

$h(x) = x - 1$

$(fogoh) = f(2(h(x)))$

$f(2(h(x))) = f(2(x-1) = f(x-1+1) = x^2$

$fo(2oh) = f(2(h(x))) = x^2$

$(fo2)oh = f(2(h(x))) = x^2$

$f(x) = 2x^2$

$2(x) = 3x + 2$

$h(x) = x + 1$

$fogoh = f(2(h(x))) = f(2(3(x+1)+2) = 2(3x+5)^2$

مثال: د $y = |x|$ تابع رسم کړئ!

$y = x$

$y = -x$

$x > 0$

$x < 0$

مثال: د $y = |x^2 - 2x|$ تابع رسم کړئ!

د دې تابع د ترسیم لپاره لومړی د $y = x^2 - 2x$ تابع رسموو او د تابع د ګراف هغه برخه، چې د x تر محور لاندې ده یا په بل عبارت د $y < 0$ هغه قیمتونه دي، چې د هغوی متناظر د x په محور رسموو.

$-2 \le x < -1 \underrightarrow{[x] = -2} y = -2 + x$

$-1 \le x < 0 \underrightarrow{[x] = -1} y = -1 + x$

$0 \le x < 1 \underrightarrow{[x] = -0} y = x$

$1 \le x < 2 \underrightarrow{[x] = 1} y = 1 + x$

د دوه یا څو متغیرو تابع

د دې تابع کلي شکل په لاندې ډول ښودل کېږي. $z = f(x, y)$ او یا $Z = f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ دا رابطې ښیي، چې z د دوه یا څو متحولونو تابعیت کوي. مثلاً $z = ax + by$ داسې تابع ده، چې د دوه متغیرو x او y پیروي کوي او $z = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots . a_nx_n$ تابع داسې تابع ده، چې د څو مستقلو متغیرو تابعیت کوي.

د دوه یا څو توابعو د تعریف د ناحیې جمع، تفریق، ضرب او تقسیم

هرکله چې F او g دوه اختیاري توابع وي، په دې حالت کې نوې تابع ګانې لکه $f \pm g$ کولای شو د لاندې معادلې په وسیله تعریف کړو. $(f \pm g)_x = f(x) \pm 2(x)$ د $(f \pm g)_x$ د تعریف ناحیه د x له ټولو عددونو څخه متشکله ده، چې د هغې پر وړاندې $F(x) \pm 2(x)$ معنی ورکوي.

یعنې د ټولو $x \in R$ عددونو مجموعه، چې دF او g په هرو دوو ناحیو کې قرار لري.

هر کله چې د A او B دوه مجموعې اختیاري وي په دې حالت کې $A \wedge B$ د $x \in R$ مجموعې ته اشاره کوي، چې په A او B کې قرار لري؛ نو کولای شو ولیکو:

$$(f \pm g)_x = f(x) \pm 2(x) \rightarrow dom$$
$$= dom(f) \wedge dom(g)$$
$$(f \cdot g)_x = f(x) \cdot 2(x) \rightarrow dom = dom(f) \wedge dom(g)$$
$$\left(f/g\right)_x = \frac{f(x)}{g(x)}, domain\frac{f(x)}{2(x)} = dom(f) \wedge dom(g)$$
$$2(x) \neq 0$$

هرکله چې g تابع او C اعداد وي د C.g نوې تابع د $(C(g)\ _x = C \cdot g(x))$ په وسیله ښیي. د C.g د تعریف ناحیه فقط د g د تعریف ناحیه ده.

مثال: د F او g توابع په لاندې ډول تعریف کېږي.

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad domf(-\infty, \infty)$$
$$g(x) = \sqrt{x} \qquad domg(0, \infty)$$
$$(f \pm g)_x = ? \qquad dom(f \pm g)_x = ?$$
$$(f \cdot g)_x = ? \qquad dom(f \cdot g)_x = ?$$
$$\left(\mathrm{f}/\mathrm{g}\right)_{\mathrm{x}} = ? \qquad dom\left(f/g\right) = ?$$
$$g(x) \neq 0$$

حل:

$$(f \pm g)x = f(x) \pm g(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1$$
$$dom(f \pm g)x = [0, \infty)$$
$$(F \cdot g)_x = \sqrt{x}(x2+1), dom(f \cdot g)x = [0, \infty]$$
$$\left(f/g\right)_x = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(x^2+1)}{x}$$
$$dom\left(f/g\right) = [0, \infty]$$
$$2(x) \neq 0$$

د څو مثالونو د حل نمونه:

۱- تعین کړئ، چې لاندې تابع په کومه فاصله کې ټاکلې ده؟

$y=\sqrt{x-4}$

حل: د دې لپاره چې تابع ټاکلې وي باید حدونه یې د یو مثبت عدد تر جذر لاندې وي.

$x-4\geq 0$

$x-4=0$

$x=4$

$4\leq x<\infty$

۲- د $y=\sqrt{x^2-1}$ تابع د تعریف ناحیه تعین کړئ؟

حل: د دې لپاره چې د پورته تابع د تعریف ناحیه ټاکلې وي؛ باید حدونه یې تر مثبت جذر لاندې وي.

$x^2-\geq 0\rightarrow x^2=1$

$x^2>1$

$x=\pm 1$

$x\geq 1$

$x\leq -1$

۳- هغه نقطې، چې پکې تابع متصله وي په لاس راوړئ؟

$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

حل: د مخرج جذر یې پیدا کوو.

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=2$

$x=1$

پورته تابع په ټولو نقطو کې متصله ده.

$A=\{x/\in R\ ,x\neq 2,x\neq 1\}$

منفصلې دي. $x=2$ او $x=1$ خو دوه نقطې

دریيم څپرکی

الجبري معادلې

ټولیزه موخه

د معادلو او په اقتصادي او تخنیکي مسایلو کې له معادلو نه د ګټې اخیستنې په اړه معلومات

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین په لاندې موضوعاتو وپوهېږي:

- د معادلو د مفهوم درک کول، د مجهولاتو له پلوه د معادلو پېژندنه.
- د معادلاتو له خواص نه خبرېدنه او د اړتیا په ټولو ساحوکې د هغې کارونه
- د یوې مسألې د خصوصیت له نظره د یوې معادلې تشکیل او ترل.
- د عبارتي مسایلو حل او د معادلې له خواصو نه په ګټه اخیستو د مجهولاتو پیدا کول.
- له معادلاتو نه په ګټه اخیستنه د اقتصادي مسایلو حل.

الجبري معادلې

هغه الجبري مساوات، چې په یو یا څو مشخصو قیمتونو، حروف مساوي وي، معادله نومېږي. مثلاً دا $5x+2=2x+8$ مساوات یوه معادله ده، ځکه د $x=2$ په قیمت دواړه خواوې مساوي دي.

په معادله کې مجهول: هغه دی، چې د قیمت پیداکول یې مطلوب وي.

د معادلې جذر: د مجهول هغه قیمت ته ویل کېږي، چې معادله صدق کړي.

د معادلې درجه: د معادلې د مجهول تر ټولو لوی توان د معادلې درجه ده.

مثلاً.

اوله درجه $5x-10=0$

دویمه درجه $3x^2-x+2=0$

درېیمه درجه $2x^3-3x^2+6=0$

(n) درجه $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_1+a_0=0$

دمجهولونو د شمېر له مخې د معادلو ډولونه: یوه معادله کېدای شي د یو، دوه، درې یا n مجهولونو لرونکې وي.

مثلاً:

یو مجهوله معادله $2x+4=3x-6\rightarrow$

دوه مجهوله معادله $8x-4y=6\rightarrow$

درې مجهوله معادله $3x-2y+6z=8\rightarrow$

n مجهوله معادله $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots\ldots+a_nx_n$

د معادلو خاصیتونه

۱- که د یوې معادلې (شرطیه مساوات) دواړو خواوو ته عدد جمع یا تفریق شي په شرطیه مساوات کې کوم تغیر نه راځي.

۲- که د مساوات دواړه خواوې په خلاف د صفر عدد کې ضرب یا تقسیم شي مساوات په خپل حال پاتې کېږي.

۳- هر کله چې د مساوات دواړه خواوې په کلي توګه له یو طرف څخه بل طرف ته انتقال شي د هغې د حدونو علامې تغیر نه کوي.

٤- که د معادلې یو جز د مساوات له یو طرف نه بل طرف ته انتقال شي، د هغې جز علامه تغیر کوي.

$4x+1=3x+22$

$4x-3x=22-1\rightarrow x=20$

اوله درجه یو مجهوله معادله

د اوله درجه معادلې کلي شکل $ax=b$ دی، b ثابت عدد او x مجهول دی او $x=\frac{b}{a}$ د ذکر شوې معادلې جذر دی.

که په اوله درجه یو مجهوله معادله کې د معادلې دواړو خواو ته څو جزه مشابه او ثابت عددونه وجود ولري؛ کولای شو مجهول عددونه د مساوات یوې خواته او معلوم اعداد د مساوات بلې خواته انتقال کړو، د ارجاع نه وروسته په $ax=b$ شکل راځي او وروسته

مجهول پیدا کېږي.

اوله درجه یو مجهوله معادلې په لاندې شکلونو راتلای شي، چې هر یو تر مطالعې لاندې نیسو.

۱- پولینومي معادلې (کسري، غیر کسري، حرفي)

۲ - اوله درجه یو مجهوله جذري معادلې

اوله درجه یو مجهوله پولینومي معادلې

$$6x+3=11+2x$$

$$6x-2x+11-3=0 \Rightarrow x=\frac{8}{4} \Rightarrow x=2$$

امتحان: په معادله کې د $x=2$ په اېښودلو باید د مساوات دواړه طرفونه برابر شي.

$$6(2)+3=(11)+2(2) \Rightarrow 12+3=11+14$$

$$15=15$$

یو مجهوله کسري معادلې

$$\frac{4x-3}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$2x\frac{(4x-3)}{2x}=\frac{1}{2}(2x) \Rightarrow 4x-3=$$

$$4x-x=3 \Rightarrow x=1$$

$$\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-1}=\frac{3}{x+1}$$

$$\frac{2+4}{x-1}=\frac{3}{x+1} \Rightarrow \frac{6}{x-1}=\frac{3}{x+1}$$

$$3(x-1)=6(x+1) \Rightarrow 3x-3=6x+6$$

$$6x-3x=-3-9$$

$$3x=-9 \Rightarrow x=-3$$

اوله درجه یو مجهوله حرفي معادلې

$$2(m-1)(x+1)=(m+2)(x-1)$$

$$(2m-2)(x+1)=(m+2))x-1)$$

$$2mx+2m-2x-2=mx-m+2x-2$$

$$2mx-mx-2x-2x=-m-2m$$

$$mx-4x=-3m$$

$$x(m-4)=-3m \Rightarrow x=\frac{-3m}{m-4}$$

$$m \neq 4$$

د dx معادله $cx-\frac{4}{C}=d$ د x لپاره يې حل

مناقشه وکړئ؟

$$\frac{c^2x-4}{c}=d-dx$$

$$c^2x-4=cd-dx \Rightarrow c^2x+cdx=cd+4$$

$$x=\frac{cd+4}{c^2+cd}$$

$$c^2+cd\neq 0$$

$$c\neq 0$$

$$c\neq -d$$

د $c\neq 0, c=-d$ په استثنا د c او d ټولو قیمتونو ته پاسنۍ معادله قیمت لري، ځکه په دغو قیمتونو باندې ټاکلی حل نه لري.

لاندې پولینومي معادلې حل کړئ!

$1)2x-2=3x+6$

$2)2(5x-4)=x+13$

$3)2x(2+x)+3=x(2x+1)$

$4)-10x+3=6x+7$

$5)(x=20(x+1)=(x-2)(8x-4)$

$6)16x-5(2x-3)=23+7(6x+4)$

$7)3{,}5-0{,}5(3x-2{,}20=2{,}5x-0{,}2(5x-8)$

$8)\frac{3x+4}{2}-x=5$

$9)\frac{x(x+2)}{2(2+x)}=\frac{x}{2}$

$10)5+\frac{3x}{x-3}=\frac{9}{x-3}$

$11)\frac{9}{x+2}-\frac{8}{x}=\frac{7}{x}$

$12)\frac{x+5}{x-2}=\frac{x+3}{x+1}$

$13)\frac{2x}{5}-3=x+\frac{1}{3}$

$$14)\ \frac{5x-3}{4}-\frac{2x+1}{3}=\frac{4x+5}{6}-2$$

$$15)\ 3mx-5b=2x+6, x=?$$

$$16)\ 6abx+4ab=2ax+3ab, x=?$$

$$17-\frac{5x-3}{5}-\frac{4x-1}{2}=\frac{1-3x}{3}+2$$

$$18)\ \frac{m+w\sqrt{v}}{2g}=k, V=?$$

$$19)\ P=2I+2W, W=?$$

$$20)\ S=\frac{a}{I-r}, r=?$$

$$21)\ F=q\cdot\frac{m_2m_2}{d^2}, d=?$$

$$22)\ V=\frac{1}{3}\pi r^2h, h=?$$

اوله درجه یو مجهوله جذري معادلې

د هغې معادلو د حل لپاره، چې مجهول یې تر جذر لاندې وي.

اول هغه افاده، چې تر جذر لاندې قرار لري د مساوات یو طرف ته انتقالوو وروسته د معادلې دواړه خواوې د جذري درجې په توان پورته کوو په هغه صورت کې، چې بیا هم افاده جذري پاتې شوه همدا عملیه تکرارو، چې په ټولیزه توگه یې جذر له منځه لاړ شي.

$$1)\ 2\cdot\sqrt[3]{3x-1}=4$$

$$\sqrt[3]{3x-1}=\frac{4}{2}=2\Rightarrow\left(\sqrt{3x-1}\right)^3=(2)^3$$

$$3x-1=8\Rightarrow 3x=9\Rightarrow x=3$$

$$2)\ \sqrt{x+14}-\sqrt{3x-10}=0$$

$$\sqrt{x+14}-\sqrt{3x-10}\Rightarrow\sqrt{(x+14)^2}=\sqrt{(3x-10)^2}$$

$$x+14=3x-10$$

$$2x=24\Rightarrow x=12$$

$2x = 24 \Rightarrow x = 12$

$3)\sqrt{5+x^2} - x = 1$

$(\sqrt{5+x^2})^2 = (x+1)^2$

$5 + x^2 = x^2 + 2x + 1$

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$4)\sqrt{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{\sqrt{x^2-1}})^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$

$\sqrt{x^2-1} = x - 1$

$x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1$

$2x = 2$

$x = 1$

لاندێ جذري معادلێ حل كڕئ؟

$1)\sqrt[3]{2x+7} = 2$

$2)\sqrt{x^2+2x} - 2 = x$

$3)\sqrt{\frac{2x+1}{x}} - \sqrt{\frac{2x1}{x+3}} = 0$

$4)\sqrt{2+\sqrt{x^2-5}} = \sqrt{x+1}$

$5)\sqrt{x-1} - 6 = -3$

$6)\sqrt[2^3]{\sqrt{x-2}} = 4$

$7)\sqrt{4x^2-16} = 2x - 2$

$8)(2x-1)^{\frac{4}{3}} = 4x - 2$

$9)x + \sqrt{x^2-9} = 21$

$10)\sqrt{x^2+3} = 9 + x$

$11)\sqrt{x^2+5} + 1 = x$

$12)\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = 1$

$13)\sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x+2}$

د اولې درجې يو مجهوله معادلو د مسايلو عبارتي حل

د معادلو د تشکيل طريقې: معادلې د رياضياتو يو مهم قسمت تشکيلوي او زيات مسائل د هغې په واسطه حل کېږي. کولای شو د دې لپاره، چې د مسائلو په حل کې له معادلو څخه سمه ګټه واخلو؛ لازمه ده، چې د پوښتنو د شرايطو مطابق الجبري جملې تشکيل کړو او وروسته د معادلې شکل ته راوړل شي. د موضوع د توضيح لپاره لاندې مثالونه په نظر کې نيسو.

مثال: د دووعددونو مجموعه 37 او تر منځ فرق يې 5 دی اعداد پيدا کړئ!

حل: د سوال د متن مطابق

کوچنی عدد $\rightarrow x$

لوی عدد $\rightarrow x+5$

د دوو عددونو مجموعه $x+x+5=37$

$$2x+5=37$$
$$2x=37-5 \rightarrow 2x=32$$
$$x=16$$

مثال: د دوو عددونو د جمع حاصل 19 دی که د لوی عدد له دوه چنده څخه کوچنی عدد تفريق شي 17باقي کېږي، تاسې اعداد معلوم کړئ!

حل: نظر د سوال متن ته

کوچنی عدد $\rightarrow x$

لوی عدد $\rightarrow 19-x$

د معادلې تشکيل

$$2x-(19-x)=17$$
$$2x-19+x=17$$
$$3x=17+19$$
$$3x=36 \rightarrow x=12$$
$$19-12=7$$

مثال: کوم عددونه د $\frac{3}{11}$ کسر له صورت او مخرج سره جمع کړو، چې $\frac{2}{3}$ کسر لاس ته راشي.

د سوال مطابق

$$\frac{3+x}{11+x}=\frac{2}{3} \rightarrow 22+2x=9+3x$$
$$3x-2x=22-9 \rightarrow x=13$$

مثال: یو شخص 1000 افغانۍ په ګټه کې واچولې، داسې چې د هغې یوه برخه په 3% نرخ او د هغې بله برخه په 5% نرخ تعین شوې؛ هر کله چې د هغې مجموعې ربح 46 افغانۍ شي، د سرمایې د هرې برخې د ګټې مقدار، چې مرابحې ته اچول شوی، معلوم کړئ!

حل: د سوال د متن مطابق

اوله سرمایه x

د هغې ربح $\frac{3}{100}x$

د دويمې سرمايې ربح + د اولي سرمايې ربح = 46

دویمه سرمایه $1000-x$

ربح $\frac{5}{100}(1000-x)$

$$\frac{3x}{100}+\frac{5000-5x}{100}=46$$
$$3x-5x=4600-5000$$
$$-2x=-400 \rightarrow x=200$$
$$1000-200=800$$

تمرين

لاندې سوالونه حل کړئ!:

۱- د 54 عدد داسې په دوه حصو تقسیم کړئ، چې د لوی عدد څلور چنده د کوچني عدد له پینځه چندو سره مساوي شي؟

۲- د یو کیلو گرام چایو قیمت 36 افغانۍ د یو کیلوگرام بورې له قېمت څخه زیات دی که د 10Kg چای او 12Kg بورې مجموعي قېمت 1284 افغانۍ وي، د فی کیلو گرام چای او بورې قېمت معلوم کړئ؟

۳- که د پلار عمر 43 کاله وي او د زوی عمر 23 کاله وي، معلوم کړئ، چې وروسته له څو کالو د پلار عمر د زوی دو چنده کېږي؟

٤ – د فردوس درمل 400gr د سلفوریک اسید محلول او اوبه لري، چې25% د اسیدو لرونکي دي، کوم مقدار اوبو ته بېراس ورکړي، چې 50% سلفوریک اسید محلول لاسته راوړي؟

۵- څومره اوبه له هغه 300gr گرامه محلول څخه، چې په سلو کې 2 مالگه بېراس ولري، چې داسې یو محلول ورڅخه ترلاسه شي، چې په سلو کې 3 مالگه ولري؟

٦- د دوو عددونو تر منځ فرق 12 دی او حاصل جمع یې 49 ده اعداد معلوم کړئ؟

۷- 721 افغانۍ د درې تنو تر منځ داسې وویشئ، چې لومړي ته د دوهیم په پرتله دوه برابره او دویم ته د درېیم تن دوه برابره ورسېږي؟

اوله درجه دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې، چې د دوو مجهولونو لرونکې وي او د مجهولونو درجه یې یو وي د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په نوم یادېږي. یوه اوله درجه دوه مجهوله معادله بې نهایت حلونه لري

مثلاً: $x+2y=8$

$x=0$	$x=1$	$x=-1$	$x=2$	$x=4$
$y=4$	$y=\frac{7}{2}$	$y=4,5$	$y=6$	$y=2$

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو عمومي شکل $ax+by+c=0$ دی، چې په هغې کې a,b,c د همزمانه یواځیني حل لپاره په اوله درجه دوه مجهوله معادلو کې د معادلو سیستم ته اړتیا ده، یانې دوه مجهوله په دوو معادلو کې، درې مجهوله په درېو معادلو کې او n مجهوله په n معادلو کې.

د اولې درجې دوه مجهوله معادلو سیستم

د هغې کلي شکل

$$a_1x + b_1y = C_1$$
$$a_2x + a_2y = C_2$$

د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل: د دې سیستم حل په رنګارنګ شکلونو ممکن دی، چې په څو مثالونو کې یې توضیح کوو.

مثال:

$$\left.\begin{array}{l}4x+2y=8\\5x-y=3\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}4x+2=8\\5x-y=3\end{array}\right.$$

$$20x+10=40.........I$$
$$\underline{\pm 20x \mp 4y = \pm 12......II}$$
$$14y=28$$
$$y=2$$

د I معادله له II څخه منفي کوو

د Y قیمت له پورته معادلو څخه په یوې کې وضع کوو د x قیمت حاصلېږي.

$$4x+2(2)=8$$
$$4x+4=8$$
$$4x=4$$
$$x=1$$

د پورته سیستم د حل سیټ $A=\{1,2\}$

د تعویض په طریقه د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل

په دې حالت کې یو مجهول له یوې معادلې څخه په لاس راوړو، په بله معادله کې یې وضع کوو، د بل مجهول حل ته رسېږو.

مثال:

$$4x+3y=6........I$$
$$5x+4y=7........II$$

I	II
$4x+3y=6$	$4(\frac{6-3y}{4})+4y=7$
$4x=6-3y$	$30-15y+16y=28$
$x=\frac{6-3y}{4}...........III$	$y=28-30=-2$
	$y=-2$

دا قیمت له I , II , III ښخه په یوې معادله کې ږدو د x قیمت راکوي.

$$x=\frac{6-3(-2)}{4}=\frac{12}{4}=3$$
$$x=3$$
$$B=\{3,-2\}$$

۳- **د مساوات په طریقه حل:** په دې حالت مجهول په دواړو معادلو کې په نظر کې نیسو.

مثال:

$$3x-2y=1.........I$$
$$2x-y=4...........II$$
$$3x=2y+1(I)$$
$$x=\frac{2y+1}{3}$$
$$2x=y+4(II)$$
$$x=\frac{y+4}{2}$$
$$x=x$$
$$\frac{2y+1}{3}=\frac{y+4}{2}$$
$$2(2y+1)=3(y+4)$$
$$4y+2=3y+12$$

له پورته معادلو ښخه په یوه کې د دې قیمت په اېښودو x پیدا کوو.

$$y=10$$
$$x=\frac{2(10)+1}{3}=\frac{21}{3}=7$$
$$x=7$$
$$C=\{7,10\}$$

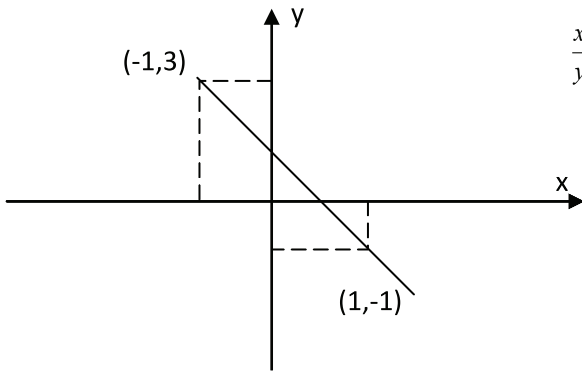
د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل

که اوله درجه دوه مجهوله معادله د y لپاره حل کړو؛ یعنې $y=f(x), y=ax+b$ فرض کړو واضح ده، چې د x د متحول په هر قیمت سره د y د متحول قېمت سره یوشی کېږي، په دې حالت کې د (y،x) مرتبې جوړې د حقیقي اعدادو ښخه لاسته راځي، که دغه مرتبې جوړې د وضعیه کمیاتو قایم ته انتقال کړو؛ نو هره مرتبه جوړه یو ټکی په ګوته کوي، د دغو ټکو د نښلولو ښخه د تابع ګراف جوړېږي. دا چې پورتنۍ تابع لومړۍ درجه اوله تابع ده؛ نو ګراف یې یوه کرښه ده، نوموړې تابع ته خطي تابع ویل کېږي.

مثال: د $2y+4x=2$ ګراف داسې رسم کړئ، چې $y=f(x)$ دی.

حل: څرنګه چې پورته اوله درجه تابع ده؛ نو د هغې ګراف مستقیم خط دی، چې کېدای شي له دوه یا ډېرو نقطو څخه تشکیل شي.

x	$-1,1$
y	$3,-1$



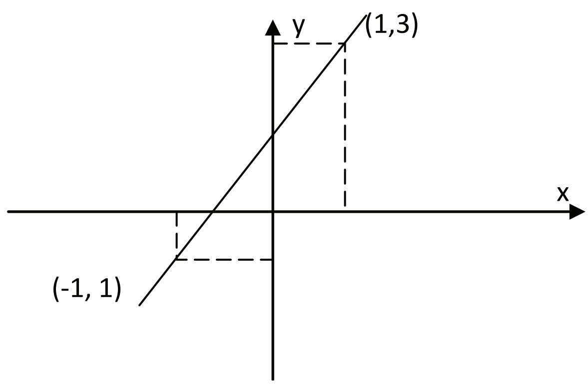
x	$0, \frac{1}{2}$
y	$1,0$

په محورونو باندې تقاطع

د $y=2x+1$ معادلې خطي ګراف رسم کړئ!

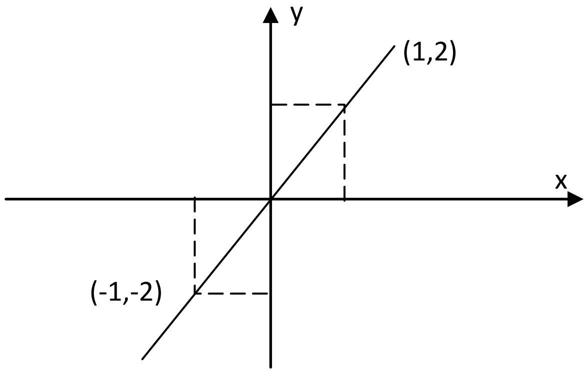
حل: له پورته معادلې سره سم عمل کوو.

x	$-1,1$
y	$1,3$



په محورونو باندې تقاطع

x	$0,-\frac{1}{2}$
y	$1,0$



x	$-1,0,1$
y	$-2,0,2$

د لاندې تابع ګراف رسم کړئ!

تمرين

د لاندې توابعو ګراف رسم کړئ!

1) $2y+4=8x$

2) $y=2x-2$

3) $3x+y=12$

4) $x - y = 4y - \frac{2}{3}x$

5) $\frac{2}{3}y+2x=\frac{1}{2}$

6) $4x - \frac{1}{2}=-y+1$

د ګراف په واسطه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

پوهېږو چې د اوله درجه دوه مجهوله معادلو سیستم له دوه معادلو څخه تشکیلېږي، یعني:

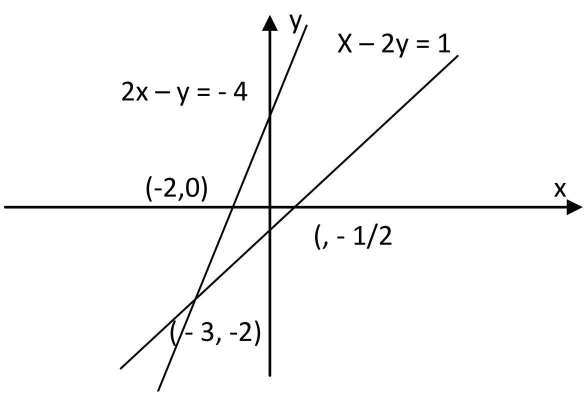
$$\begin{cases} a_1x+b_2y=c_2..........I \\ a_2x+b_2y=c_2.........II \end{cases}$$

نو هر یو مستقیم خط د وضعیه کمیاتو د مستوي د پاسه قایم تشکیلوي. په هغه حالت کې، چې دا دوه خطونه په خپلو کې یو بل قطع کړي د تقاطع نقطه یې یعنې(x,y) د هغې همزمان حل دی.

مثال: د لاندې معادلو سیستم د ګراف په طریقه حل کړئ!

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$$

حل: د یادو معادلو څخه د هرې یوې ګراف رسم کړئ!



ګرافونو ته په کتو د خطونو مشترکه نقطه (-3,-2) ده؛ یعنې د یاد سیستم $y=-2, x=-3$ همزمان حل دی.

د $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ خطونو سیستم ممکن منطبق یا موازي وي. د سیستم د موازي کېدو په حالت کې حل نه لري او د منطبق کېدو په حالت کې سیستم د لایتناهي لرونکی دی، ټاکلی حل نه لري.

د دې لپاره چې پوه شو خطونه متقاطع ، موازي که منطبق دي د سیستم د ضریبونو په منځ کې رابطې په لاندې ډول دي:

$$\frac{a1}{a2}=\frac{b1}{b2}\neq\frac{c1}{c2}$$

سیستم حل نه لري، خطونه موازي دي:

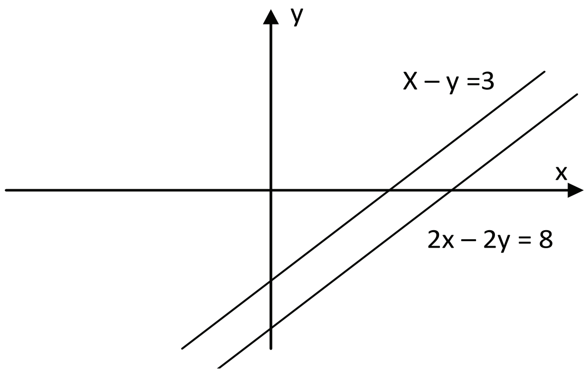
$$\frac{a1}{a2}=\frac{b1}{b2}=\frac{c1}{c2}$$

سیستم بې نهایت حل لري، خطونه منطبق دي:

$$\frac{a1}{a2}\neq\frac{b1}{b2}$$

د لومړۍ موضوع مثال:

$$\begin{cases} x-y=3 ....I \\ 2x-2y=8....II \end{cases}$$



$I.......$

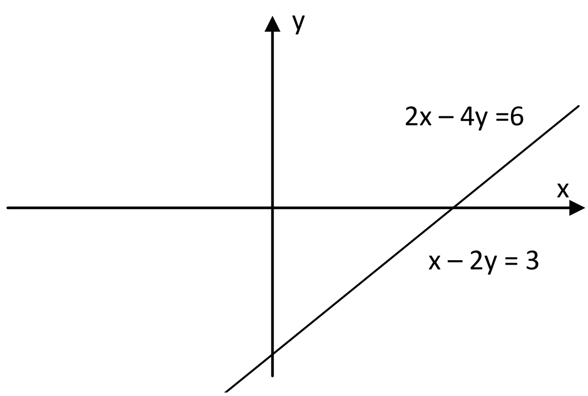
x	$0,3$
y	$-3,0$

$II.....$

x	$0,4$
y	$-4,0$

د دویمې موضوع مثال:

$$\begin{cases} 2x-4y=6........I \\ x-2y=3.........II \end{cases}$$



$I.......$

x	$0,3$
y	$-\frac{3}{2},0$

$II.....$

x	$0,4$
y	$-\frac{3}{2},0$

سوالونه

د ضرايبو د جوړولو په طريقه د لاندې د وه مجهوله معادلو سيستم حل کړئ!

1) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-4y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a+b=a \\ 4b=22-5a \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 5x-y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+3y=3 \\ 6x+15y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=3a+b \\ 3x-y=2a+4b \end{cases}$

په تعويضی طريقه يې حل کړئ :

$\begin{cases} y=2x \\ x+y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x+6y=2 \\ \frac{2}{3}x-4y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-2y \\ 2x-3y=25 \end{cases}$

د مساوات په طريقه يې حل کړئ:

$\begin{cases} x-2y=5 \\ 5x=y-2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-5y=17 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a-2b=-19 \\ 2a+5b=0 \end{cases}$

لاندې عبارتي مسايل حل کړئ:

۱- د دوو عددونو د جمع حاصل 5 او د تفريق حاصل يې 3 دی، عددونه پيدا کړئ!

۲- دوه عددونه پيدا کړئ، چې د لوی عدد دوه چنده د کوچني عدد له درې چنده څخه د 10 په اندازه لوی او $\frac{1}{5}$ حصه د لوی عدد له $\frac{1}{3}$ حصه د کوچني عدد څخه د 20 په اندازه کوچنی وي ؟

۳- د دوو عددونو د مربعاتو د تفريق حاصل 56 او د تفريق حاصل يې 4 دی، عددونه پيدا کړئ!

۴- احمد دوه رقمه پسته لري؛ يو ډول پسته يو کيلو گرام په 90 افغانۍ او دويم ډول يو کيلوگرام 60 افغانۍ قيمت لري. هغه غواړي 56 کيلو گرامه مخلوط جوړکړي، د هر کيلو گرام پستې څخه څو کيلو گرامه په کار ده ؟

۵- کچر او خر هر يو څو کيلو گرامه وزن انتقالوي. که چېرې د کچر بار 100 کيلو گرامه د خره د بار له وزن نه زيات شي، د خره د بار دوه چنده د کچر بار کېږي او که د خره د بار وزن 100 کيلو گرامه د کچر د بار له وزن څخه زيات شي، د کچر د بار وزن څوچنده د خره د بار د وزن کېږي ؟

۶- يو دهقان څو کورني چرگان او څو سويان لري. که چېرې چرگان او سويان50 سرونه او 140 پښې ولري ؟

د اولې درجې درې مجهوله معادلو د حل سیستمونه

د اوله درجه درې مجهوله معادلو عمومي شکل:

$$a_1x+b_1t+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

په پورته سیستم کې x,y,z مجهولات دي او a_1,a_2,a_3 ، b_1,b_2,b_3 او c_1,c_2,c_3 ثابتې معادلې دي. اوله درجه درې مجهوله معادلې د افنا د طریقې پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په څېر تعویضي حل کولای شو. په دې ځای کې غواړو څو مثالونه په افنا او تغویضي طریقه حل کړو.

مثال : دغه سیستم په تعویضي طریقه حلوو .

$$x+6y+3z=4.............I$$
$$2x+y+2z=3.............II$$
$$3x-2y+z=0.............III$$

حل: د x قیمت له I معادلې نه د y او z له جنس څخه په لاس راوړو .

$$x=-6y-3z+4..........IV$$

د x قیمت په II او III معادله کې ځای پر ځای کوو.

$$2(-6y-3z+4)+y+2z=3$$
$$-12y-6z+8+y2z=3$$
$$-11y-4z=-5..................V$$

د x قیمت په III معادله کې ځای پر ځای کوو.

$$3(-6y-3z+4)-2y+z=0$$
$$-20y-8z=-12...........IV$$

V او VI معادلې د y او z له جنس څخه د دوه مجهوله معادلو یو سیستم جوړوي.

$$-11y-4z=-5.........V$$
$$-20y-8z=-12.......VI$$

د پورته سیستم د حل لپاره د یو مجهول قیمت فرضاً z له V معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په VI کې وضع کوو.

$$-11y-4z=-5\rightarrow -4z=-5+11y$$
$$z=\frac{-5+11y}{-4}=\frac{-11+5}{4}.....VI$$

اوس کولای شو ولیکو چې:

$$-20y-8\left(\frac{-11y+5}{4}\right)=-12 \Rightarrow -20y+22y-10=-12$$

$$2y=-2$$

$$y=-1$$

د y قیمت په VIمعادله کې وضع کوو او د z قیمت پیدا کوو.

$$z=\frac{-11y+5}{4}=\frac{-11(-1)+5}{4}=\frac{11+5}{4}=\frac{16}{4}=4$$

که د y او z قیمتونه په IV معادله کې وضع کړو؛ د x قیمت پیدا کېږي.

$$x=-6y-3z=4............IV$$

$$x=6-12+4=-2$$

$$x=-2$$

په نتیجه کې د پورته معادلو د حل سیستم عبارت دی له $x=-2, y=-1, z=4$.

د افنا په طریقه حل

د اوله درجه درې مجهوله معادلو د سیستم په حل کې له مجهولاتو څخه یو افنا کېږي. وروسته د اوله درجه دوه مجهوله معادلو د سیستم په څېر عمل کېږي او مجهولات پیدا کېږي.

سوالونه: لاندې سیستمونه په افنا او تعویضي طریقه حل کړئ .

$$1)\begin{cases}2x-y+2z=-6\\x+2y-3z=9\\3x-y-4z=3\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}2x-2y+4z=0\\-x+2y-3z=1\\2x-2y-z=-3\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}x-2y+3z=10\\2x+3y+4z=-16\\3x-4y+5z=6\end{cases}\qquad 4)\begin{cases}2x-y+3z=5\\x+2y+z=-2\\3x+2y-2z=7\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}x+2y-z=-3\\2x+3y+4z=-16\\3x-4y+5z=16\end{cases}\qquad 6)\begin{cases}y-3z=-7-2x\\4y-x=-7-z\\3x=4+2y+2z\end{cases}$$

دویمه درجه یو مجهوله معادلې

$a \neq 0, ax^2+bx+c=0$ د دې معادلو عمومي شکل دی، داسې چې a,b,c ثابت اعداد، x دویمه درجه مجهول او متحول دی.

خصوصي حالتونه

۱- که چېرې a=0 وي معادله $bx+c=0$ د اولې درجې شکل غوره کوي، البته د اولې درجې یو مجهوله معادلو په حل پوهېږئ.

۲- که b=0 وي معادله د $ax^2+c=0$ شکل اختیاروي، چې په دې حالت کې معادله د دوه حقیقي مخالف الاشاره جذرونو لرونکې ده.

۱ مثال

$$4x^2-100=0 \rightarrow 4x^2=100 \rightarrow x^2=\frac{100}{4}=25$$
$$x^2=25 \rightarrow x=\pm 5$$

۳- که چېرې c=0 وي معادله د $ax^2+bx=0$ شکل لري، چې په دې حالت کې معادله د دوه حقیقي جذرونو لرونکې ده، یو له هغو څخه صفر اوبل یې $x_2=-\frac{b}{a}$ دی.

مثال

$$2x^2+5x=0 \rightarrow x(2x+5)=0$$
$$x=0$$
$$2x+5=0 \rightarrow 2x=-5$$
$$x=\frac{-5}{2}$$

د دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل

۱- د تجزیې په طریقه حل

د پولینومونو له تجزیې نه په استفادې، چې له هغې سره بلد یاست، هرکله چې یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله د تجزیې قابل وي؛ کولای شو د هغې جذرونه پیدا کړو.

مثالونه

$$x^2-3x+2=0$$
$$x-1=0$$
$$x=1$$
$$x-2=0$$
$$x=2$$

$$\sqrt{x^2-5x}=6$$
$$x^2-5x=36$$
$$x^2-5x-36=0$$
$$(x-9)(x+4)=0$$
$$x-9=0$$
$$x=9$$
$$x+4=0$$
$$x=-4$$

لاندې معادلې د تجزيې په طريقه حل کړئ؟

$1-3x^2-10x=0$ $\qquad$ $2-x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$

$3-x^2-16=0$ $\qquad$ $4-2(x^2+20)=21x$

$5-x^2-x-56=0$ $\qquad$ $6-26=31x+5x^2$

له تکميل مربع نه په ګټه اخيستو تجزيه حل کړئ؟

$1-3x^2-8x=0$ $\qquad$ $2-x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$

$3-2x(x+10=15+x$ $\qquad$ $4-18+5x^2+33x$

$5-4x+1+3x=0$ $\qquad$ $6-2x^2+3x-1=0$

د محمد بن موسي خوارزمي د فورمول په طريقه حل

پوهېږو، چې د درېيمه درجه يو مجهوله معادلو عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ دی، البته $a\neq 0$ وي له تکميل مر بع نه په ګټه اخيستو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(b^2-4ac\right)=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$
$$x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

د عملیاتو د اسانتیا لپاره $\Delta = b^2 - 4a$ وضع کوو (Δ) ممیزه یا قایمه نومېږي، چې لاندې امکانات په کې شاملېږي.

۱- که $\Delta > 0$ وي معادله د دوو مختلفو حقیقي جذرونو لرونکې ده، یعنې:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲- هر کله چې $\Delta = 0$ وي معادله د یو مضاعف جذر لرونکې ده، یعنې:

$$x_1, x_2 = \frac{-b}{2a}$$

۳- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حقیقي جذر نه لري. په دې حالت کې معادله د دوه مختلط جذرونو لرونکې ده.

که چېرې $\Delta > 0$ او $a > 0$ وي، د $y = ax^2 + bx + c$ ترینوم گراف د x محور په دوه نقطو کې قطع کوي.

د لاندې معادلو جذرونه د محمد بن موسی د فورمول پواسطه پیدا کړئ:

$$1) x^2 + x - 6 = 0 \qquad a = 1, b = 1, c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-6).1 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1+5}{2} + \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

د حل سیټ $A = \{x_1 = 2, x_2 = -3\}$

$$2) x^2 + 6x + 9 = 0 \qquad a = 1, b = 6, c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

$$x_1 = x_2 = -3$$

دویمه درجه یو مجهوله جذري معادلې

د هغې معادلو د حل لپاره چې مجهول تر جذر لاندې واقع وي، اول هغه افاده، چې د جذر لاندې ده یو طرف ته انتقالوو، وروسته د معادلې دواړه خواوې د جذر د درجې په توان پورته وړو، چې په دې حالت کې جذر له منځه ځي او د معادلې ځواب په لاس راوړو. که اړتیا وي، کولی شو څو ځله د معادلې اطراف د جذر د درجې په توان پورته یوسو.

مثال: د لاندې معادلو جذرونه په لاس راوړئ!

$$2-\sqrt{x}\sqrt{2x-3}=3$$
$$(\sqrt{x}\sqrt{2x-3})^2=(3)^2$$
$$x(2x-3)=9$$
$$2x^2-3x=9$$
$$2x^2-3x=9$$
$$2x^2-3x-9=0$$
$$2x^2-6x+3x-9=0$$
$$2x(x-30+3(x-3)=0$$
$$(x-3)(2x+3)=0$$
$$x-3=0, x=3$$
$$2x+3=0, x=-\frac{2}{3}$$

$$1-\sqrt{3x+10}=x+4$$
$$(\sqrt{3x+10})^2=(x+4)^2$$
$$3x+10=x^2+8x+16$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+2)(x+3)=0$$
$$x+2=0, x_1=-2$$
$$x+3=0, x_2=-3$$

نوټ: باید ووایو، چې په جذري معادلو کې حاصل شوي جذرونه حتماً امتحان کړو؛ ځکه په دې ډول معادلو کې په لاس راغلي ځینې جذرونه د قبول وړ نه دي.

لاندې عبارتي مسایل حل کړئ؟

١ - د دوو عددونو د جمع حاصل 16 او د ضرب حاصل یې 63 دی، عددونه لاس ته راوړئ؟

٢ - د دوو طاقو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل 323 دی، اعداد پیدا کړئ؟

٣ - د یو مثلث قاعده نظر ارتفاع ته 4cm زیاته ده معلومه کړئ، چې ارتفاع باید کومه اندازه وي؛ تر څو د مثلث مساحت 10.5Cm2 شي ؟

٤ - که د یوه عدد مربع پینځه چنده د هماغه عدد مساوي په 36 شي، اعداد پیدا کړئ؟

٥ - د یو قایم الزاویه مثلث یوه ضلع 7Cm اوبله نیمه قایمه ضلعه د 13 په اندازه له وتر نه کمه ده، د مثلث مساحت پیدا کړئ؟

٦ - د یو مستطیل طول نظر د هغې عرض ته 3m لوی دی، د مستطیل عرض داسې تعین کړئ، چې د هغې مساحت $40m^2$ شي ؟

٧ - په $2x^2-4x+1=0$ معادله کې x داسې تعین کړئ، چې:

a- معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

b- معادله یواځې یو حقیقي جذر ولري.

c- معادله هېڅ حقیقي جذر نه لري.

۸ - احمد ۵ کاله له محمود نه لوی دی. د عمر حاصل ضرب یې 100 کېږي، د هر یوه عمر پیدا کړئ؟

۹ - د دوو عددونو مجموعه 7 او د مربعاتو مجموعه یې 25 ده، عددونه کوم دي ؟

درېیمه درجه معادلې

$a_3x^2 + a_2x^2 + a_1x + \infty = 0$ د درېیمه درجه معادلو عمومي شکل دی، چې a_3, a_2, a_1, a_0 ثابت حقیقي او x د معادلې مجهول دی. البته $a_3 \neq 0$

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ $\quad$ $a_3x^3 + a_2x^2 = 0 \quad a_1 = 0, a_0 = 0$

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_0 = 0, a_1 = 0$ $\quad$ $a_3x^3 + a_2x^2 = 0, a_1 = 0$

$a_3x^3 + a_1x + a_0 = 0, a_2 = 0$ $\quad$ $a_3x^3 + a_1x + a_0 = 0 \rightarrow a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$a_3x^3 + a_0 = 0$

پورته معادلو ته مکعبي معادلې هم وايي.

څرنګه چې $a_3 \neq 0$ دی؛ نو کولای شو مکعبه معادله په a_3 تقسیم کړو، چې لاندې شکل اختیاروي.

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3}x_2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3} = 0$$

د درېیمې درجې معادلو حل: له دوهمه درجه معادلو څخه پوهېږو، چې د معادلې د جذرونو او ضریبونو ترمنځ رابطه شتون لري.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

په همدې ترتیب د درېیمه درجه معادلو د جذرونو او ضریبونو ترمنځ هم رابطه وجود لري.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{a_2}{a_3}$$

څرنګه چې د معادلو تیوري حکم کوي هغه معادلې، چې تاق درجه لري، حد اقل د یوه حقیقي جذرلرونکې دي؛ نو درېیمه درجه معادلې حد اقل د یوه حقیقي جذرلرونکې دي،

چې کولای شو د معادلې د جذرونو او ضریبونو ترمنځ رابطې څخه یې پیدا کړو. څرنګه چې پورته یادونه وشوه، کولی شو له $\frac{a_a}{a_3}$ حقیقي جذرونو له فکتورنو څخه درېیمه درجه معادلې پیدا کړو

مثال: د مکعبي معادلې $6x^3-29x^2+14x+24=0$ حقیقي جذر پیدا کړئ!

$6x^3-29x^2+14x+24=0$

حل: د 24 عدد فکتورونه عبارت دي له:

$\pm1,\pm,2,\pm,3\pm,4\pm,8\pm,12\pm,24$

د 6 فکتورونه عبارت دي له:

$\pm,1,\pm,2\pm,3\pm,6$

ممکنه نسبي جذرونه عبارت دي له:

$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{6},\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{3}{3},\frac{3}{6},\frac{4}{1},\frac{4}{2},\frac{4}{3},\frac{4}{6},\frac{8}{1},\frac{8}{2},\frac{8}{3},\frac{8}{6},\frac{12}{1},\frac{12}{2},\frac{12}{3},\frac{12}{6}$

$,\frac{24}{1},\frac{12}{2},\frac{24}{3},\frac{24}{6}$

دا شمېر عددونه زیات دي، سربېره پر دې اول تام عددونه امتحانوو، پس له امتحانه لیدل کېږي، چې 4 عدد یو د یادې معادلې له جذرونو څخه دی، چې لاندې لیدل کېږي.

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & -29 & +14 & +24 & 4 \\ & 24 & -20 & -24 & \\ \hline 6 & -5 & -6 & 0 & \end{array}$$

له ترکیبي تقسیم څخه نتیجه اخلو، چې د پورته مکعبې معادلې دویم فکتور:

$6x^2-5x-6=0$ دی.

$(2x-3)(3x+2)=0$

$x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{2}{3}$

د حالیه سیټ په منځ کې یاده مکعبه معادله:

$A=\left\{4,\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right\}$ حالیه سیټ

مثال: د $x^3 - x - 6 = 0$ معادلې حقیقي جذرونه

د 6 عدد فکتورونه عبارت دي له:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

وروسته له امتحانه لیدل کېږي، چې د یادې مکعبې معادلې حقیقي جذر2 دی.

$$
\begin{array}{cccc|c}
6 & 0 & -1 & -6 & 2 \\
 & 2 & 4 & 6 & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 0 &
\end{array}
$$

د $x^2 + 2x + 3$ پورته مکعبې معادلې دویم فکتور دی.

$$x_1, x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$$

نو یاده مکعبه معادله د یوه حقیقي او دوه مختلطو جذرونو لرونکې ده.

درېمه درجه تابع

ښکاري، چې $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ درېیمه درجه تابع ده، چې a,b,c او d ثابت عددونه، x مستقل متحول او y تابع متحول دی. د هغو نیمګړې بڼې هم د $y = f(x)$ ډول بیانوي.

د درېیمې درجې تابع د ګراف رسمول

د درېیمې درجې تابع د ګراف د رسمولو لپاره له ټولو نه مخکې د تابع صفري نقطې پیدا کوو، ځکه صفري قیمتونه د ګراف د رسمولو لپاره اسانتیا پیدا کوي. وروسته له دې د جذر لاندې او د جذرونو نه د باندې مناسب قیمتونه ټاکو، چې د تابع قیمتونه له هغې څخه پیدا شي.

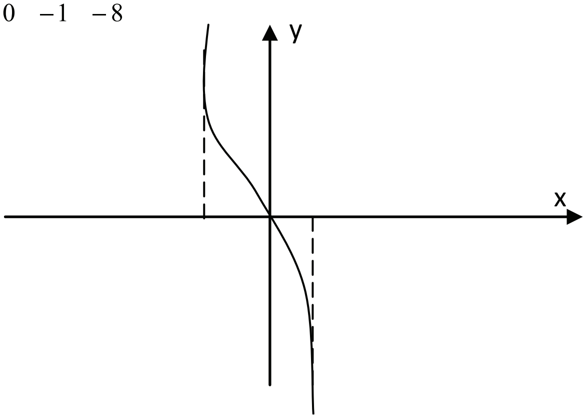
له (x,y) څخه جوړې شوې مرتبې جوړې د محورونو د پاسه انتقالوو، د تابع ګراف رسمېږي.

نوټ: له دې څخه د درېیمه درجه توابعو ګراف له ډېرو دقیقو مشتقاتو نه په ګټه اخیستنې رسمولای شو. د اوس لپاره له مستقیمې قیمت ګذارۍ څخه په مناسبو قیمتونو د

درېيمه درجه تابع ګراف رسموو، چې چندان دقيق نه دی.

مثال: د $y=-x^3$ تابع ګراف رسم کړئ!

x	-2	-1	0	1	-2
y	8	1	0	-1	-8



د درېيم څپرکي پوښتنې

د لاندې درېيمه درجه معادلو جذرونه پيدا کړئ، هغه تجزيه کړئ او وروسته د معادلې ګراف رسم کړئ؟

$1)\ 2x^3-5x^2-14x+8=0$

$2)\ 2x^3+3x^2-45x+54=0$

$3)\ x^3-9x^2+26x-24=0$

$4)\ 6x^3+2x^2-x-4=0$

$5)\ 30x^3-x^2-76x+15=0$

$6)\ x^3-6x^2+11x-6=0$

څلورم څپرکی

ردیفونه او سلسلې

ټولیزه موخه

پر ترادف او سلسله او د هغو پر ډولونو باندې پوهیدل او په ا قتصادي مسایلو کې له هغوڅخه ګټه اخیستل.

د زده کړې موخې: محصلین به د دې څپرکي په پای کې په لاندې موضوعاتو وپوهېږي:

- د ردیف او سلسلې د مفهوم درک او د ردیفونو او سلسلو په ډولونو پوهېدنه.
- د ردیفونو او سلسلو د قوانینو او اصولو په اړه پوهه او د عمومي ردیفونو او سلسلو د جمعې پیدا کول.
- د سلسلو د حاصل جمع لپاره د فورمولونو زده کول او د مسایلو په حل کې د هغې کارول.
- د سلسلو د ډول پیدا کولو په هکله پوهه او د سلسلو د جنس د ټاکلو په هکله د پوهانو د نظرونو کارول او د هغو تحلیل.

ردیفونه او سلسلې

هغه عددونه، چې تر یوې ټاکلې قاعدې لاندې یو پر بل پسې ترتیب شوي وي؛ ردیف نومېږي، **مثلاً:**

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n \ldots\ldots I$$

$$2,4,8,16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2^n \ldots\ldots\ldots II$$

$$1,1,\frac{3}{4},\frac{4}{8},\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{2^{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots III$$

پورته ترتیبونه ردیفونه تشکیلوي او هر جز یې د ردیف یو حد دی.

که په یوه ردیف کې د هغې حدونه محدود وي؛ ټاکلی (معین) ردیف ورته ویل کېږي، مثلاً:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{64},\frac{1}{256}$$

هغه ردیف، چې حدونه یې محدود نه وي؛ نا ټاکلی (غیرمعین) ردیف ورته ویل کېږي، مثلاً:

$$1,3,5,7,9,11.........,2^{n-1}$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}..........\frac{1}{n}$$

د هرn لپاره له طبیعي عددونوځخه یو ردیف ټاکل کېږي دا چې د عددونو شمېر لایتناهي دی؛ نو د ردیفونو د حدونو شمېر لایتناهي شو؛ بناً د هغې اخري حد نه شو ټاکلی. د یوه ردیف عمومي جمله، یعنې a_n د یوه فورمول پواسطه تعریفېږي او د ....,n=1,2,3 لپاره د هغې حدود لاسته راځي.

مثال: یو ردیف، چې د هغې عمومي جمله $a_n=\frac{1}{n^2}$ ده او $n\in N$ دی لیکو.

$$1,\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^2},\frac{1}{4^2},\frac{1}{5^2},.........\frac{1}{n^2}$$

په لاندې بڼه هم وړاندې کېږي.

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},.........\frac{1}{n^2}$$

د یوه ردیف عمومي حد ټاکل a_n

مثال: د n ام حد ردیف ....1,2,4,8,16 د عمومي حد د پیدا کېدو لپاره، لومړی باید د دوو متعاقبو دوو حدونو ترمنځ روابط مطالعه کړو. په پورته ردیف کې ښکاري، چې د دوو متعاقبو حدونو خارج قسمت 2 دی.

$a_1=1=2^0$

$a_2=2=2^1$ $\qquad$ $a_5=16=2^4$

$a_3=4=2^2$

$a_4=8=2^3$ $\qquad$ $a_n=2^{n-1}$

حسابي او هندسي ردیفونه

حسابي ردیفونه: د دې $a_1,a_2,a_3,a_4......a_n$ په څېر یو ردیف ته حسابي ردیف ویل کېږي.

داسې چې د هغې هر حد نظر خپل مخکيني حد ته د يوه مشخص او ثابت تفاضل لرونکی وي.

مثال: 1,4,7,10,13,16.........

3=4-1 د پورتني رديف تفاضل دی.

د 7-=5-2- رديف تفاضل دی........19- , 12- , 5- ,2

په عمومي شکل حسابي رديف د لاندې ترتيب لرونکی وي.

$a_1, a_1+d\ ,\ a_1+2d\ ,\ a_1+3d\ ,\ a_1+4d\ .....a_1+(n-1)d$

په پورته رديف کې n طبيعي عدد دی، d د رديف د دوه متعاقبوحدونو تر منځ مشترک تفاضل دی، په دې ځای کې d کولی شي مثبت، منفي او صفر وي.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ د ياد شوي رديف عمومي جمله ده.

تمرين: د لاندې رديفونو مشترک تفاضل پيدا کړئ او د هغې عمومي جمله وليکئ!

$1) -11,-7,-3,1,5,.....$

$2) 22,19,16,13,...$

$3) 25,(24,5),24,(23,5),....$

$a_{20} = ?\ a_{200} = ?$

$4) 2,-1,-4,-7,...$

$a_n = -94, n = ?$

۵- که چېرې د يوه رديف درېيم حد 7 وي او اووم حد يې 15 وي، پنځم حد يې پيدا کړئ!

۶- د پنځم سوال رديف وليکئ!

۷- دشپږم سوال 99 ام حد رديف وليکئ!

هندسي رديفونه

يو رديف ته هغه وخت هندسي ويل کېږي، چې د دوه متعاقبو حدونو ترمنځ نسبت يې مشخص او ثابت وي.

مثلاً: دا $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, ..., a_1r^{n-1}$ رديف يو هندسي رديف دی.

مثال:

$3,6,12,24,48,.......3r^{n-1}$

$3, 3\cdot2^1, 3\cdot2^2, 3\cdot2^3, 3\cdot2^4, ..., 3\cdot2^{n-1}$

د رديف له عمومي شکل او پورته مثال څخه په لاس راځي، چې د يوه هندسي رديف n ام حد عبارت دی له:

$a_n = (a_1 r^{n-1})\ n \in IN$

تمرین

د ردیفونو عمومي جملي درکړل شوي دي؛ ردیفونه ولیکئ!

۱- $a_n=\frac{1}{n+1}$ او $n\in N$ دی اته اول حدونه یې ولیکئ!

۲- $a_n(1+(-1)^n)$,$n\in N$ د یوه ردیف عمومي جمله ده، ذکر شوی ردیف ولیکئ!

۳- هغه ردیفونه، چې n ام حدونه یې درکړل شوی ولیکئ!

$$a^n=\left(1-\frac{1}{n})\right)n\in N \qquad a^n=\left(1+(-1)^n\right)^n n\in N$$

$$a^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{n+1})\right)n\in N \qquad a^n=\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\ n\in N$$

$$a^n=\left(\frac{1}{n}(\frac{1}{5})^n\right)n\in N \qquad a^n=\left(\frac{1}{(3n-1)^2}\right)\ n\in N$$

٤- که چېرته د یوه هندسي ردیف حد 4 او مشترک نسبت یې 4 وي، اتم حد په کار دی.

٥- که چېرته اول حد ½ او مشترک نسبت یې ½ وي په کار ده د هغې یوولسم حد او ردیف ولیکئ.

٦- اول حد 2 اودویم حد 6 او486= a_n ، n مطلوب دی.

٧- اول حد 3اودویم حد 6 او 96= a_n n مطلوب دی.

سلسلې

د تطبیقي ریاضي په ساحه، اقتصاد، صنعت او نورو کې وروسته د ردیفونو د حدونو د جمعې حاصل ته اړتیا وي؛ نو لازمه ده، چې په اړه یې معلومات حاصل کړو.

د $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_{n-1}$ ردیف په نظر کې نیسو، د ردیف قسمي حاصل جمع عبارت دی له:

$$s_1=a_1$$
$$s_2=a_1+a_2$$
$$s_3=a_1+a_2+a_3$$
$$s_4=a_1+a_2+a_3+a_4$$
$$s_n=a_1+a_2+a_3+a_4.....+a_{n-1}+a_n$$

دا چې د یوه ردیف حدونه ډېر زیات دي؛ نو کولای شو د هغې د جمعې حاصل په پراخه او لنډ ډول ولیکو، له یوناني توري؛ سګما څخه ګټه اخلو.

$$a_1+a_2+a_3+a_4.....+a_{n-1}+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

له Σ دې ښکته او پورته علامې ښیي، چې k ټول تام اعداد له یوه څخه تر n ، K د اندکس په نامه یادېږي، کولای شو دې ته ورته n,j,I او له نورو هم ګټه واخلو.

$$\sum_{k=1}^{n}2k=\sum_{i=1}^{n}2I=\sum_{j=1}^{n}2j=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+....2n$$

$$\sum_{k=1}^{n}5^k=5^1+5^2+5^3+.......5^n$$

$$J=I=K=1,2,3....n$$

مثال: دلاندې سلسلې د جمع حاصل د Σ په شکل ولیکئ!

$1+3+5+7+.....2^{n-1}$

حل: دا چې 2n-1 د پورته سلسلې عمومي جمله ده؛ نو لیکلی شو:

$$1+3+5+7+......2n-1=\sum_{k=1}^{n}2k-1$$

حل: د $1+4+9+16+.....+n^2$ سلسلې د جمع حاصل د $\sum$ په شکل ولیکئ!

$$1+4+16+......+(n-1)^2+n^2=\sum_{j}^{n}j^2$$

$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ د سلسلې د جمع حاصل بې نهایت دی، a1,a2,a3,….an اعداد د سلسلې حدونه دي او an د سلسلې عمومي جمله نومېږي.

هر کله چې $\sum_{k=1}^{n}a_k$ او $\sum_{k=1}^{n}b_k$ دوه سلسلې او c ثابت عدد وي، لاندې خاصیتونه یې د قسمي مجموعو لپاره سم دي.

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc,\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$c\sum_{k=1}^{n}(ak+bk)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

نوټ: د سګما مفهوم او قواعد د دې کتاب په لومړي څپرکي کې تفصيلي وړاندې شول.

تمرین: لاندې مجموعې پیدا کړئ!

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{2}{k+1}\quad,\quad\sum_{j=1}^{4}j^2\quad,\quad\sum_{k=1}^{10}2\quad,\quad\sum_{I=1}^{6}3i$$

$$\sum_{j=1}^{5}\frac{j-1}{j+1}\quad,\quad\sum_{n=1}^{6}\frac{n^2+1}{n}\quad,\quad\sum_{k=1}^{i}(n+\frac{1}{n})$$

حسابي سلسله

که یو حسابي ردیف په نظر کې ونیسو.

$a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+3d,....a_1+(n-1)d$

د پورتني ردیف مجموعه یوه حسابي سلسله ده.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_1+(a-1)d=a_1+a_1+d+a_1+2d+....+a_1+(n-1)d$$

د يادې سلسلې قسمي مجموعې:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_1 + d$$
$$s_3 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d$$
$$s_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + ... + a_1 + (n-1)d$$

د حاصل جمع لپاره د فورمول د لاسته راوړلو په خاطر يوه حسابي سلسله S_n په دوه طريقو ليکلی شو:

$$Sn = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + ...a_1 + (n-1)d$$
$$Sn = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-3) + ... + a_1$$

پورتنۍ رابطې خوا په خوا جمع کوو.

$$2S_n = 2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d + ... + 2a1 + (n-1)d$$
$$2S_n = n(2a1 + (n-1)d$$
$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 = a_1 = (n-1)d)$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 = a_1 = (n-1))$$
$$S_n = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

د مسلسلو طبيعي اعدادو د جمعې حاصل

که په يوه حسابي سلسله کې $d>0$ وي، سلسله متزايده ده، که چېرې $d<0$ وي، متناقصه سلسله ورته ويل کېږي.

پوهېږو چې د يوې حسابي سلسلې اخري حد:

$$L = a + (n-1)d$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

په حسابي تصاعد کې د جملو جوړونه

که په يوه حسابي سلسله کې اول او اخر حد معلوم وي، د d د قيمت په اېښودو کولی شو سلسله پوره کړو.

a..............L

جمله m

$n=m+2$ د سلسلې د جملو شمېر

$$L=a+(n-1)d \Rightarrow (n-1)d=L-a \Rightarrow$$
$$d=\frac{L-a}{n-1} \Rightarrow d=\frac{L-a}{m+1}$$

مثال: په يوه حسابي سلسله کې، چې اول حد يې 7 او اخري حد يې 9- دی، درې جملې جوړې او سلسله وليکئ!

$$d=\frac{L-a}{m+1}$$
$$d=\frac{-9-7}{3+1}=\frac{-16}{4}=-4$$

متناقصه سلسله 9 – 5 - 1 – 3 + 7

د حسابي سلسلې د مسلسلو جفتو اعدادو د جمعې حاصل

پوهېږو چې مسلسل جفت عددونه په حسابي سلسله کې په لاندې ډول دي.

$$2+4+6+8+...+2n$$
$$S=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$
$$S=\frac{n}{2}(4+2n-2) \Rightarrow S=\frac{n}{2}(2+2n)$$
$$S_n=n(1+n)$$

د حسابي سلسلې د مسلسلو طاقو اعدادو د جمعې حاصل

پوهېږو چې مسلسل طاق اعداد په سلسله کې په لاندې ډول دي.

$$1+3+5+7+...+2n-1$$
$$S=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$
$$S=\frac{n}{2}(2+(n-2)2) \Rightarrow S=\frac{n}{2}(2-2+2n)$$
$$S=n^2$$

که په حسابي تصاعد کې د جملو تعداد طاق وي، مجموعه يې عبارت ده له:

N د سلسلې د جملو شمېر دی:

وسطي جمله $S = n$

مثال:

5 , 7 , 9 , 11 , 13 , 15 , 17 , 19 , 21

$S = 9\cdot13 = 117$

که د m جملې اوله مجموعه او د m جملې اخره مجموعه معلومه وي، د اولې او اخري مجموعې د ټاکلو لپاره په حسابي تصاعد کې د لاندې رابطې څخه ګټه اخیستل کېږي.

$$a_1 + a_n = \frac{\text{د } m \text{ مجموعې اخره جمله} + m \text{ اوله مجموعه}}{M}$$

په یوه حسابي تصاعد کې، چې 9 جملې لري، د اولو دوو جملو مجموعه یې 12 او د اخرو دوو جملو مجموعه یې 40 ده، د دې تصاعد د جملو مجموعه پیدا کړئ!

$n = 9$

$a_1 + a_n = \frac{12+40}{2} = 26$

$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S = \frac{9}{2}(26) = 9\cdot13 = 117$

د څلورم څپرکي پوښتنې:

۱- د ټولو تامو عددونو مجموعه د 10 څخه تر 500 پورې، چې د دوو مسلسلو عددونو ترمنځ فرق یې 14 دی، پیدا کړئ؟

۲- په یوه حسابي سلسله کې a1=3، d=5 ده، څو حدونه ورسره جمع شي، چې مجموعه یې 255 شي؟

۳- که په یوه حسابي سلسله کې $a_1=6$, $d=3$ وي $S_{12}=?$, $a_{12}=?$

٤- د لاندې جفتو او طاقو مسلسلو اعدادو د سلسلې د جمعې حاصل پیدا کړئ؟

1+2+3+4+5+…..+83

۵- 72 ام حد د تصاعد M+r , M+2r , M+3r پیدا کړئ؟

پنځم څپرکی

لوګارتم

ټولیزه موخه:
په پیچلو محاسبو او اقتصادي مسایلو کې د لوګاریتم په اړه پوهیدل او د هغه کارول

د زده کړې موخې: ددې څپرکي په پای کې به محصلین په لاندې مواردو وپوهیږي:

- د لوګارتم د مفهوم درک او د هغه معادل د لوګارتم په قوانینو پوهېدنه.
- په محاسبو کې د لوګارتم د قوانینو کارونه، په ځانګړې توګه په اقتصادي محاسباتو کې، لکه مرکبه ربح.
- د لوګارتم په قاعدې پوهېدنه، په یو او بل د لوګارتم د قاعدو بدلول، طبیعي او معمولي لوګارتم.
- د لوګارتم د جدول ترتیبول، اهمیت او له جدول څخه ګټه اخیستل.
- لوګارتم د ریاضي یو لوی بحث دی، چې د ضرب، تقسیم عملیې او لوی توان لرونکي اعداد څو ځله لنډوي او اسانوي.

د مثال په ډول: $\sqrt[97]{3.54},(13.052)^{2003},(3.035)^{50}$ او نور په مستقیم ډول ډېرې ستونزې لري؛ خو د لوګارتم د عملیې په واسطه په اسانه او دقیق ډول حل کېږي.

لوګارتم په کال 1614 د Jan napair انګلیسي عالم په واسطه کشف شو.

که د اکسپونانسیلي $a^x = N$ معادله په نظر کې ونیسو، داسې چې N یو مثبت عدد او a یو مثبت او $a \neq 0.1$ وي. په دې حالت کې x د N لوګارتم په قاعده د a نومېږي او داسې لیکل کېږي.

$x = Logarith_a N = Log_a N$

پورتنۍ رابطې ښيي چې:

$x = Log_a N, N = a^x$ سره معادل دي.

مثال: $3^2 = 9$ معادله او لوګارتمي شکل يې $Log_3 9 = 2$

$8 = 2^3$ شکل $Log_2 8 = 3$

تمرين: لاندې افادې په لوګارتمي شکل وليکئ!

$5^a = 1$ $\qquad 2^5 = 32$ $\qquad \dfrac{1}{x} = e^{-i}$

$10^3 = 1000$ $\qquad \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$ $\qquad a^{-b} = 1002$

لاندې افادې د هغې په معادل شکل وليکئ!

$Log_5 5 = 1$ $\qquad Log_a \dfrac{1}{10^6} = y$ $\qquad Log_m 100 = n$

$Log_5 625 = 4$ $\qquad Log_n m = d$ $\qquad Log_a 2^{-b} = n$

د معادل کېدو نه په ګټه اخيستو د اکسپوناسيل معادله او لوګارتم په لاندې a,y,x مساوات کې پيداکوو.

مثال:

$Log_3 y = 6 \qquad y = 3^6 \Rightarrow y = 729$

$Log_a \sqrt{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{4} = a^{1/2} \Rightarrow a = 2$

تمرين: د n,m او b قيمتونه له لاندې دوه رابطو څخه ټاکو.

$Log_{10} 100000 = n$ $\qquad Log_5 10^{-5} = m$ $\qquad Log_b \sqrt[3]{64} = \dfrac{1}{3}$

$Log_y y = m$ $\qquad Log_m x = 1$ $\qquad Log_b 81 = 4$

د لوګارتم خاصيتونه

څرنګه چې $y = a^x, Log_a y = x$ يو له بل سره معادل دي؛ نو کولی شو، چې د لوګارتم خواص د $y = a^x$ تابع له خواصو څخه په لاس راوړو.

اول خاصيت: (۱) لوګارتم د b په هرې مثبتې قاعده داسې، چې $b \neq 1$ وي.

$Log_b 1 = 0 \Rightarrow 1 = b^0$

دويم خاصيت: د هر عدد لوګارتم په خپله قاعده له يوه سره مساوي دی.

هر کله چې (b) يو مثبت عدد او $b \neq 1$ وي.

$b = b^1 \Rightarrow Log_b b = 1$ $\qquad$ $\mathrm{Log}_{0.05} 0.05 = 1$

درېيم خاصيت: هر کله چې $b \neq 1, b > 0$ وي؛ نو د هر (r) لپاره لرو چې:

$b^r = b^r \Rightarrow Log_b b^r = r$ $\qquad$ $\mathrm{Log_b b^r = r}$

$7^{-6} = 7^{-6} \Rightarrow Log_7 7^{-6} = -6$

تمرين: لاندې لوګارتمونه محاسبه کړئ!

$1) Log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = ?$ $\qquad$ $Log_{10} 0.0001 = ?$

$2) Log_8 8^{-3}$ $\qquad$ $\mathrm{Log}_4 16 = ?$

$3) \mathrm{Log}_{100} (100) 0 = ?$ $\qquad$ $\mathrm{Log}_5 25 = ?$

$4) \mathrm{Log}_3 \sqrt{3} = ?$ $\qquad$ $\mathrm{Log}_4 \frac{1}{16} = ?$

څلورم خاصيت: $Log_b m \cdot n = Log_b m + Log_b n$

ثبوت: که $Log_b n = y, Log_b m = x$ فرض شي، پورتنۍ رابطې خوا په خوا سره ضرب کوو.

$m \cdot n = b^x \cdot b^y \Rightarrow m \cdot n = b^{(x+y)}$

اطراف د لوګارتم په قاعده نيسو.

$Log_b mn = Log_b b^{x+y}$

نظر درېيم خاصيت ته لرو.

د x او y قيمتونو په اېښودلو لرو چې: $Log_b mn = Log_b m + \log_b n$

مثال:

$Log_8 8x = Log_8 8 + Log_8 x$
$= 1 + Log_8 x$

مثال:

$$Log_5 \frac{4y}{5x} + Log_5 \frac{5x^2}{y} = Log_5 \frac{4y}{5x} \cdot \frac{5x^2}{y} = Log_5 4x$$

مثال:

$$Log_{10}10x^2y = Log_{10}10 + Log_{10}x^2 + Log_{10}y = 1 + Log_{10}x^2 + Log_{10}y$$

تمرین

$Log_5 25 \cdot 125 = ?$ $\qquad$ $Log_3 \frac{3x^2}{y} + Log_3 \frac{y^2}{3x} = ?$

$Log_4 16 \cdot x \cdot 64y^2 = ?$ $\qquad$ $Log_5 25m^2n^{-4} + Log_5 5\frac{n^3}{m^4}$

پنځم خاصیت: $Log_b \frac{m}{n} = Log_b m - Log_b n$

ثبوت: پوهېږو چې $m = \frac{m}{n} \cdot n$ دی. د پورتني مساوات له اطرافو څخه د b په قاعده لوګارتم نیسو.

$$Log_b m = Log_b \frac{m}{n} \cdot n \Rightarrow Log_b \frac{m}{n} + Log_b n$$

$$Log_b \frac{m}{n} = Log_b m - Log_b n$$

مثال:

$$Log_5 \frac{120}{210} = Log_5 120 - Log_5 210 => Log_5 \frac{4}{7} = Log_5 4 - Log_5 7$$

مثال:

$$Log_y 10y^2x - Log_y 2xy = Log_y \frac{10y^2x}{2xy}$$

$$= Log_y 5y = Log_y 5 + Log_y y = Log_y 5 + 1$$

څلورم او پنځم خاصیت: راښیي، چې کولای شو د هغې پو سیله د جمعې او تفریق مسایل په ضرب او تقسیم او برعکس بدل کړو.

شپږم خاصیت: د هرr لپاره لاندې رابطه سمه ده.

$$Log_a m^r = rLog_a m$$

ثبوت: فرضاً $x = Log_a m$ دی؛ نو د هغې $m = a^x$ معادله کیدای شي.

د معادل رابطې دواړه خواوې د r په توان پورته وړو

$$m^r = (a^x)^r$$

د دې رابطې له دواړو خواو څخه د a په قاعده لوګارتم نیسو.

$$m^r = a^x$$

$$Log_a m^r = Log_a a^x \rightarrow x = rLog_a m$$

مثال: لاندې لوګارتمونه حساب کړئ!

$Log_2 64 = ? \quad Log_2 64 = Log_2 2^6 = 6Log_2 2 = 6$

$Log_5 125 = ? \quad Log_5 125 = Log_5 5^3 = 3Log_5 5 = 3$

$Log_{10} 0.0001 = ? \quad Log_{10} 10^{-4} = -4Log_{10} 10 = -4$

$Log_{10} \frac{1}{1000} = ? \quad Log_{10} 10^{-3} = -3Log_{10} 10 = -3$

تمرین: لاندې لوګارتمونه حساب کړئ!

$Log_3 \frac{1}{9} = ? \qquad Log_4 \frac{1}{16} = ? \qquad Log_4 \sqrt{256} = ?$

$Log_{10} (100)^{\frac{3}{2}} = ? \qquad Log_3 (27)^{\frac{1}{3}} = ? \qquad Log_3 3^5 \cdot 21 = ?$

اووم خاصیت $Log_{a^b} m = \frac{1}{b} Log_a m$

ثبوت: فرضوو، چې $Log_a bm$ دی نو د هغې معادله رابطه ده:

$m = \left(a^b\right)^x$

$m = \left(a^x\right)^b$

b ام جذر د پورته رابطې $m^{1/b} = a^x$ د دې رابطې له اطراف څخه د a په قاعده لوګارتم نیسو.

$Log_a m^{1/b} = Log_a a^x$

د شپږم خاصیت نه په ګټه اخیستو کولای شو ولیکو.

$\frac{1}{b} Log_a m = xLog_a a$

$\frac{1}{b} Log_a m = x \Rightarrow Log_{a^b} m = \frac{1}{b} Log_a m$

مثال:

$Log_{16} 4 = Log_{4^2} 4 = \frac{1}{2} Log_4 4 = \frac{1}{2}$

مثال:

$Log_{25} 125 = Log_{5^2} 125 = Log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} Log_5 5 = \frac{3}{2}$

تمرین: د لوګارتم د اووم خاصیت نه په ګټه اخیستو ځوابونه ولیکئ!

$Log_{\frac{1}{9}} 27 = ? \qquad Log_8 4 = ? \qquad Log_{\frac{1}{9}} 5^{-2} = ?$

$Log_{\frac{1}{16}} 8 = ? \qquad Log_{64} 16 = ? \qquad Log_{\frac{1}{5}} 5 = ?$

د لوګارتم د قاعدې د بدلولو فورمول

که چېرې $b \neq 1, a \neq 1, x > 0, a > 0$ وي؛ نو لرو چې:

$$Log_b x = \frac{Log_a x}{Log_a b}$$

د پورته فورمول نه په ګټه اخیستو، کولی شو لوګارتم له یوې قاعدې څخه بلې قاعدې ته واړوو.

ثبوت: فرض کوو، چې $Log_b x = y$ او د هغې معادل $x = (b)^y$ دی.

د معادلې رابطې له دواړو خواوو څخه د a په قاعده لوګارتم نیسو.

$$Log_a x = Log_a b^y = yLog_a b$$
$$Log_a x = Log_b x \cdot Log_a b$$
$$Log_b x = \frac{Log_a x}{Log_a b}$$

په رابطه کې د y قیمت ږدو.

یاده دې وي، چې د a په قاعده د عددونو لوګارتم لرو.

که چېرې x په a عوض کړو، رابطه لاندې شکل نیسي.

$$Log_b a \cdot Log_a b = 1$$

مثال: $Log_9 27$ محاسبه کړئ!

$$Log_9 27 = \frac{Log_3 27}{Log_3 9} = \frac{Log_3 (3)^3}{Log_3 3^2} = \frac{3Log_3 3}{2Log_3 3} = \frac{2}{3}$$

مثال: $Log_5 100$ حساب کړئ، په هغه صورت کې، چې $Log_{10} 5 = 0.7$ وي.

د فورمول نه په ګټه اخیستو:

$$Log_5 100 = \frac{Log_5 100}{Log_{10} 5} = \frac{Log(10)^2}{Log 5} = \frac{2}{0.7} = \frac{20}{7}$$

تمرین: لاندې لوګارتمونه حساب کړئ!

$Log_{64} 16 = ?$ $\quad$ $\mathrm{Log}_{16} 32 = ?$ $\quad$ $\mathrm{Log}_{0.01} 0.0001 = ?$

$\mathrm{Log}_{121} 14641 = ?$ $\quad$ $\mathrm{Log}_{100} 0.001$ $\quad$ $\mathrm{Log}_{0.01} 1000 = ?$

معمولي لوګارتم او طبیعي لوګارتم

لکه څنګه چې پوهېږو، هر مثبت عدد خلاف د یوه لوګارتم قاعده کېدای شي، ولې هغه قاعدې، چې په عمل کې په کار وړل کېږي، د e عدد او 10 عدد دی، e یو غیر نسبتي عدد دی، چې تقریبي قیمت یې $e = 2.718281828$ دی.

هغه لوګارتم، چې قاعده یې e ده د طبیعي لوګارتم په نوم یادېږي، په لاندې ډول ښودل کېږي.

$Lnx = Log_e x$

هغه لوګارتم، چې قاعده یې 10 ده، د معمولي لوګارتم په نوم یادېږي او په لاندې ډول دی.

$$Logx = Log10x$$

$$Log0.0001 = Log10^{-4} = -4$$

$$Log1000 = Log10^{3} = 3$$

$$Log_e e \cdot e \cdot e \cdot = Log_e e^{3} = 3$$

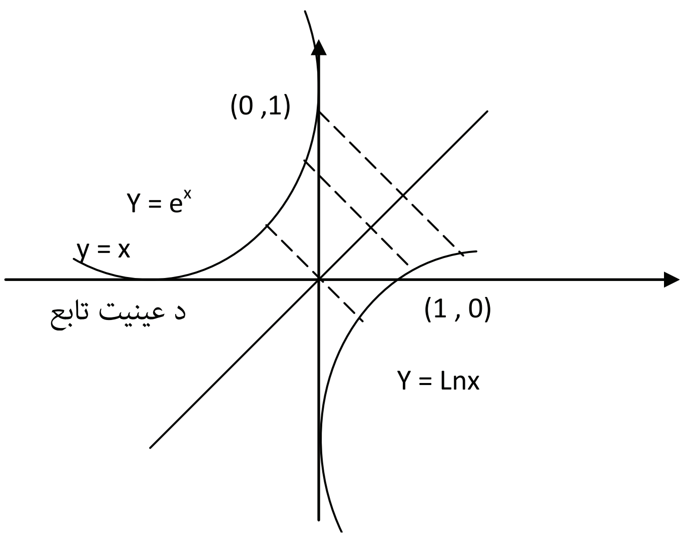
$$Lne \cdot e \cdot e \cdot = Lne^{3} = 3$$

$$Ln\frac{1}{ee} = Ln\frac{1}{e^{2}} = Lne^{-2} = -2$$

$$Ln\frac{1}{e^{-3}} = Lne^{3} = 3$$

$$Log100000 = Log10^{5} = 5$$

نوټ: لوګارتمي تابع او د هغې معادل په اصل کې د یو بل معکوس دي، کولی شو موضوع په لاندې ګراف کې ښه درک کړو.



د عدد ليکلو علمي طريقه

په ساينس او رياضياتو کې داسې ډېر ځايونه شته، چې له لويو او کوچنيو عددونو سره سروکار لري، لکه:

1- يو نوري کال تقريباً 500.000.000.000 ميله فاصله ده.

2- په متريک سيستم کې يو ملي مکرون 0.000.000.001 متر دی.

3- د يو ماليکول اکسيجن وزن 0.0000000000000000000053 ګرامه دی.

دا عددونه کولی شو په لنډ ډول وليکو:

$500000000000 = 5 \cdot 10'' m$

$0.0000000000000000000053 = 5.3 \cdot 10^{-22}\, gr$

$0.000000000001 = 10^{-12}$

يو عدد په علمي طريقه ليکل شوی، که لاندې شکل ولري:

که چېرې $1 < a < 10$ وي او n تام عدد وي.

تمرين: لاندې عددونه د ليکلو علمي روش تطه راوړئ!

$0.000452 = ?$	$0.102 = ?$
$245000000 = ?$	$235.03 = ?$
$4300000 = ?$	$3004.001 = ?$
$502000000 = ?$	$0.000000000000000402 = ?$

کرکټرستيک او مانتيس (مشخصه او مانتيسه)

د هر عدد لوګارتم په عمومي توګه له دوو برخو جوړ وي. کرکټرستيک او مانتيس، چې کرکټرستيک صحيح برخه او مانتيس د لوګارتم اعشاري برخه ده.

مشخصه د دوو لاندينيو اصلونو په اساس تعينېږي.

۱- که چېرې N له يوه څخه لوی وي، د يوه عدد د لوګارتم مشخصه د يوه په اندازه د اعشاري علامې د چپ طرف د ارقامو د تعداد څخه کمه وي، يعنې که د چپ طرف د رقمونو شمېر K وي.

نو $= k - 1$ مشخصه ده.

۲- که چېرې N له يوه څخه کوچنی وي، د N عدد لوګارتم مشخصه منفي ده، البته د لوګارتم اعشاري برخه د اعدادو د لوګارتم له جدول څخه اخيستل کېږي، بناءً د مکملو اعدادو لوګارتم عبارت دی له:

LogN = مانتیسه + مشخصه

دا چې مانتیسه هر وخت مثبته وي، باید (K-) مشخصه په 10 – K – 10 شکل ولیکل شي.

د مثال په ډول: که 0.57325 د یوه عدد د لوګارتم مانتیسه وي؛ نو که مشخصه یې په دې حالت کې 2 , 1 , 0 , 1 - , 2 - وي، په دې حالت کې یې لوګارتم په لاندې ډول لیکل کېږي.

8.57325 – 10 , 9.57325 – 10 , 0.57325 , 1.57325

مثال: د لاندې عدد د لوګارتم کرکټرستیک پیدا کړئ!

$Log1000.0$

څرنګه چې د چپ طرف د اعشاري رقمونو شمېر 4 دی؛ نو د ذکر شوي عدد کرکټرستیک $K-1=4-1=3$ دی.

له یوه نه د کوچنیو عددونو د لوګارتم کرکټرستیک د منفي علامې لرونکی دی، که د صفرونو تعداد د اعشاري علامې نه وروسته n وي، د دې اعشاري کسر کرکټرستیک (n+1) – دی.

مثال: د 0.00025 عدد د لوګارتم کرکټرستیک وټاکئ!

څرنګه چې د اعشاري علامې څخه وروسته 3 صفرونه دي؛ نو $-4=-(3+1)$

تمرین: د لاندې لوګارتم کرکټرستیک وټاکئ!

Log 0.1 , Log0.005 , Log23005

$Log2.3\cdot10^{-5}$, $Log232\cdot10^{2}$, $Log0.02\cdot10^{-3}$

Log 45.3 , Log3000.0 , $Log200\cdot10^{3}$

مانتیس او د یوه عدد د لوګارتم د مانتیس ټاکل

لکه څنګه چې مخکې ورته اشاره وشوه، د یوه عدد د لوګارتم مانتیس د هغه عدد د لوګارتم اعشاري برخه تشکیلوي، چې هر وخت یو اعشاري عدد مثبت وي او د اعدادو لوګارتم د جدول څخه اخیستل کېږي، لکه:

$$Log_{10}20=Log_{10}2\cdot10=Log_{10}10+Log_{10}2$$
$$Log20=1+0.30103=1.30103$$

0.30103 اعشاري کسر د 20 عدد د لوګارتم د مانتیس په نامه یادېږي.

$$Log300 = Log100 \cdot 3 = Log100 + Log3 = 2 + 0.4771$$
$$Log300 = 2.4771$$

مثال: د 0.002 عدد لوګارتم پیدا کوو.

$$Log0.002 = Log10^{-3} \cdot 2 = Log10^{-3} + Log2 = -3 + 0.30103$$

دا چې د سوال په حل کې مانتیس منفي دی، کولی شو په لاندې ډول یې ثبت کړو.

مثال:

$$1)1 - 0.30103 = 0.69897$$

مثال:

$$LogN = -3.23403 = -3 - 0.23406$$
$$= -3 - 0.23403 + 1 - 1 = 4 + 0.76597 = -44.766597$$

د یادولو وړ ده، چې د یوه عدد د لوګارتم مانتیس په قاعدې پورې تړلی وي، که ذکر شوی عدد لس یا لس چنده لوی یا کوچنی کړو، د یاد عدد د لوګارتم په مانتیس کې تغیر نه راځي.

مثال:

$$Log_{10}583 = 2.76567$$
$$Log58300 = Log583 \cdot 100 = Log583 + Log100 = 4.76567$$
$$Log0.00583 = Log583 \cdot 10^{-5}$$
$$Log583 + Log10^{-5} = 2.76567 + (-5) = -3.76567$$
$$Log0.0000583 = Log583 \cdot 10^{-7} = Log583 + Log10 - 7$$
$$= 2{,}765667 - 7 = -576567$$

د لوګارتم له جدول نه د ګټې اخیستنې طریقه

لکه څنګه چې د لوګارتم په حسابي معادلو کې د 10 قاعده د استعمال زیات موارد لري، غواړو، چې د 10 قاعدې د لوګارتم له جدول څخه د ګټې اخیستنې طریقه زده کړو.

$$Log397 = ?$$
$$Log397 = Log3.97 \cdot 10^2 = Log3.97 + Log10^2$$
$$= 0.5988 + 2 = 2.5988$$

په لسمه قاعده کې د لوګاريتمي اعدادو جدول

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	10000,	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3665	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4569	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5056	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5898	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6291	0,6304	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6703
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7412	0,7412	0,7427	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551

په لسمه قاعده كې د لوګاريتمي اعدادو جدول

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7689	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7714
6,0	0,7782	0,7789	0,7769	0,7803	0,7810	0,7718	0,7825	0,7732	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,9793	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8229	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8328
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8589	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8983	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	30,906	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9196	0,9199	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9707	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9732	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952

له پورتني جدول څخه دوه لومړي رقمونه 39 د N له ستون څخه او 7 عدد په N سطر کې پیدا کوو، هغه عدد چې د سطر او ستون په تقاطع کې واقع دی، د 397 عدد د لوګارتم مانتیس دی.

انتي لوګارتم

د 117 عدد لوګارتم عبارت دی له 2.0682 څخه؛ نو 117 عدد د2.0682 د انتي لوګارتم په نوم یادیږي؛ نو ویلی شو، چې هر عدد د هماغه عدد انتي لوګارتم دی.

مثال: $Logx = 2.5988$ دی؛ نو x به څو وي؟

حل: لکه څنګه چې x د 2.5988 انتي لوګارتم دی، د کرکټرستیک په نظر کې نیولو او له جدول څخه په ګټې اخیستنې $x = 397$ دي.

کو لوګارتم

د تعریف له مخې کو لوګارتم د هماغه عدد له معکوس لوګارتم څخه عبارت دی.

$$CoLogN = Log\frac{1}{N} = Log1 - LogN = -LogN$$

$$CoLogN = -LogN$$

مثال: که $Log35.7 = 1.55230$ وي، د ذکر شوي عدد کو لوګارتم وټاکئ!

$$Log35.7 = 1.55267$$

$$CoLog35.7 = ?$$

حل: پوهیږو چې $CoLogN = Log\frac{1}{N}$ دی.

$$CoLog35.7 = Log\frac{1}{35.7} = Log1 - Log35.7 = 1010 - 1.55267 = 8.44733 - 10$$

0.30103 اعشاري کسر ته د 20 د عدد د لوګارتم مانتیس وایي.

$$Log300 = Log100 \cdot 3 = Log100 + Log3 = 2 + 0.4771$$

$$Log300 = 2.4771$$

د ذکر شوي عدد اعشاري کسر، د 300 د لوګارتم مانتیس دی.

مثال: د 0.002 عدد لوګارتم پیدا کوو.

$$Log0.002 = Log10^{-3} \cdot 2 = Log10^{-3} + Log2 = -3 + 0.30103 = -2,69897$$

که د سوال په حل کې مانتیس منفي راغی، کولی شو په لاندې طریقه یې مثبت کړو.

مثال:

$$Log_{10}\frac{1}{2} = Log_{10}1 - Log_{10}2 = 0 - 0.30103$$

د دې لپاره چې مثبت مانتیس په لاس راشي، د 1 عدد له هغه سره جمع او منفي کوو.

$$1 - 1 - 0.30103 = \bar{1}.69897$$

مثال:

$$LogN = -3.23403 = -3 - 0.23403 = -3 - 0.23403 + 1 - 1 = -4 + 0.76597$$
$$= -3,23463$$

انټرپولېشن Inter polation

د څلور رقمي عدد د لوګارتم مانتیس په څلور رقمي جدول کې او د پینځه رقمي عدد د لوګارتم مانتیس له پینځه رقمي جدول څخه په لاس راځي. مګر ځینې وخت د داسې عددونو سره مخامخ کېږو، چې د نوموړو عددونو د لوګارتم مانتیس په جدول کې نه وي، د داسې عددونو د مانتیس د پیدا کولو لپاره دې عدد ته د ډېر نږدې عددونو له مقایسې (یو لوی او بل کوچني) څخه د تناسب د عملیې په مرسته لاسته راوړو، دا عملیه، چې یوه دقیقه برخه ده انټر پولېشن نومېږي.

موضوع په مثال سره توضیح کوو.

مثال: 24357 لوګارتم په لاس راوړو.

حل: د پورتني عدد مشخصه 4 ده، د دې عدد مانتیس په جدول کې نشته؛ خو د 24360 او 24350 مانتیس په جدول کې شته.

$$10\left[\begin{matrix}24350\\24357\\24360\end{matrix}\right]7$$

$$\left|\begin{matrix}0.38650\\?\\ \\0.3866\end{matrix}\right| x \,\Big|\, 0.00018$$

د ورکړل شوي عدد ترمنځ توپیر او 7 له دې څخه کوچنی.

د ورکړل شوي عدد ترمنځ توپیر او 10 لوی له دې څخه.

د ورکړل شوي عدد د مانتیس په منځ کې توپیر او X د هغه څخه د کوچني مانتیس

د کوچني عدد د مانتیس په منځ کې فرق او 0.00018لوی له ورکړل شوي عدد څخه.
لکه څنګه چې پورتنۍ رابطې مستقیم تناسب جوړوي؛ نو کولی شو د پورتنیو اعدادو تناسب ترتیب کړو.

$$\frac{10}{7}=\frac{0.00018}{x}$$

د x قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو او یا دا د لوی عدد له مانتیس څخه منفي کوو.

$$10x=0.00126$$

لاسته راغلې نتیجه د ورکړل شویو اعدادو مانتیس دی.

$$x=0.00013$$

$$\begin{array}{l} 0.38650 \\ \underline{0.00013} \\ 0.38663 \end{array}$$

په کوم مخ کې چې د اعدادو د لوګارتم مانتیسونه لټوو، ښي لور ته یې واړه جدولونه شته، چې د Poroportional په نامه یادېږي.
په دې جدول کې د چپ طرف په ستون کې له 1 څخه تر 9 پورې صحیح عددونه او د چپ طرف په ستون کې د اعدادو مانتیس د $\frac{1}{10}$ په تناسب لیکل شوی، لکه: که د 1.472.85 لوګارتم د جدول نه په ګټه اخیستو لاسته راوړو؛ نو داسې عمل کوو.

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

حل: د یاد شوي عدد کرکټرستیک 2 دی، د مانتیس د پیدا کولو لپاره داسې عمل کوو.
$x=4728.5$ د ورکړل شوي عدد مانتیس

$4728 = 0.67468$ مانتيس

$47229 = 0.67477$ مانتيس

0.00009 د مانتيس فرق د ۱ عدد فرق

د دې مخ په کوچني جدول کې د 5 عدد مقابل ته، چې له 4728.5 عدد څخه په لاس راځي. د 4.5 مانتيس ليکل شوی دی، هر کله چې د 4.5 مانتيس د کوچني عدد د مانتيس له اخيرو ارقامو سره جمع کړو د مطلوب عدد مانتيس په لاس راځي.

$$\begin{array}{r} 0.\ 6\ 7\ 4\ 6\ 8 \\ 4\ 5 \\ \hline 0.\ 6\ 7\ 4\ 7\ 2\ 5 \end{array}$$

$Log 472.85 = 2.67472$

د ۴۷۲,۸۵ لوګارتم د انترپوليشن له طريقي نه په ګټه اخيستو په لاس راوړو.

$$10\left[5\left[\begin{array}{l}47280 = 0.6746 \\ 47285 = 7\end{array}\right]x \atop 47290 = 0.67477\right]0.0009$$

د کوچني عدد له مانتيس سره جمع کېږي.

$$\begin{array}{r} 0.\ 6\ 7\ 4\ 6\ 8 \\ 4\ 5 \\ \hline 0.\ 6\ 7\ 4\ 7\ 2\ 5 \end{array}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0.00009} => 10x = 0.00045 => x = 0.000045$$

تمرين: د لاندې عددونو د لوګارتم مشخصه او مانتيسه د جدول نه په ګټه اخيستو پيدا کړئ!

$Log 24546$	Log0.012353
Log10012	Log0.000021314
Log10135	Log43256
$\text{Log}0.0034521 \cdot 10^{-3}$	$\text{Log}42341 \cdot 10^{-6}$

د لوګارتم د جدول ترتيب

د هغو سلسلو د عددونو د لوګارتم د مانتيس د لاسته راوړلو په خاطر، چې د تايلور له فورمول نه په ګټه اخيستو ترتيب شوی، کار اخلو.

$$Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...I$$

که x په x− عوض کړو.

$$Ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-.......II$$

دویمه رابطه له لومړۍ څخه منفي کوو.

$$Ln(1-x)-Ln(1-x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+....$$

$$Ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+.....\right)$$

دارنګه $x=\frac{1}{2n+1}$ وضع کوو.

$$Ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+...\right)$$

که اوس n = 1 شي Ln2 په لاس راځي.

$$Ln2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3)^3}+\frac{1}{5(3)^5}+\frac{1}{7(3)^7}+.....\right\}$$

$$Ln2=0.693147180$$

د هغې دقت تر 9 رقم دی.

کولای شو Ln2 په قاعده د 10 بدل کړو.

$$LogN=m\cdot LnN$$

$$m=0.43429$$

$$Ln2=0.434294\cdot 0.693147=0.30103$$

په همدې ترتیب که n = 2 وي، Ln3 حاصلېږي.

$$Ln3=1.0986022$$

$$Ln4=Ln2\cdot 2=Ln2+Ln2$$

په همدې ترتیب د مرکبو اعدادو لوګارتم د لوګارتم له خاصیتونو نه په ګټه اخیستو په لاس راوړلای شو او د اولیه اعدادو لوګارتم مستقیماً د فورمول په واسطه په لاس راوړلای شو.

تمرین: د لاندې عددونو طبیعي لوګارتم له فورمول نه په ګټه اخیستو پیداکړئ! وروسته یې د 10 په قاعده بدل کړئ!

$Ln5=?$	$Ln6=?$	$Ln7=?$	$Ln8=?$
$Ln9=?$	$Ln10=?$	$Ln11=?$	$Ln12=?$
$Ln_{10}5=?$	$Ln_{10}6=?$	$Ln_{10}7=?$	$Ln_{10}8=?$

د پورته اعدادو د لوګارتم جدول ترتیب کړئ!

د x عددونه	Lnx	$Log_{10}x$

لوګارتمي افادې

عددي افادې یا برخې، چې په هغې کې لوګارتم موجود وي، لوګارتمي افادي ورته ویل کېږي، چې کولی شو د لوګارتم له خواصو نه په ګټه اخیستو هغه ساده او په نظر کې نیولی قیمت پیدا کړو.

د مثال په توګه :

$$1-Log_2{}^4\sqrt{32}=Log_2\sqrt[4]{32}=Log_2 2\frac{4}{5}=\frac{4}{5}Log_2 2=\frac{4}{5}$$

$$2-og50+Log2-Log\sqrt[3]{100}=Log50\cdot 2-Log10^{2/3}=Log100-\frac{2}{3}Log10$$

$$=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

لوګارتمي معادلې

د لوګارتمي معادلو د حل لپاره د لوګارتم له قوانینو نه په ګټه اخیستو هغه ساده کېږي، چې د اړوند مجهول قېمت پیدا شي.

مثالونه: له لاندې لوګارتمي معادلو څخه د مجهول قیمت پیدا کړئ!

$$1-Log2+Log3=Logx=Log(2\cdot 3)=Logx=Log6=Logx$$

$$x=6$$

$$2-Log_{\sqrt{2}}x=Log_{\sqrt{2}}3+Log_{\sqrt{2}}6=Log_{\sqrt{2}}x=Log_{\sqrt{2}}(3\cdot 6)=Log_{\sqrt{2}}x=Log_{\sqrt{2}}18$$

$$x=18$$

$$3-\frac{Log_{\sqrt{2}}r}{Log_{\sqrt{3}}S}=Log_x r => Log_x r=Log_S r$$

$$x=S$$

$$4-Log\left(x^2-1\right)=3 => x^2-1=2^3$$

$$x^2=8+1$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

شپږم څپرکی

مترکس او دیټرمینانت

ټولیزه موخه

په مترکس او دیټرمینانت پوهېدنه او د خطي معادلو د مسایلو په حل او د خطي معادلو د مجهولاتو په موندلو کې د هغو کارونه

د زده کړې موخې: ددې څپرکې په پای کې به محصلین لاندې موضوعات زده کړي:

- د مترکس او دیټرمینانت په مفهوم او د هغه په ډولونو پوهېدل.
- د خطي معادلو د سیستم له ضرایبو څخه د مترکس ترتیب او په ستونونو او سطرونو کې لومړني بدلونونه.
- پر مترکسونو باندې اساسي عملیې او د معکوس مترکس پیدا کول.
- د خطي معادلو د سیستم د مجهولاتو پیدا کول.
- د مترکسونو په واسطه د ضرایبو ترتیب او د خطي معادلو د سیستم ثابتونه.

د خطي معادلو سیستمونه، مترکسونه او د یټرمینانتونه

په ریاضي، میخانیکي، تخنیکي او اقتصادي علومو کې ډېرې ستونزې د خطي معادلو د سیستم په حل پورې اړه لري. همدارنګه د ښوونځي په دوران کې د لاندې مسایلو سره اشنا شوي یاست:

مثال: د ثریا، ظاهر او نفیسې د عمر مجموعه 60 ده، د نفیسې د عمر له درې چنده څخه د ظاهر د عمر دوچنده منفي کوو، د ثریا عمر حاصلېږي. د هغو هر یو څو کلن دی، د مسألې د حل لپاره د ثریا عمر په C، د ظاهر عمرپه Z او د نفیسې عمر په N ښیو؛ نو کولی شو ولیکو:

$$\left.\begin{array}{l} Z+N+C=60 \\ 2Z+N+3C=120 \\ -2Z+3N=C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Z+n+C=60 \\ 2Z+N+3C=120 \\ -2Z+3N-C+0 \end{array}\right\}$$

په پورته مثال کې ليدل کېږي، چې له ضرايبو سره درې معادلې او درې مجهوله شته، په همدې ترتېب که n مجهول او m معادله په لاندې ترتېب ولرو.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+........+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+......a_{2n}x_n=b_2$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.......+a_{mn}x_n=b_m$$

په دې توګه ويلی شو، چې د n مجهوله ورکړل شويو خطي معادلو m سيستم، چې $x_1, x_2, ..., x_n$ مجهولونه او $a_{11}, a_{12}, ...a_{1n}, ...a_{mn}$ د سيستم ضريبونه $b_1, b_2, b_3, ...b_m$ ثابت اعداد په سيستم کې ورکړل شوي دي.

که د ذکر شوو معادلو سيستم د حل لرونکی وي، د ساز ګار سيستم په نوم او که سيستم د حل لرونکی نه وي، د ناسازګار سيستم په نوم يادېږي.

د خطي معادلو د سيستم د حل نه موخه په اول قدم کې د سيستم سازګارېدل او يا نا ساز ګارېدل دي. که چېرې سيستم سازګار وي، بايد هغه حل کړو. د خطي معادلو د سيستم په تيوري کې وړاندې شول، چې د هغې په واسطه د خطي معادلو هر سيستم حل کولای شو.

د خطي معادلو د سيستمونو معادل کېدل او په سيستم کې لومړنی بدلون

که د خطي معادلو يو يا څو سيستمونه ورکړل شوي وي، چې په عين مجهولونو د مساوي حل لرونکي وي، له يو بل سره معادل دي او يا په بل عبارت که يو يا دوه سيستمونه د خطي معادلو له يو بل سره معادل وي، د هغوې حل يوله بل سره مساوي دی.

مثال: د خطي معادلو سيستمونه يو له بل سره معادل دي، ځکه چې:

حل:

$$\begin{cases} 2x-y=-3 \\ x+2y=6 \end{cases} \wedge \begin{cases} x+y=3 \\ -2x-y=-3 \end{cases}$$

يواځينی $(x, y)=(0,3)$ دی

مثال: د خطي معادلو سيستمونه يو له بل سره معادل دي.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x-y=-3 \end{cases} \wedge \begin{cases} 2x+y=4 \\ -2x-y=-3 \end{cases}$$

دا ځکه چې دواړه سيستمونه ناسازګار دي، يعنې د هغې د حل سيټ خالي دی.

په خطي معادلو کې لومړني بدلونونه

۱- په ورکړل شوي سیستم کې د دوو معادلو د محل تعویض کول

۲- یوه له معادلو څخه په یوه حقیقي د صفر خلاف عدد کې ضربول

٤- د معادلو له سیستم یو څخه د سیستم له بلې معادلې سره جمع کول، چې په حقیقي عدد کې ضرب شوی وي.

۵- له سیستم څخه د معادلې ګرځېدنه، چې مطابقت جوړوي.

د اجرا کولو په نتیجه کې هر یو له لومړنیو بدلونونو څخه د ورکړ شوو خطي معادلو په سیستم کې د نوو خطي معادلو سیستم حاصلېږي، چې له لومړني سیستم سره معادل دی.

د مجهولونو د تدریجي حذف کولو په طریقه د خطي معادلو د سیستم حل د Gauss میتود

یو له تر ټولو اسانه میتودونو څخه د حقیقي عددونو له ضریبونو سره د خطي معادلو د سیستم حل د Gauss له میتود څخه عبارت دی، یعني د مجهولونو د تدریجي حذف کولو طریقه ده.

که د لومړنیو بدلونونو په جریان کې د خطي معادلو په سیستم کې معادله لاندې شکل ونیسي، هغه له سیستمه لیرې کوو.

$$ox_1 + ox_2 + ox_3 + ... + ox_n = o....I$$

که د خطي معادلو په سیستم کې د بدلون په جریان کې معادله لاندې شکل ولري، ورکړ شوی سیستم ناساز ګار دی، یعنې حقیقت نه لري.

$$ox_1 + ox_2 + ox_3 + ... + ox_n = b = b \neq o$$

اوس دلته د ګاوس میتود تر مطالعې لاندې نیسو. فرض کوو، چې د ورکړل شویو خطي معادلو په سیستم کې پورته 1 او 2 شکل وجود نه لري.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

د پورته سیستم اوله معادله د اول حد په ضریب تقسیموو.

$$x_1 + \frac{a_{12}x_2}{a_{11}} + ... + \frac{a_{1n}x_n}{a_{11}} = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

اوس لومړۍ معادله په $-a_{31}$ کې ضربوو او له دويمې معادلې سره يې جمع کوو، وروسته د درېيمې معادلې د اول حد ضريب، يعنې $-a_{31}$ په اوله معادله کې ضربوو او له درېيمې معادلې سره يې جمع کوو، په همدې طريقه تر اخره د اولې معادلې ضريب په $-a_{m1}$ کې ضربوو او له اخرې معادلې سره يې جمع کوو او دې ته ورته طريقې ته تر هغې دوام ورکوو، چې سيستم لاندې شکل خپل کړي.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n = d_1 \\
&0 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n = d_2 \\
&0 + 0 + ... + c_{3n}x_n = d_3 \\
&0 + 0 + 0 + ... + c_{mn}x_n = d_m
\end{aligned}
$$

پورته عمليات ليدل کېږي، چې تر اصلي قطر لاندې ټول حدونه صفر شوي، بناً له اخرې معادلې څخه $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$ حاصلېږي، دا قيمت په (n-1) ام معادله کې وضع کوو، د x_{n-1} مجهول قيمت حاصلېږي، په همدې ترتيب د $x_1, x_2, ..., x_n$ مجهولونو قيمتونه لاسته راځي.

مثال: لاندې سيستم د ګاوس له ميتود نه په ګټه اخيستو حل کړئ!

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\
&x_2 - x_3 = 2 \\
&2x_1 - x_2 + x_3 = -3
\end{aligned}
$$

حل

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\
&0 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow -12x_3 = 5 \to x_3 = -\frac{5}{12} \\
&0 + 0 - 12x_3 = 5 \\
&x_2 + \frac{5}{12} = +2 \to x_2 = 2 - \frac{5}{12} = \frac{19}{12} \\
&x_1 + 2\left(\frac{19}{12}\right) + 4\left(\frac{-5}{12}\right) = 1 \to x_1 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

نو د حل سیټ یې عبارت دی له:

$$A=\{x_1,x_2,x_3\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{19}{12},\frac{-5}{12}\right\}$$

د مترکسونو ډولونه Tupes of Matrix

۱- سطري مترکس: هغه مترکس، چې یواځې یو سطر لري.

$$[2],[2 \quad 1],[1 \quad 0 \quad -3]$$

۲- **ستوني مترکس:** هغه مترکس، چې د یوه ستون لرونکی وي.

$$\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

۳- مربعي مترکس: هغه مترکس چې د سطرونو شمېر یې د ستون له شمېر سره مساوي وي.

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$$

٤- مستطیلي مترکس: هغه مترکس چې د سطرونو شمېر یې د ستونونو له شمېر سره مساوي نه وي.

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}$$

٥- صفري مترکس: هغه مترکس چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

٦- مساوي مترکسونه: هغه مترکسونه چې د هغې د سطر اوستونو ټاکلي عناصر تر الجبري عملیاتو وروسته مساوي شي.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 2+2\\ 3-1 & 2+3\end{bmatrix} \Rightarrow A=B$$

د دویم او درېیم ترتیب دیټرمینانتونه

په تېرو بحثونو کې مو د خطي معادلو د سیستم د حل تیوري مطالعه کړه. البته ذکر شوی میتود پیچلی نه دی، ولې د اجراکولو تقاضا یې یو رنګه عملیې ورکوي، چې د هغې د الګورتیم تهیه د کمپیوټري ماشین د پروګرام لپاره امکان لري. ولې یو عمومي فورمول د خطي معادلو د ټولو سیستمونو د حل لپاره نه شو طرحه کولای. معلومه ده چې د عمومي فورمولونو طرح کول د خطي معادلو د ضریبونو او ثابتو پواسطه په بله طریقه امکان لري. د بحث دا طریقه د دیټرمینانت د تیورۍ پر بنسټ ولاړه ده.

مخکې له دې چې د دیټرمینانتونو عمومي تیوري مطالعه کړو، لومړی د دوه مجهوله او درې مجهوله خطي معادلو په ځانګړو سیستمونو خبرې کوو.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{bmatrix} \text{..............} I$$

پورته سیستم د ګاوس په میتود حلوو، که $a_{11} \neq 0$ وي؛ نو د 1سیستم له لاندې سیستم سره معادل دی.

$$\begin{bmatrix} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \left(a_{22} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 = b_2 - \dfrac{b_1 a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

البته که چېرې $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ وي، د اصلي مترکس پواسطه ۱ سیستم وړاندې کولی شو.

واقعاً لیدل کېږي، چې $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ افاده د مترکس د فرعي او اصلي قطر د حاصل ضرب له حاصل تفریق څخه عبارت دی.

تعریف: $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ د مترکس د دیټرمینانت په نامه یا د دویم ترتیب د

دیټرمینانت په نامه یادوو . ذکر شوی دیټرمینانت په لاندې ډول ښودلی شو.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

هغه عددونه، چې د فورمول د کسرونو په صورت کې قرار لري، هم د دوو د ترتیب دیټرمینانتونه دي، یعنې د x_1 فورمول لپاره لرو.

$$D = \begin{pmatrix} b_1a_{12} \\ b_2a_{22} \end{pmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{21}$$

لیدل کېږي، چې د هغه عدد پیدا کول، چې د کسر په صورت کې د x_1 د ټاکلو لپاره قرار لري، د مترکس له دیټرمینانت څخه عبارت دی، چې د اول ستون د تعویض په نتیجه کې د ثابتونو سیستم په وکتور ورکړل شوی، یعنې $\vec{b} = (b_1, b_2)$ حاصل شوی همدارنګه د x_2 لپاره لرو چې:

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 \\ a_{21}b_2 \end{pmatrix} = a_{11}b_2 - a_{12}b_1$$

D2 د مترکس له دیټرمینانت څخه عبارت دی، چې د دویم ستون د تعویض په نتیجه کې په $\vec{b} = (b_1, b_2)$ وکتور دی، په حاصل شوي مترکس کې لاندې قضیه په دې ترتیب ثبوتوو.

قضیه: که د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم د اصلي مترکس د یترمینانت د صفر خلاف وي؛ نو د ورکړل شوي سیستم حل د لاندې فورمول په واسطه وړاندې کولی شو.

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \wedge x_2 = \frac{D_2}{D}$$

مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ!

$$3x_1 + 4x_2 = -9$$
$$5x_1 + 7x_2 = -17$$

حل:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -17 & 7 \end{vmatrix} = 63 + 68 = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 5 & -17 \end{vmatrix} = -51 + 45 = -6$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{1} = 5 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-6}{1} = -6$$

اووم څپرکی

د توابعو لمټ او مشتقات

ټولیزه موخه

په عالي ریاضیاتو او اقتصادي موضوعاتو کې د لمټ له کارونې سره بلدتیا

د زده کړې موخې: ددې څپرکي په پای کې محصلین لاندې موضوعات زده کولای شي:

- د مجاورت مفهوم، د تابع لمټ او د مستقل متحول لمټ.
- له مبهمو اشکالو نه خبرېدنه، په لمټ کې د هغې مفهوم پېژندل او د مبهمو شکلونو رفع.
- له عالي ریاضیاتو سره د توابعو د لمټ د ارتباط په اړه معلومات.

د یوې تابع لمټ

څرنګه چې د مستقل متحول او تابع له مفهوم سره پوره بلدتیا لرو، اوس که په یوه رابطه کې x مستقل متحول او y د هغې تابع قبول کړو، که چېرې x تحول وکړي، Yهم تحول کوي، په دې تحولاتو کې کله داسې راځي، چې د تابع څرنګوالی د مستقل متحول قیمت ته په نږدې مجاورت کې مطالعه کېږي، کله چې دا قیمت a وي او x تحول تر کومه چې ممکن وي a ته نږدې کوو.

$x \to a$

په دې ځای کې لازم دي لومړی د یوې تابع د لمټ د مفهوم په اړه بحث د لمټ تعریف ته پرېږدو. که $y = f(x)$ په نظر کې ونیسو، هغه وخت چې x ټاکلی عدد a ته تقرب کوي، y د b خواته تقرب کوي، چې دې قیمت ته د تابع لمټ ویل کېږي. البته کله داسې هم پېښېږي، چې تابع لمټ نه لري. ځکه د تابع او د متحول په تحولاتو او ماهیت پورې اړه لري.

مثال: $y = 3x + 5$ تابع په نظر کې نیسو، کله چې د x متحول 2 ته ډېر نږدې قیمتونه اختیار کړي، یعنې د 2 طرف نږدې شي، یعنې $x \approx 2$ او $y \approx 11$ دا حقیقت لاندې جدول ته په کتو درک کولای شو.

X	1.5	1.9	1.95	1.99	2	2.09	2.1
Y=3x+5	10.4	10.7	10.9	10.97	11	11.27	11.3

په $y = 3x + 5$ کې که چېرې x 2 قیمت واخلي، تابع مساوي په 11 کېږي، مگر په یو شمېر توابعو کې کله چې مستقل متحول د یوه ثابت عدد خواته تقرب کوي، د تابع قیمت ناټاکلی (نامعین) کېږي.

خرنگه چې په $y = 3x + 5$ تابع کې $(x \to 2)$ د تابع قیمت $(x \to 11)$ کېږي.

کولای شو ووایو، چې د یادې تابع لمټ هغه وخت، چې x د 2 طرف ته تقرب کوي په طرف د 11 تقرب کوي. د افادې دا طرز په سمبولیکه بڼه لیکلی شو.

$$Limit(3x+5)=11$$
$$x \to 2$$
$$\lim(3x+5)=11$$
$$x \to n$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} = \frac{2x}{x+1} = \frac{2(-2)}{-2+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

مبهم شکلونه (ناټاکلي)

ډېر کله له داسې توابعو سره مخامخ کېږو، چې د متحول په ځینو قیمتونو غیر متمادي دي یا کاملاً ځان ته ناټاکلی شکل اختیاروي، لکه:

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty,-\infty,1^{\infty},\infty^{0},0^{\infty},0\cdot\infty$$

له لمټ نه په گټه اخیستو کولای شو د پورته شکلونو لپاره د حد قیمت پیدا کړو. له پورته شکلونو څخه هر یو د ابهامو په خاصه شیوه رفع کېږي.

۱- **د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل رفع:** که د $\frac{f(x)}{2(x)}$ تابع نسبت د a په قیمت $\frac{0}{0}$ ناټاکلی شکل اختیاروي، یعنې.

$$\lim_{x\to a} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=0$$

د ابهامو د رفعې لپاره تابع تر ټولو اسانه شکل ته راوړو. له دې ځایه چې د x=a په قیمت صورت او مخرج صفر کېږي؛ نو صورت او مخرج د مشترک فکتور لرونکی دی، چې اختصار کېدای شي او د تابع د حد قیمت پیداکېږي.

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=?$$

حل: خرنګه چې د x=1 په قیمت $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي؛ نو د هغې د حد قیمت پیداکوو.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=Lim\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ د ابهامو رفع

که چېرې توابع د نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ شکل ولري، داسې چې.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{g(x)},$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to a} \mathrm{F}(x)=\infty$$

په دې حالت کې د ابهامو د رفع لپاره صورت او مخرج په هغه متحول تقسیموو، چې تر ټولو لوړ توان لرونکی وي. البته په درو حالتونو کې مطالعه کېږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3=bx^2+c}{ax^2+bx+c}=?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3/x^3+bx^2/x^3+c/x^3}{ax^2/x^3+bx/x^3+c/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}=\frac{a}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{ax^3+bx}=?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2}{x^3}+\frac{bx}{x^3}}{\frac{ax^3}{x^3}+\frac{bx}{x^3}}=Lim\frac{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{a+\frac{b}{x^2}}=\frac{0}{a}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{ax^2+bx}=?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{ax^2+bx}=Lim\frac{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}}{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}}=Lim\frac{a+\frac{b}{x}}{a+\frac{b}{x}}=\frac{a}{a}=1$$

$(\infty-\infty)$ د ابهامو رفع

کله چې $g(x), f(x)$ دوه تابع وي، داسې چې:

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$$

په دې حالت کې هغه په $\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$ دې شکلونو راوړو، وروسته د ابهامو په رفع اقدام کوو:

مثال:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)$$

حل:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{9(x+1)-8x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(9x+9-8x-10)}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x^2-1}=Lim\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

اتم څپرکی

د تابع تزاید او مشتقات

ښولیزه موخه
په اقتصادي او تخنیکي مسایلو کې د مشتق د کارونې په موخه د هغو توضیح.

د زده کړې موخې: ددې څپرکي په پای کې محصلین لاندې موضوعات زده کولای شي:

- د مستقل متحول په تزاید، د تابع په تزاید پوهېدل او د هغوی تر منځ رابطه.
- د الجبري او هندسي مشتق تعریف او د هغه د مفهوم درک.
- د مشتق د قضیو نه په ګټه اخیستو د الجبري او مثلثاتي توابعو د مشتق تطبیق.
- په اقتصاد، صنعت او نورو کې له مشتق نه ګټه اخیستل.
- د مشتق په مرسته د توابعو د پېچلو لمتونو پیدا کول.
- تعریف او د قسمي مشتقاتو پیدا کول.

د تابع تزاید او مشتقات

کله چې $y = F(x)$ تابع په نظر کې ونیسو، که x متحول د Δx په اندازه زیات شي د y تابع هم د Δy په اندازه زیاتوالی کوي، چې کولای شو دا زیاتوالی داسې پیدا کړو.

$$y = F(x)$$
$$y + \Delta y = F(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = F(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x)$$

مثال: د $y=3x^2$ تابع زیاتوالی پیدا کړئ!

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2$$
$$\Delta y=3(x+\Delta x)^2-y$$
$$\Delta y=3(x+\Delta x)^2-3x^2$$
$$\Delta y=3\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)-3x^2$$
$$\Delta y=3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2-3x^2$$
$$\Delta y=6x\Delta x+3\Delta x^2$$

مثال: د لاندې تابع تزاید پیدا کړئ!

$$y=6+x$$
$$y+\Delta y=6+x+\Delta x$$
$$\Delta y=6+x+\Delta x-y$$
$$\Delta y=6+x+\Delta x-6-x$$
$$\Delta y=\Delta x$$
$$y=7$$
$$y+\Delta y=7$$
$$\Delta y=7-y$$
$$\Delta y=7-7$$
$$\Delta y=0$$

تمرین:

۱- په $y=2x+5$ تابع کې به د x قیمت څو وي، که چېرې $\Delta x=0.007, x_o=4$ وي.

۲- د $y=3x^2-5x+4$ تابع تزاید پیدا کړئ!

۳- په $y=\frac{1}{x}$ تابع کې د Δy قیمت پیدا کړئ، که چېرې $\Delta x=0, x_0=9$ وي؟

۴- په $y=x^2$ تابع کې د Δy او Δx تزاید پیدا کړئ!

مشتقات

د مشتق الجبري تحليل او د هغه تعريف

فرض کوو چې $y=f(x)$ تابع د (a,b) په ځېر فاصله کې يوه متمادي تابع ده، که x_o د متحول لومړنی قيمت x او x_1 بل قيمت، چې x_o ته ډېر نږدې دی، يعنې $x_1=x_o+x$ وي، په دې حالت کې به د پورته تابع قيمت y_1, y_o وي.

څنګه چې $y_1=y_o+y$ دی، په دې ځای کې به $\Delta y=y_1-y_o, \Delta x=x_1-x_o$ وي. کولی شو $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت يې تشکيل کړو. هغه وخت چې $\Delta x\to 0$ وي، په دې حالت کې $\Delta y\to 0$ کوي، بناً $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت د $\frac{0}{0}$ په طرف ځي، چې دا يو مبهم حالت دی او کولی شو د تابع د حد قيمت محاسبه کړو او د ابهامو رفع وکړو، په نتيجه کې کولی شو مشتق دارنګه تعريف کړو:

لمټ د تابع تزايد د متحول پر تزايد هغه وخت، چې د متحول تزايد د صفر طرف ته تقرب کوي، عبارت د تابع له مشتق څخه دی، چې هغه درانګه ليکل کېږي.

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-F(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=Lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\bar{y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د تابع مشتق نظر x ته عموماً په $\frac{\Delta y}{\Delta x}, y'=f(x)$ يا y'_x ښودل کېږي.

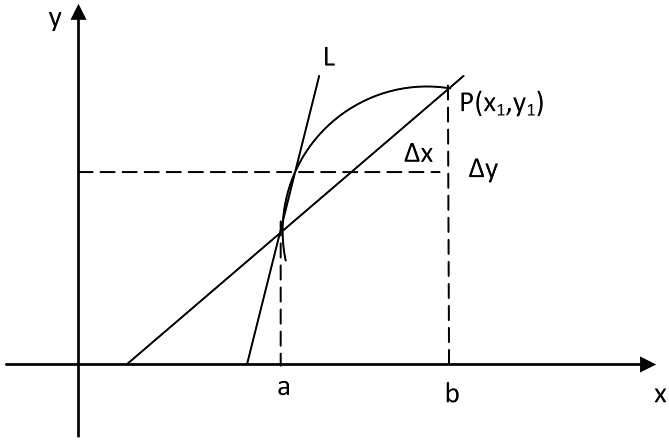
مثال: د $y=2x-3$ تابع په نظر کې نيول شوی، په الجبري تحليل د هغې مشتق پيدا کړئ!

$$y=2x-3$$
$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)-3$$
$$\Delta y=2x+2\Delta x-3-2x+3$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}\to \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2$$
$$y=2$$

د مشتق هندسي تحليل

فرضاً د $y = f(x)$ تابع د (a,b) په انتروال کې متمادي ده. د دې تابع د منحني د پاسه دوه نقطې $P_o(x_o,y_o)$ او $P_o(x_1,y_1)$ په نظر کې نیسو، د L قاطع چې له P_o او P نقطې تېرېږي د x محور له مثبت جهت سره ∞ زاويه جوړوي.

که د P نقطه P_o ته بې نهايت نږدې شي، د L قاطع په يوه حدي حالت کې د P_o په نقطه کې د ذکر شوې تابع په منحني باندې مماس وي. د پورته شکل له قراره د L قاطع د L په حالت کې راځي، چې د x محور له مثبت جهت سره زاويه تشکيلوي.



$$Tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_o} = m = L$$

$$Tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_o} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m = L$$

په حدي حالت کې يعنې په هغه وخت کې، چې P د P_o طرف ته تقرب کوي د α زاويه عوض کېږي.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = Tag\theta = L = m$$

نو نتيجه اخلو، چې د تابع د منحني په يوه نقطه کې د مماس ميل د منحني په هغه نقطه کې د تابع د مشتق له قيمت څخه عبارت دی.

د الجبري توابعو مشتقات

قضیه: د ثابتې تابع مشتق $y = C$ صفر دی.

ثبوت: پوهېږو چې:

$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y \rightarrow \Delta y = C - C$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} \rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

مثال:

$$1 - y = 7 \Rightarrow y = 0$$
$$2 - y = Log 25 \Rightarrow y = 0$$
$$3 - y = Sin 30^{\circ} \Rightarrow y = 0$$

۲ قضیه: په طاقت لرونکې افاده کې مشتق مساوي دی په:

$$y = ax^{n} \Rightarrow y = anx^{n-1}$$
$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^{n}$$
$$\Delta y = a(x + \Delta x)^{n} - ax^{n} = a\left[(x + \Delta x)^{n} - x^{n}\right]$$
$$\Delta y = a\left[(x + \Delta x - x)(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}\right]x + \ldots. + x^{n-1}$$
$$\Delta y = a\left[\Delta x(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + \ldots.. +^{n-1} +\right]$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\left[(x + \Delta x)^{n-1} x + (x + \Delta x)^{n-2} x + \ldots.. +^{n-1} +\right]$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \to 0}\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + \ldots. + x^{n-1}\right]$$

$$y = a(xn - 1 + xn - 1 + \ldots. + xn - 1)$$
$$y = anx^{n-1}$$

N ځلې x^{n-1} جمع کېږي، پورته قضیه د منفي، کسري طاقتونو لپاره هم سمه ده.

د مرکبو توابعو مشتق یا د تابع د تابع مشتق

الجبري قاعده Chain Rule

که y د u تابع او u د x تابع وي، په دې صورت کې y دx د تابع تابع ده.

یعنې که $y = f(u)$ او $u = g(x)$ وي؛ نو د $(fog)_x = f(g(x))$ هغې مشتق:

$$(fog)_x = f(g(x))\cdot g(x)$$
$$\Delta y = \Delta y$$
$$\Delta y \cdot \Delta u = \Delta y \cdot \Delta u \Rightarrow \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot \Delta u$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \begin{bmatrix} y = y_a \cdot u_x \\ y = f(u)\cdot u(x)\end{bmatrix}$$

که څو متغیره یو د بل تابع وي، مثلاً $y = F(u)$ او u د V تابع او V د W تابع او Wد X تابع وي، په دې صورت کې کېدای شي ولرو:

$$y_x = y_u \cdot u_v \cdot V_w \cdot W_x$$

مثال: د $F(x) = (x^3+3x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ!

حل: کله چې $x^3+3x = g(x)$ وټاکل شي، نو بیا $F(x) = F(g(x))$

$$(fog)x = F(g(x))$$
$$f(x) = F(g(x))\cdot g(x)$$
$$f(x) = 5(x^3+3x)(3x^2+3)$$
$$y = \left(\frac{2x^2-6x+3}{x-1}\right)^7$$

د مثلثاتي توابع مشتقات

قضیه: د $y = Sinx$ مشتق عبارت دی له $y = \cos x$ څخه.

ثبوت:

$$y + \Delta y = Sin(x+\Delta x)$$
$$\Delta y = Sin(x+\Delta x) - Sinx$$

د مثلثاتي فورمولونو په اساس

$$SinA - SinB = 2Cos\frac{A+B}{2}\cdot Sin\frac{A-B}{2}$$
$$\Delta y = 2Cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot Sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$
$$\Delta y = 2Cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot Sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = Cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot Sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Delta y = L(x+\Delta x) - Lx$$
$$\Delta y = L\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}L\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

د لوړو مرتبو مشتقونه

که f متمادي تابع او مشتق منونکې وي، کولای شو لومړی، دویم، دریم او n ام مشتق یې پیدا کړو. په داسې حال کې، چې د تابع درجه n وي، (n+1) یې صفر دی.

لاندې رابطې د مشتقاتو د مراتبو ښودونکې دي.

$$\frac{dy}{dx}=f(x),\frac{d^2y}{dx^2}=f(x),\frac{d^3y}{dx^3}=f(x)....\frac{d^ny}{dx^n}=f(x)$$

مثال: د $y=15x^3-2x^2+Log15$ تابع دریم او څلورم مشتق پیداکړئ!

$$f(x)=\frac{dy}{dx}=45x^2-4x+0$$

$$f(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=90x-4$$

$$f(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=90, f(x)=\frac{d^4y}{dx^4}=0$$

د لوګارتمي تابع مشتقات

د $y=Lx$ لوګارتمي تابع په نظر کې نیسو، نظر تزاید ته لرو.

$$y+\Delta y=L(x+\Delta x)$$

د لوګارتم د قاعدو څخه په ګټه اخیستو لیکلای شو.

$$\Delta y=L(x+\Delta x)-Lx$$

$$\Delta y=L\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}L\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

که Δx صفر شي، پورته رابطه د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل اختیاروي، د ابهام د رفع کولو لپاره فرض کوو، چې $\frac{\Delta x}{x}=a$ نو $\Delta x=ax$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{ax}\cdot L(1+a)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot L(1+a)^{1/a}$$

د لوګارتم د قاعدو په اساس لیکلای شو.

کله چې Δx صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}Lim(1+a)^{1/a}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}Le=\frac{1}{x}$$

$$y=\frac{1}{x}$$

که د لوګارتم قاعده پرته له e کوم بل عدد وي، لکه a، په دې صورت کې لرو چې:

$$y=Log_a x\Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{x}Log_a e=\frac{1}{x}\cdot\frac{Log_a e}{Log_e a}$$

$$y=\frac{1}{x\cdot La}$$

هرکله $y=Logu$ وي او u د x تابع وي؛ نو لرو چې:

$$y=Logu=Lu$$

$$\bar{y}=\frac{\bar{u}}{u}$$

مثال: د لاندې تابع څخه نظر x ته مشتق ونیسئ!

$$y=Log_a x+Log_x a$$

حل: کولای شو د قاعدو د تبدیلۍ پر اساس ولیکو.

$$y=Log_a x+\frac{1}{Log_x a}$$

$$y'=\frac{1}{xLa}+\frac{1}{x\cdot La(Log_a x)^L}$$

مثال: $f'(x)=?,f(x)=L(x^2+1)$

حل:

$$u=x^2+1\Rightarrow f(x)=Lu$$

$$u'=2x$$

$$\bar{y}=\frac{\bar{u}}{u}Le$$

$$f'_{(x)}=\frac{2x}{x^2+1}$$

د الجبري توابعو د مشتقاتو جدول

تابع (y)	مشتق $(\overline{y})$
$y = a$	$y' = 0$
$y = u$	$y' = u'$
$y = au$	$y' = u'$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + v'u$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v + v'u}{v'}$
$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}$
$y = a^u$	$y' = e^u$
$y = e^u$	$y' = \frac{u'}{}$
$y = Lu$	$y' = \frac{\overline{u'}}{uLa}$
$y = Log_a u$	$y' = \frac{\overline{u'}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$x = \frac{1}{y}$
$y = f(x)$	

د مثلثاتي توابعو د مشتقاتو جدول

تابع (y)	مشتق $(\bar{y})$
$y = Sinu$	$y' = u'Cosu$
$y = Cosu$	$y' = -u'Sinu$
$y = Logu$	$y' = \bar{u}(1 + Tag^2 u)$
$y = Cotagu$	$y' = -\bar{u}(1 + Cotg^2 u)$
$y = Secou$	$y' = Secou \cdot \bar{u}tagu$
$y = ArcSinu$	$\bar{y}' = -Cu\sec u \cdot \bar{u}Cotgu$
$y = ArcCosu$	$y' = \pm\frac{\bar{u}}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = Arctagu$	$y' = -\frac{\pm\bar{u}}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = ArcCotgu$	$y' = \frac{\bar{u}}{1+u^2}$
$y = ArcSecou$	$y' = -\frac{\bar{u}}{1+u^2}$
$y = Arc\cos ecu$	$y' = \frac{\bar{u}}{u \cdot \sqrt{u^2-1}} = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$

په اقتصادي مسايلو کې د مشتقاتو کارونه

په عام ډول مشتق او د مشتق اخيستل په ځينو اقتصادي بحثونو کې، چې په مقداري ډول تر ارزونې لاندې نيول کېږي، فوق العاده اهميت لري. په دې ترتيب چې د ګټې د مينيمم او مکزيمم کولو او همدارنګه د مکزيمم او مينيمم د شرايطو ټاکل د ګټې او موخې په مقصد او همدارنګه د ناچارۍ له مخې د ټولو مقاديرو د محاسبې لپاره د مشتق څخه ګټه اخلو.

دلته په لنډ ډول د مشتق محدوده کارونه په اقتصادي مسايلو کې په کار وړو. پوهېږو چې د يوې توليدي موسسې ګټه عبارت ده د ټولو لاسته راغلو او ټول مصرف ترمنځ له توپير څخه؛ نو پـه دې اساس که د ټولو لاسته راغلو او ټول مصرف توابعو په ترتيب سره په لاندې ډول وښيو.

$TR = R(Q)$ د ټول عايد تابع

$TC = C(Q)$ د ټول لګښت تابع

که تابع شي، عبارت ده له:

$$TT = TR - TC$$
$$TT = R(Q) - C(Q)$$

اوس که د مکزيمم کولو مقصد ګټه وي؛ نو مقادير بايد له محصول څخه توليد کړي؛ څو ګټه حد اکثر ته ورسېږي. د ګټې لوړ حد ته د رسولو لپاره لازمي شرط دا دی، چې د ګټې تابع نسبت د مقدار محصول (Q) ته مشتق ونيول شي، وروسته دا مساوي له صفر سره شي؛ څو د Q مقدار چې د ګټې کچه حد اکثر يا حد اقل ته رسوي، لاس ته راشي.

کله چې د Q مقدار مشخص شي، بايد تحقيق وکړو، چې آيا د Q لاسته راغلي مقدار ګټه مکزيمم ته رسوي که مينيمم ته. د دې کار د سرته رسولو په خاطر بايد د Q مقدار مشتق د دويمې مرتبې تابع ګټه فرض شي. که د دويمې مرتبې مشتق د Q قيمت ته منفي شو، په دې وخت کې به د Q مقدار ګټه مکزيمم ته ورسوي او که برعکس د دويمې مرتبې مشتق علامه منحني شي، په دې وخت کې به د Q مقدار ګټه کم حد ته ورسوي.

د مطلب د وضاحت په خاطر لاندې مثال په نظر کې نيسو.

مثال: د يوې توليدي موسسې د ټول عايد او لګښت توابع په لاندې ډول راغلې دي:

$$R(Q) = 1000G - 2Q^2$$
$$C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$$

د محصول هغه مقادير، چې ګټه لوی ته رسوي مشخصه کړئ!

حل: پورته توابعو ته په کتو د ګټې تابع تشکيلوو:

$$\pi = RQ - C(Q)$$
$$\pi = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$$

او د ګټې د ماکزيمم او منيمم معلومولو لپاره لازمي شرط عبارت دی له:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 114Q - 315 = 0$$
$$Q_1 = 3$$
$$Q_2 = 35$$

اوس بايد تحقيق وکړو، چې کوم يو د محصول Q_1 او Q_2 څخه ګټه مکزيمم ته رسوي، چې د دې کار لپاره بايد د ګټې د دوهمې مرتبې مشتق تشکيل کړو.

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 144$$

$$Q_1 = 3 \Rightarrow \frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 144 > 0$$

$$Q_2 = 35 \Rightarrow \frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6(35) + 144 < 0$$

لکه چې ليدل کيږي، موسسه د $Q = 3$ په توليد سره خپله ګټه حد اقل او د $Q = 35$ په توليد سره خپله ګټه اعظمي حد ته رسولی شي.

وروستی عايد او وروستی لګښت

که د ټول عايد او ټول لګښت تابع مشخصه وي، کولای شو د هغوی څخه په مشتق نيولو سره د نهايي توابعو د محصول د پارامتر نسبت او نهايي لګښت مشخص کړو. که د ټول عايد تابع او د ټول لګښت تابع په لاندې ډول په نظر کې ونيسو.

$$TR = R(Q)$$
$$TC = C(Q)$$

په دې وخت کې د نهايي عايد او نهايي لګښت توابع به په ترتيب سره مساوي شي په:

$$\frac{dTR}{dQ} = R(Q) = MR \rightarrow \text{د نهايي عايد تابع}$$

$$\frac{dTC}{dQ} = C(Q) = MC \rightarrow \text{د نهايي لګښت تابع}$$

مثال: د ټولو عوایدو او ټولو لګښتونو توابعو ته په پام سره په لومړي مثال کې په نهایي سره او نهایي لګښت به عبارت وي له:

$$MR = 1000 - 4Q$$
$$MC = 3Q^2 - 48Q + 1315$$

د ګټې د ماکزیمم او مینمم کولو شرطونه

لکه څنګه چې مخکې ولیدل شول، د یوه تولید کوونکي له نظره مهمه مسأله دا ده، چې د خپل محصول څومره برخه تولید کړي؛ څو ځان ماکزیمم ته ورسوي، د ریاضي له نظره کولای شو د رابطې یا روابطو تر عنوان لاندې د ګټې د ماکزیمم یا منیمم کولو شرطونه بیان کړو.

فرضوو چې د یوه تولیدونکي د ټول عاید او ټول لګښت توابع په لاندې ډول وي.

$$TR = R(Q)$$
$$TC = C(Q)$$

په دې حالت کې د ګټې تابع عبارت ده له:

$$\pi = R(Q) - C(Q)$$

لازم شرط د ګټې د ماکزیمم یا منیمم کولو لپاره:

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0 \Rightarrow R(Q) - C(Q) = 0$$
$$R(Q) = C(Q)$$
$$MR = MC.....I$$

نو تولیدوونکی باید د خپلې ګټې د مکزیمم لپاره تر هغه وخته تولید ته ادامه ورکړي، چې د هغه وروستي لګښتونه له وروستۍ ګټې سره مساوي شي.

قیمت $P = MR = MC$

لوړ حد ته د رسولو لپاره کافي شرط:

$$\frac{d^2\pi}{dQ} < 0 \Rightarrow R''(Q) - C''(Q) < 0$$
$$R''(Q) < C''(Q)$$

په پورتني نامساوي $R''(Q)$ کې د ننوتلي منحني میل او $C''(Q)$ د نهایي قیمت د منحني میل دی.

میل $MR < MC$

په بل عبارت که کافي شرط د حد اکثر لپاره وي، دا چې د MC منحني میل د MR منحني له میل څخه زیات وي.

تمرین: د لاندې توابعو د هر یوه جزوي مشتقات لاسته راوړئ!

$$5x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + 7x_2^2 = y$$
$$y = 7x_1 + 16x_1 x_2^2 + 4x_2^3$$
$$y = (2x_1 + 3)(x_2 - 2)$$
$$z = F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$z = F\left(\frac{y}{z}\right)$$
$$y = f\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

انتیګرالونه

تعریف: د توابعو د عکس عمل مشتق اخیستلو ته د توابعو انتیګرال وایي، په بل عبارت که تابع $y = F(x)$ په نظر کې ونیسو، پوهېږو چې د دې تابع مشتق عبارت دی له:

$$y' = f'_{(x)} = f(x)$$

په دې صورت کې د $F(x)$ تابع ته اولي تابع د $f(x)$ وایي، لکه څنګه چې ملاحظه کېږي، که $F(x)$ معلوم وي، د انتیګرال په نیولو سره کولای شو $F(x)$ ته ورسېږو، د $f(x)$ انتیګرال د ښودلو لپاره د $\int$ نښې څخه ګټه اخلو.

$$\int f(x)dx = F(x)$$

په پورتنۍ رابطه کې dx د دې مطلب ښودونکی دی، چې د $f(x)$ تابع څخه د x په نسبت انتیګرال نیول شوی، اوس لاندې دوه رابطې په نظر کې نیسو.

$$[F(x)] = f(x)$$
$$[F(x) + C] = f(x)$$

لکه څنګه چې لیدل کېږي د $F(x)$ مشتق له $F(x)+C$ مشتق سره برابر دی، په دې اساس تر C د پورته دواړو توابعو ترمنځ فرق مشخص کوي؛ نو ویلی شو چې د $f(x)$ هره تابع کولای شي بېنهایته اولیه توابع ولري او یوازې هغه عامل د دې باعث کېږي، چې اولي توابع په خپلو کې سره فرق ولري، هماغه د C ثابت مقدار دی؛ نو د انتیګرال اخیستو په وخت کې باید C ثابت ته په هغه کې ځای ورکړل شي.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

د $f(x)dx$ عبارت ته تحت انتیګرال وايي.

د $\int f(x)dx$ انتیګرال ته غیر معین انتیګرال وايي، ځکه چې د عددي معین مقدار لرونکی نه دی.

د انتیګرالونو حل

د $y = f(x)$ تابع په نظر کې نیسو، فرضوو چې دا تابع د $a \le x \le b$ په فاصله کې معینه او پیوسته تابع وي.

لکه څنګه چې د انتیګرال په تعریف کې ورته اشاره وشوه، انتیګرال اخیستل د مشتق نیولو عکس عمل دی او په دې هم پوهېږو، چې مشتق اخیستل له توابعو لاندې رابطو او د خاصو فورمولونو څخه پیدا کېږي. نو په دې اساس دا نتیجه لاسته راځي د توابع د انتیګرال محاسبه هغه وخت ترسره کېږي، چې هغه توابع مشخصې توابع وي، یعنې معلومې وي، چې هغوی د کومو توابعو مشتقات دي، په دې صورت کې له دې پرته د اولي تابع محاسبه امکان نه لري.

مثلاً: د مشتق د لاندې فورمول څخه یو توان لرونکې تابع:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$$

$$x \ne -1$$

کولای شو دا نتیجه واخلو، چې $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ اصلي تابع (اولیه تابع) ده، د xn تابع مشتق لپاره؛ نو د مشتق د تابع د پېژندلو لپاره، چې څه ډول تابع ده، کولای شو اولیه تابع یا په پام کې نیول شوی تابع انتیګرال محاسبه کړو، د پورته مثال په اړه به یې ولرو.

$$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1}x^{n-1} + C$$

$$n \ne -1$$

د انتیګرال اخیستلو مهمه طریقه

د $\int F(x)dx$ متغیر انتیګرال د تغیر طریقه په نظر کې نیسو، فرض کوو چې دا انتیګرال د پېژندل شویو صورتونو جز نه وي، که په دې پېژندل شویو صورتونو کې تبدیلي وکړو، انتیګرال د حل وړ دی او نوموړې طریقې ته د متغیر د تغیر طریقه وايي.

په دې طریقه کې لاندې ټکي په پام کې نیول کېږي او مراعات کېږي:

۱- لومړی د x متغیر (یا هر بل متغیر) یا یوه برخه د دې نه د $F(t)$ سره مساوي کوو؛ خو باید دقت وشي، چې $F(t)$ حتماً باید دوه لاندې خاصیته ولري.

الف- $F(x)$ تغیر باید د انتیګرال لپاره یو مناسب متغیر وي، په دې معنی، چې د تغیر د عمل څخه وروسته باید په مشخص شوي انتیګرال بدل شي؛ څو د انتیګرال اخیستو جوګه شي.

ب- د $F(t)$ متغیر تغیر تغیرات باید مجاز وي، یعنې د متغیر x د تغیراتو حوزه باید د $F(t)$ تغیر له میدان سره اړیکه ولري.

۲- باید د تابع دیفرانسیل داسې وي:

$$x = F(t)$$
$$dx = \overline{f}(t) \cdot dt$$

نو د x او dx دوه انتیګرالو پر ځای د هغوی مقادیر ځای پر ځای کوو، یعنې:

$$\int f(x) \cdot dx = \int F(f(t))\overline{f}(t) \cdot dt$$

انتیګرال چې په دې ترتیب لاسته راځي، د t متغیر په اساس وي. اوس که د مناسب متغیر تغیر ټاکل شوی وي، لاسته راغلی انتیګرال به د محاسبې وړ وي.

پس د لاسته راغلي انتیګرال د محاسبې څخه باید د t متغیر پر ځای د هغې مقدار د x په اساس حساب کړو او د انتیګرال په ځواب کې ځای ورکړو.

$$f(t) + C = f(x) + C$$

له هغه ځایه چې په دې طریقه کې د متغیر د تغیر لپاره مناسب دي، په انتیګرالونو کې د خاص اهمیت لرونکي دي، په نتیجه کې په دې ځای کې ځینې د متغیرونو د تغیر څخه د انتیګرالونو د حل د اسانۍ او کومک په خاطر راوړو.

1- که انتیګرال $\int u = F(u)du$ شکل ولري، باید د متغیر تغیر په لاندې شکل وي. $u = F(t)$ یا $u = t$

2- د $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$ انتیګرال لپاره، باید متغیر ته $x = aSin(t)$ تغیر یا $x = aCos(t)$ ورکړو.

3- که لاندې انتیګرال ولرو، $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ متغیر ته یې باید $x = aTag(t)$ تغیر ورکړو.

4- د لاندې انتیګرال د حل لپاره

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)n} \cdot dx$$

باید متغیر ته $x = aTag(t)$ تغیر ورکړو.

مثال: د لاندې انتيګرال محاسبه مطلوب ده.

$$\int \left(x^2 - x + 1\right)^2 (2x-1) \cdot dx$$

$$u = x^2 - x + 1$$

$$du = (2x-1)dx$$

$$\int u^2 \cdot du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\left(x^2 - x + 1\right)^3 + C$$

د جزء په جزء طريقه

دا طريقه د دوه توابعو د ډيفرانشيل د حاصل د فورمول په بنا ده، په دې معنی چې د دوه غير همجنسو توابعو حاصل $f(x), g(x)$ په نظر کې نيسو.

اوس دا انتيګرال په مستقيم ډول امکان پذير نه دی، د داسې انتيګرالونو د حل لپاره د $\int F(x) \cdot g(x) dx$ روش څخه کار اخيستل کېږي، چې جزء په جزء روش نومېږي.

په دې طريقه کې که $u = f(x), u = g(x)$ په پام کې ونيول شي، د ديفرانيسل د فورمولونو په اساس به ولرو:

$$d(u \cdot v = udv + vdu)$$

اوس د پورته رابطې د دواړو خواوو څخه انتيګرال نيسو.

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv + uv - \int vdu$$

$$\int F(x) g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int f(x) g(x) dx$$

پورتنۍ رابطې ته جزء په جزء رابطه وايي، د رابطې څخه دا مهمه نتيجه په لاس راځي، چې د دا ډول انتيګرالونو د حل لپاره د تحت انتيګرال عبارت په دوه برخو په پام کې ونيول شي، يوه برخه مساوي له u سره او بله برخه مساوي له dv سره او وروسته له دې څخه فورمول څخه ګټه واخيستل شي.

وروستۍ رابطې ته په کتو، لرو چې:

$$u = f(x)$$

$$dv = g(x) \cdot dx$$

د لومړۍ تابع څخه du او د دوهمې رابطې څخه V په لاس راځي.

$$du = f(x)dx$$
$$\int dv = \int g(x)\cdot dx \Rightarrow v = \int g(x)\cdot dx$$

د دې لپاره چې څه وخت له دې طريقې څخه ګټه اخيستل کېږي، بايد وويل شي دا طريقه عموماً د هغو انتيګرالونو لپاره په کار وړل کېږي، چې د انتيګرال تحت د ضرب د حاصل په شکل وي او يو له هغو عواملو نه يې مشتق دی، چې اوليه تابع يې معلومه وي.

د دې طريقې د کارولو لپاره لاندې ټکي مراعت کړئ!

۱- هر وخت بايد کوشش وشي، چې dx د dv په قسمت کې ځای ونيسي.

۲- ورکړل شوی ديفرانيسل بايد په دوه عواملو u او dv تقسيم شي.

۳- بايد وکولای شو dv انتيګرال کړو.

مثال: د لاندې انتيګرال محاسبه مطلوب ده.

$$\int x\cdot Cosx\cdot dx$$
$$u = x$$
$$dv = Cosx\cdot dx$$
$$du = dx$$
$$v = \int Cosx\cdot dx = \int udv$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$= xSinx - Cosx + C$$

سټنډرډ انتيګرالونه او د هغو کارونه

په مخکې مثالونو کې مو نوی تغير، لکه u د تابع د عنوان x پېژندلی او وروسته د انتيګرال اخيستنې فورمولونو نه مو کار واخيست، دا چې دا طريقه ډېر وخت په کار وړل کېږي. ښه به وي چې ځينې د دې فورمولونو څخه په ياد کې وساتو، په دې فورمولونو کې u د مستقل تغير په توګه تر مستقل متغير تابع پېشنهاد شوی او du د u ديفرانيسل دی.

د اساسي فورمولونو جدول

$$I.\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} = C, n \neq -1$$

$$II.\int \frac{du}{u} = Lnu + C$$

$$III.\int e^u \cdot du = e^u + C$$

$$IV.\int a^u \cdot du = \frac{a^u}{Lna} + C$$

$$V.\int Cosudu = Sinu + C$$

$$VI.\int Sinudu = -Cosu + C$$

$$VII.\int \frac{du}{Cos^2 u} = Tagu + C$$

$$VIII.\int \frac{du}{Sin^2 u} = -Cotgu + C$$

$$IX.\int \frac{du}{1+u^2} = arcTangu + C$$

$$X.\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2} =} arcSinu + C$$

$$1-\int Cos5x \cdot dx$$

حل: Cos5x مرکب تابعیت ساده تابع ته د بدلولو لپاره، له 5 فورمول نه له کار اخیستو ځخه داسې فرض کوو چې:

$$5x = u$$

$$5dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{5}$$

$$Cos5x = Cosu$$

$$\int Cos5x \cdot dx = \int Cosu \cdot du = \frac{1}{5}\int Cosu \cdot du = \frac{1}{5} Sinu + C$$

$$2-\int \frac{dx}{Sin^2 3x}$$

حل: د 8 فورمول د کارونې لپاره داسې فرض کوو.

$$3x = u$$

$$3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{dx}{Sin^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{Sin^2 u} = -\frac{1}{3} Cotu + C = -\frac{1}{3} Cot3x + C$$

د مشتق د برخې پوښتنې

1) $5x_1^{\ 3} - 2x_1^{\ 2} + 7x_2^{\ 2} = y$

2) $y = 7x_1 + 16x_1x_2^2 + 4x_2^3$

3) $y = (2x_1 + 3)(x_2 - 2)$

4) $y = \dfrac{2x_1 + 3}{x_2 - 2}$

5) $f(x, y) = (x^2 - 7x)(x - y)$

6) $z = 25xy + y^2 - 3x^2$

7) $z = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

8) $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

9) $y = f(x^2 + y^2 + z^2)$

10) $y = f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$

11) $z = 2x^2y^2 + xy + x^3$

د انتیګرالونو د برخې پوښتنې

1) $\int x^3 \cdot dx$

2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

3) $\int (x^4 - 3x^2 + x)dx$

4) $\int \sqrt[3]{x} \cdot dx$

5) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x}}$

6) $\int \dfrac{(x+2)^2}{x} \cdot dx$

7) $\int (1 - 2x)(1 + 3x) \cdot dx$

8) $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} \cdot dx$

9) $\int Sin^2x \cdot Cosx \cdot dx$

10) $\int \dfrac{x}{x^2 - 1} \cdot dx$

11) $\int e^x \cdot dx$

12) $\int e^{-2x} \cdot dx$

13) $\int Sin2ax \cdot dx$

14) $\int \dfrac{1}{x} dx$

14) $\int \dfrac{dx}{Cos^2x}$

15) $\int \dfrac{dx}{Sin^2x}$

16) $\int \dfrac{dx}{9x^2 - 4}$

17) $\int \dfrac{dx}{x^2 - 9}$

18) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

20) $\int 13e^x dx$

21) $\int \dfrac{5}{x^2 + 6} dx$

22) $\int \dfrac{7x^2 \cdot dx}{1 + x^3}$

23) $\int 10x^{-3} \cdot dx$

24) $\int x^2 \cdot e^{ax} \cdot dx$

سرچينې او اخيستنې:

۱- تحلیل ریاضیات پوهاند دکتور عبدالغفار کاکر

۲- ریاضیات مهدی صفر

۳- انالیز (یک) پوهندوی داکتر موهین لعل مهرا پوهنمل گل محمد

۴- انالیز (دو) داکتر موهن لعل مهرا پوهنمل گل محمد

۵- ریاضیات پیش دانشگاهی مولف اس – تی – هو

د ښوونيز نصاب د پراختيا د رياست پيغام

د پوهنې وزارت د تخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت دښوونيز نصاب د انکشاف رياست د ټولنې دعيني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلينو او شاګردانو د درسي کتابونو په برخه کې يې تخنيکي او مسلکي رشتې درلودې او لري يې، په لومړي سرکې يې تصميم ونيو، چې په ښوونيزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بياکتنه وکړي او ورپسې بيا د شاګردانو او محصلينو د درسي کتابونو د تاليف لپاره مبادرت او کوښښ وکړي. د خدای(ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په ميړانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تاليف شول تر څو په وړيا ډول د شاګردانو او محصلينو په واک او اختيار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، ګرانو شاګردانو او د تخنيکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصينو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صميمانه هيله کيږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تاليف او تدوين شوي دي. د مسلکي، تخنيکي او علمي مطالبو او مفاهيمو د څرنګوالي په هکله خصوصاً د هغوی املايي او انشايي اشتباهاتو په اړهمونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخوکې ګرانو شاګردانو ته له دې څخه ښه، غوره، ګټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له ګرانو شاګردانو او محصلينو څخه هيله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هيواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظرکې ونيسي او د کتابونو په ساتنه کې کوښښ او زيار وباسي، ترڅو د ډېرو شاګردانو او محصلينو د ګټې وړ وګرځي.

پته: دپوهنې وزارت – دتخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت د تعليمي نصاب د انکشاف رياست – دکتابونو د تاليف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مديريت.