دنباله عددی و سری عددی (۲)

در عمل دستهٔ مهمی از دنباله‌ها از جمع‌زدن متوالی یا انباشتن جملات یک دنباله داده شده حاصل می‌شوند. مثلاً اگر به نمایش اعشاری عددی نگاه کنیم:

$$c = c_{۰}/c_{۱}c_{۲}c_{۳}\dots$$

این در واقع حد دنبالهٔ اعداد اعشاری مختومهٔ زیر است:

$$c_{۰}, c_{۰} + \frac{c_{۱}}{۱۰}, c_{۰} + \frac{c_{۱}}{۱۰} + \frac{c_{۲}}{۱۰۰}, \dots$$

که این دنباله از انباشتن متوالی دنباله زیر به‌دست می‌آید:

$$c_{۰}, \frac{c_{۱}}{۱۰}, \frac{c_{۲}}{۱۰۰}, \dots$$

به طوری کلی اگر دنباله $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ داده شده باشد، مقصود از سری مجموع‌های جزیی این دنباله، دنباله زیر است:

$$a_k, a_k + a_{k+۱}, a_k + a_{k+۱} + a_{k+۲}, \dots$$

اگر دنبالهٔ اخیر به A همگرا باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود که سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست و می‌نویسیم $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$. در غیر این صورت، سری واگرا خوانده می‌شود. بدین ترتیب، اگر دنباله عدد صحیح نامنفی $c_{۰}, c_{۱}, c_{۲}, \dots$ داده شده باشد که در آن برای $i \geq ۱$، $۰ \leq c_i \leq ۹$، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{c_n}{۱۰^n}$ طبق اصل تمامیت همگراست و حد آن به $c_{۰}/c_{۱}c_{۲}c_{۳}\dots$ نمایش داده می‌شود. وقتی همهٔ a_k ها اعداد حقیقی مثبت باشند واضح به نظر می‌رسد که انباشتن a_n ها فقط وقتی ممکن است منجر به یک حد متناهی شود که a_n ها سریعاً کوچک شوند. مثلاً برای $c = c_{۰}/c_{۱}c_{۲}c_{۳}\dots$، جمله اندیس n برابر

$\frac{c_n}{10^n}$ است که به صفر میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow +\infty$. در واقع شرط $a_n \longrightarrow 0$ یک شرط لازم برای همگرایی است حتی اگر a_n ها عدد مختلط باشند.

(۷−۱) شرط لازم همگرایی. اگر سری اعداد مختلط $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، داریم $a_n \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow +\infty$.

اثبات. مجموع جزیی $a_k + \cdots + a_n$ را به S_n نمایش می‌دهیم. فرض کنید سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ به S همگراست، یعنی $S_n \longrightarrow S$. اگر $e > 0$ داده شده باشد، می‌خواهیم N را طوری بیابیم که برای $n > N$ داشته باشیم $|a_n| < e$. چون $S_n \longrightarrow S$، برای $\frac{e}{2} > 0$، N_1 وجود دارد که اگر $n > N_1$، آنگاه $|S_n - S| < \frac{e}{2}$. قرار می‌دهیم $N = N_1 + 1$، پس برای $n > N$ داریم:

$$|S_n - S| < \frac{e}{2} \quad , \quad |S_{n-1} - S| < \frac{e}{2}$$

بنابراین طبق نامساوی مثلث

$$|S_n - S_{n-1}| \leq |S_n - S| + |S - S_{n-1}| < e$$

ولی $S_n - S_{n-1} = a_n$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

لازم به تأکید است که این شرط به تنهایی برای همگرایی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ کافی نیست و در واقع a_n ها ممکن است در عین کوچکتر شدن و میل کردن به صفر، آنقدر سریع کوچک نشوند که مجموع آنها به عددی میل کند. مثال ساده و معروف زیر را باید همواره در ذهن داشت.

(۷−۲) سری هارمونیک. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را بررسی می‌کنیم. در اینجا شرط لازم همگرایی برقرار است زیرا که $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow \infty$ ولی نشان می‌دهیم سری واگراست. به گروه‌بندی زیر از جملات سری تا اندیس $n = 2^k$ توجه کنید:

$$S_{2^k} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k})$$

داریم $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$، $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 4(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$، ...، $\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k} > 2^{k-1}(\frac{1}{2^k}) = \frac{1}{2}$ بنابراین $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$، چون با افزایش k، $1 + \frac{k}{2}$ به دلخواه بزرگ می‌شود، S_n ها به حدی (متناهی)

میل نمی‌کنند. این مثال نشان می‌دهد که بررسی همگرایی یک سری ممکن است در مواردی دشوار باشد. در این جلسه ضمن معرفی چند سری مرجع، آزمون‌هایی برای همگرایی سری‌ها مطرح خواهیم کرد.

دو مثال زیر نقطهٔ ارجاع بسیاری از سری‌های دیگر و نیز بحث‌های نظری هستند.

(۷—۳) دو مثال

(۷—۳—۱) سری هندسی. فرض کنید $a \neq 0$ و r دو عدد مختلط داده شده باشند. سری $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ را در نظر می‌گیریم که از انباشتن دنباله زیر به‌دست می آید:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

مورد $a = 0$ را کنار گذاشتیم زیرا که در این حالت همهٔ جملات صفر می‌شوند و وضعیت سری مشخص است. نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ همگراست اگر و تنها اگر $|r| < 1$. نخست به اتحاد زیر توجه کنید

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{1}$$

که صحت آن را می‌توان با طرفین‌ـ وسطین تحقیق کرد. بنابراین به عنوان مجموع جزیی سری هندسی داریم:

$$\sum_{n=0}^{N} ar^n = a\frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

حال اگر $|r| < 1$، $r^{N+1} \longrightarrow 0$ وقتی $N \longrightarrow +\infty$، پس $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ به $\frac{a}{1-r}$ همگراست. بالعکس اگر $|r| \geq 1$، آنگاه $|ar^n| \geq |a| > 0$ و جملهٔ n ام به صفر میل نمی‌کند، پس شرط لازم همگرایی برقرار نیست.

(۷—۳—۲) سری p. برای $p > 0$ داده شده، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را سری p می‌نامند. در اینجا سری را فقط برای مقادیر صحیح p در نظر می‌گیریم. در آینده مقادیر غیر عدد صحیح نیز در نظر گرفته خواهد شد. برای $p = 1$، سری هارمونیک $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ به‌دست می آید که دیدیم واگراست هر چند که جملهٔ n ام

آن به صفر میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow +\infty$. برای $p = ۲$، توجه کنید که

$$n > ۱: \quad \frac{۱}{n^۲} < \frac{۱}{n^۲ - n} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}$$

و داریم

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=۲}^{N} \frac{۱}{n^۲-n} &= (\tfrac{۱}{۱} - \tfrac{۱}{۲}) + (\tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۳}) + \cdots + (\tfrac{۱}{N+۱} - \tfrac{۱}{N}) \\ &= ۱ - \tfrac{۱}{N} \end{aligned}$$

بنابراین $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n^۲-n}$ به مقدار ۱ همگراست. حال داریم:

$$N > ۱: \quad \sum_{n=۱}^{N} \frac{۱}{n^۲} < ۱ + \sum_{n=۲}^{N} \frac{۱}{n^۲ - n} = ۲ - \frac{۱}{N} < ۲$$

بنابراین دنباله (S_N)، $S_N = \sum_{n=۱}^{N} \frac{۱}{n^۲}$، یک دنبالهٔ صعودی با کران بالایی است که طبق ۶—۳—۴ جلسهٔ قبل به کوچکترین کران بالایی خود میل می‌کند. به همین ترتیب اگر $p > ۲$، داریم $\frac{۱}{n^p} < \frac{۱}{n^۲}$ و مجموع‌های جزیی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ دنباله‌ای صعودی با کران بالایی هستند، پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ همگراست.

ایدهٔ اثبات فوق را برای ارجاع بعدی به صورت زیر ثبت می‌کنیم:

(۷—۴) فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ یک دنباله اعداد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر برای دنبالهٔ مجموع‌های جزیی یک کران بالایی وجود داشته باشد.

اثبات. دنبالهٔ مجموع‌های جزیی را در نظر می‌گیریم:

$$S_k = a_k, S_{k+۱} = a_k + a_{k+۱}, \ldots$$

چون $a_i \geq ۰$، داریم $S_k \leq S_{k+۱} \leq S_{k+۲} \leq \cdots$. پس اگر S_n ها دارای کران بالایی باشند، طبق ۶—۳—۴، S_n به کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ $\{S_k, S_{k+۱}, \ldots\}$ میل می‌کند. بالعکس اگر دنبالهٔ (S_n) همگرا باشد، می‌دانیم که در واقع هر دنباله همگرا در $\mathbb{C}$ کراندار است. □

به دلایلی که به زودی خواهیم دید، سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. برای این گونه سری‌ها اکنون می‌توانیم با توجه به (۷—۴) چند آزمون همگرایی ارائه کنیم:

(۷−۵) فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی غیرمنفی باشند و اندیسی N وجود داشته باشد، $N \geq k,l$، که برای $n \geq N$ داشته باشیم $a_n \leq b_n$. در این صورت:

الف) اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

اثبات. چون جمع کردن تعدادی متناهی جملهٔ اولیه اثری بر همگرایی یا واگرایی ندارد، کافی است در مورد سری‌های $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ بحث کنیم. اگر $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، دنبالهٔ مجموع‌های جزیی آن از کران بالایی، مثلاً $M > ۰$ برخوردار است. چون $a_n \leq b_n$، M کران بالایی برای مجموع‌های جزیی $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ نیز می‌باشد، پس طبق ۷−۴، $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگراست. بالعکس اگر $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا نباشد، مجموع‌های جزیی آن دارای کران بالایی نیستند و چون $b_n \geq a_n$، مجموع‌های جزیی $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ نیز به طور اولی کران بالایی ندارند، پس $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ واگراست. □

در این آزمون مقایسهٔ اندازهٔ a_n و b_n به صورت تفاضل مطرح بود (یعنی $b_n - a_n \geq ۰$). آزمون مشابهی برای نسبت وجود دارد:

(۷−٦) $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و N وجود دارد که $b_n \neq ۰$ برای $n \geq N$. در این صورت:

الف) اگر عددی $M > ۰$ وجود داشته باشد که $\frac{a_n}{b_n} \leq M$ برای n از مرحله‌ای به بعد، آنگاه اگر $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر عددی $m > ۰$ وجود داشته باشد که $\frac{a_n}{b_n} \geq m$ برای n از مرحله‌ای به بعد، آنگاه اگر $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. الف) شرط $\frac{a_n}{b_n} \leq M$ معادل $a_n \leq Mb_n$ است. اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ به B همگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty}(Mb_n)$ به MB همگراست، پس طبق (۷−۵)، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) شرط $\frac{a_n}{b_n} \geq m$ معادل $a_n \geq mb_n$ است. اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty}(mb_n)$ نیز واگراست چون $m \neq ۰$ (اگر $\sum_{n=l}^{\infty}(mb_n)$ همگرا باشد، با ضرب کردن هر جمله در $\frac{۱}{m}$ نتیجه می‌شود که سری $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ نیز واگراست) پس چون $a_n \geq mb_n$، طبق (۷−۴) سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. □

بسیاری اوقات حالت خاصی از (۵—۷) به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

(۷—۷) $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنبالهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و N وجود دارد که $b_n \neq 0$ برای $n \geq N$. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ وجود داشته باشد و برابر L باشد. در این صورت:

الف) اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $L > 0$ و $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

اثبات. این در واقع حالت خاصی از ۷—٦ است. در (الف)، می‌توان از $M = L + 1$ استفاده کرد زیرا که اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$، از مرحله‌ای به بعد همهٔ $\frac{a_n}{b_n}$ ها از $L + 1$ کوچکتر می‌شوند. در (ب)، اگر $L > 0$، با گرفتن $m = \frac{L}{2}$، می‌بینیم که چون $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$، از مرحله‌ای به بعد $\frac{a_n}{b_n}$ ها باید از m بزرگتر باشند. □

(۷—۸) مثال. وضعیت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-n+3}{n^4+1}$ را از نظر همگرایی بررسی می‌کنیم. در این گونه مثال‌ها آنچه تعیین‌کننده است، اختلاف درجهٔ بالاترین جملهٔ صورت و مخرج است. اگر (درجهٔ صورت)—(درجهٔ مخرج) $= p$، مقایسه با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ کارساز است. در مثال فوق:

$$\frac{\frac{2n^3-n+3}{n^4+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2n^4 - n^2 + 3n}{n^4+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 2$$

بنابراین واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ نتیجه می‌دهد که سری داده شده واگراست.

(۷—۹) نکته. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ دو سری همگرا، به ترتیب به A و B باشند. در این صورت سری $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ را در نظر می‌گیریم که در آن $c_n = a_n + b_n$. ادعا می‌کنیم که $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ به $A + B$ همگراست. در واقع اگر مجموع‌های جزیی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$، $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ را به ترتیب به A_n، B_n و C_n نمایش دهیم، داریم $C_n = A_n + B_n$ و حکم از گزارهٔ ٦—۴ جلسهٔ قبل نتیجه می‌شود. به همین ترتیب اگر c یک عدد مختلط دلخواه باشد، به سادگی دیده می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty}(ca_n)$ به cA همگراست. ولی نباید تصور کرد که اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n = B$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty}(a_n b_n)$ برابر AB است. مجموع جزیی سری اخیر تا مرحلهٔ N برابر $a_k b_k + \cdots + a_N b_N$ است

در حالی که حاصل‌ضرب مجموع‌های جزیی $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$، هر یک تا مرحلهٔ N، برابر $(a_k + \cdots + a_N)(b_k + \cdots + b_N)$ می‌باشد.

به کمک سری هندسی می‌توان دو آزمون بسیار مؤثر برای سری‌های اعداد مثبت ارائه کرد. دو آزمون زیر هر یک، یکی از ویژگی‌های سری هندسی را مبنا قرار می‌دهد. به سری هندسی زیر توجه کنید که در آن r یک عدد حقیقی مثبت فرض می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

می‌دانیم شرطی لازم و کافی برای همگرایی این سری این است که $r < 1$. حال می‌توان r را دو گونه تعبیر کرد. از سویی r نسبت دو جملهٔ متوالی است و از سویی دیگر r ریشهٔ n ام جملهٔ اندیس n این سری. در زیر "آزمون نسبت" در شرایطی که نسبت جملات متوالی تقریباً رفتاری مانند رفتار سری هندسی دارد، یعنی حدوداً ثابت است، کار می‌کند. "آزمون ریشه" وقتی کارایی دارد که ریشهٔ n ام جملهٔ اندیس n حدوداً ثابت باشد.

(۷−۱۰) آزمون نسبت. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی $\rho < 1$ وجود داشته باشد و مرحله‌ای N که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر مرحله‌ای N وجود داشته باشد که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگراست.

اثبات. طبق فرض داریم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$ برای $n \geq N$، پس:

$$a_{N+1} \leq \rho a_N$$

$$a_{N+2} \leq \rho a_{N+1} \leq \rho^2 a_N$$

$$\vdots$$

$$a_{N+k} \leq \rho a_{N+k-1} \leq \cdots \leq \rho^k a_N$$

بنابراین از مقایسهٔ سری با جملات مثبت $a_{N+۱} + a_{N+۱} + \cdots$ با سری هندسی $a_N\rho + a_N\rho^۲ + a_N\rho^۳ + \cdots$ با قدرنسبت $\rho < ۱$ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست. در مورد (ب)، داریم

$$\cdots \geq a_{N+۲} \geq a_{N+۱} \geq a_N > ۰$$

بنابراین شرط لازم همگرایی، $a_n \longrightarrow ۰$، تأمین نمی‌شود، و سری واگراست. □

گاهی اوقات یک نتیجهٔ ایده آزمون فوق به صورت زیر کفایت می‌کند. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n}$ وجود داشته و برابر R باشد. اگر $R < ۱$، عددی ρ بین R و ۱ در نظر می‌گیریم $R < \rho < ۱$. طبق تعریف حد دنباله، مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$، $|\frac{a_{n+۱}}{a_n} - R| < \rho - R$، پس $\frac{a_{n+۱}}{a_n} < \rho$ و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر $R > ۱$، مجدداً مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|R - \frac{a_{n+۱}}{a_n}| < R - ۱$، پس $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \geq ۱$ و سری واگراست. در حالتی که $R = ۱$، نتیجه قاطعی از این آزمون حاصل نمی‌شود. مثلاً برای سری p، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$،

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{۱}{(n+۱)^p}}{\frac{۱}{n^p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{(۱+\frac{۱}{n})^p} = ۱$$

مستقل از اینکه p چه باشد. ولی این سری به‌ازای $p = ۱$ واگرا و به‌ازای $p > ۱$ همگراست.

(۷–۱۱) مثال. فرض کنید عدد حقیقی $x > ۰$ داده شده باشد. نشان می‌دهیم $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگراست. از آزمون نسبت داریم:

$$\frac{\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+۱} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ۰ < ۱$$

پس این سری همگراست.

(۷–۱۲) آزمون ریشه. فرض کنید $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی $\rho < ۱$ وجود داشته باشد و مرحله‌ای N که برای $n \geq N$ داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$ ، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر برای بی‌نهایت اندیس n داشته باشیم $\sqrt[n]{a_n} \geq ۱$ ، آنگاه سری $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگراست.

اثبات. برای (الف) داریم $a_n \leq \rho^n$ برای هر $n \geq N$ و مقایسه با سری هندسی $\sum \rho^n$، همگرایی سری را به اثبات می‌رساند. در مورد (ب)، $\sqrt[n]{a_n} \geq ۱$ به‌ازای بی‌نهایت اندیس n، نشان می‌دهد $a_n \geq ۱$ به‌ازای بی‌نهایت اندیس n، پس شرط لازم همگرایی $a_n \longrightarrow ۰$ نمی‌تواند برقرار باشد و سری واگراست. □

در اینجا نیز بسیاری اوقات $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ در نظر گرفته می‌شود. اگر این حد وجود داشته باشد و آن را به R نمایش دهیم، سه وضعیت زیر ممکن است رخ دهد. اگر $R < ۱$ سری همگراست زیرا که اگر عددی ρ بین R و ۱ اختیار کنیم، $R < \rho < ۱$، از تعریف حد دنباله نتیجه می‌گیریم مرحله‌ای N وجود دارد که برای $n \geq N$ داریم $|\sqrt[n]{a_n} - R| < \rho - R$، پس $\sqrt[n]{a_n} < \rho$ و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر $R > ۱$، پس از مرحله‌ای N داریم $|R - \sqrt[n]{a_n}| < R - ۱$، پس $\sqrt[n]{a_n} > ۱$ و واگرایی نتیجه می‌شود. در اینجا نیز $R = ۱$ نتیجه‌ای در مورد همگرایی نمی‌دهد زیرا که مجدداً در مورد سری p:

$$\sqrt[n]{\frac{۱}{n^p}} = (\frac{۱}{\sqrt[n]{n}})^p$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$، حد عبارت بالا به‌ازای هر p برابر ۱ است. پس این آزمون نمی‌تواند میان سری واگرای $\sum \frac{۱}{n}$ و سری همگرای $\sum \frac{۱}{n^۲}$ تمیز دهد.

(۷−۱۳) مثال. فرض کنید عدد حقیقی $x > ۰$ داده شده است، نشان می‌دهیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ همگراست.

طبق آزمون ریشه:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = \frac{x}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ۰ < ۱$$

پس سری همگراست. می‌توانستیم این امر را از مقایسه $\frac{x^n}{n^n} \leq \frac{x^n}{n!}$ نیز به کمک مثال ۷−۹ نتیجه بگیریم.