بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب پېژندنه

د كتاب نوم: اقتصادي رياضي

څانگه: بانكداري او د تجارت اقتصاد

مولف: محمد دهقانمل

ژباړن: عزت الله ځواب

د څار كمېټه:

- محمد آصف ننگ د تخنيكي او مسلكي زده كړو معين
- ديپلوم انجنير عبدالله كوزابي د تعليمي نصاب رييس
- محمد اشرف وحدت په تعليمي نصاب كې د معينيت د مقام سلاكار

د علمي تصحيح كمېټه:

- عبدالجميل ممتاز
- محب الرحمن محب
- احمد فهيم سپين غر

د گرافيک او ډيزاين څانگې مسئول : محمد جان عليرضايي

گرافيک او ډيزاين: محمد سليم خان

چاپ كال: ۱۳۹۲ لمريز كال

تيراژ: ۱۵۰۰

چاپ ځل: لومړی

وېب پاڼه: www.dmtvet.gov.af

برېښناليک: info@dmtvet.gov.af

کډ ISBN: ۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۵۹۰

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو

ور سره عرب، ګوجر دي
پامیریان، نورستانیان

براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان

دا هېواد به تل ځلېږي
لکه لمر پر شنه آسمان

په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان

نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

د پوهنې وزیر پیغام

ګرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د یوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغې ټولنې د پیاوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زیار پورې تړلې دي. همدا بشري قوه او کاري متې دي چې د هیواد انکشافي اهدافو ته د رسیدو لارې چارې طی کوي او د یوه نیکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکې تضمینوي.

انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د یوه سوکاله ژوند د اسبابو او ایجاباتو د تکمیل لپاره خپل اغیزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځایه ده چې د یوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپیریال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هیڅ حالت کې نه نفی کیږي او نه هم منقطع کیږي.

په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت مسوولیت او مکلفیت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همدارز معقولو او مشروعو قوانینو ته په ژمنتیا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چابکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپیڅلي هدف ته د رسیدو په خاطر د انساني ظرفیت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنیکي کادرونو روزنه او پراختیا یو اړین مقصد دی. همدا په تخنیکي او مسلکي زده کړو مزین تنکي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سیستماتیک ډول د هیواد انکشاف محقق او میسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تګ لاره، دولتداري او ټولنیز نظام د اسلام له سپیڅلو احکامو څخه الهام اخیستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي باید په علمي معیارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړیتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفیت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربیت او په سوچه اسلامي روحیې د هغوی پالنه نه یوازې پخپل ذات کې یوه اساسي وجیبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه یې وژغوري او د نورو له سیاسي او اقتصادي احتیاج څخه یې آزاد کړي.

زموږ ګران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربیون باید په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نیکمرغه افغانستان ارمان، یوازې او یوازې د دوی په پیاوړو متو، ویښ احساس او نه ستړي کېدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنیکي زده کړو له امله کیدای شي په ډیرو برخو کې د افغانستان انکشافي اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو لیکوالانو، مولفینو، ژباړونکو، سموونکو او تدقیق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهیر کې د ټولو کورنیو او بهرنیو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومې مننه کوم. له درنو او پیاوړو استادانو څخه رجامندانه هیله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدریس او فعاله تدریب سره دې د زړه په ټول خلوص، صمیمي هڅو او وجداني پیکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي.

د نیکمرغه، مرفه، پرمختللي او ویاړمن افغانستان په هیله

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

لړلیک

مقدمه

اقتصادي رياضي د بانکدارۍ، اقتصاد او تجارت د څانګې د مهمو او اساسي مضامینو له ډلې څخه ده، چې محصلین يې په زده کولو سره د بانکي محاسبو او د تجارت د اقتصاد لپاره اړين مهارتونه ترلاسه کولای شي.

په لومړي څپرکي کې د توابعو لمټ، لمټ او په مسلکي برخو کې د هغو د کارولو په اړه توضيحات وړاندې شوي دي. په دويم څپرکي کې بيا مشتق، د مشتق ډولونه، د هغو اړوندې قاعدې او اړوند تمرينات له پوره شننې سره ځای پرځای شوي دي.

په درېيم څپرکي کې د قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونې په اړه توضيحات او تشرېحات وړاندې شوي دي. د څپرکي د موضوعاتو د نچوړ تمرينونه راوړل شوي، چې د يادو تمرينونو حل د محصلينو لپاره د درس په ښه درک کې مهمه مرسته کولای شي.

هيلمن يم د دې ټولګې په چاپ سره د دې برخې د استادانو د ستونزو يوه برخه حل شي او د درنو استادانو او ګرانو محصلينو لپاره اړينې اسانتياوې منځ ته راوړي.

په درناوي

محمد دهقان مل

د کتاب ټولیزه موخه

په محاسبوي چارو کې اړین مهارتونه ترلاسه کول او د اقتصادي ریاضي د اړوندو مسایلو حل؛ څو له قاعدو سره سم د تولید، صنعت او احصایې په برخو کې ترې ګټه واخستل شي او د انسان ورځنی ژوند ورباندې هوسا شي.

لومړی څپرکی

د توابعو لمټ او د هغو اهميت

ټوليزه موخه

لوستونکي کولای شي د توابعو د لمټ اساسي مفهوم، د هغې اصول او قواعد درک کړي، لازم مهارتونه په کار يوسي، کولای شي مسايل حل کړي او د ټولنيز ژوند په ټولو ساحوکې يې د ګټې اخېستو وړ وګرځي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي له پای ته رسولو سره لوستونکي کولای شي:

۱- د لمټ مفهوم په اساسي بڼه درک کړي.

۲- لمټ تعريف کړي او د هغو په قوانينو پوه شي.

۳- دا $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $0-\infty$ $\infty-\infty$ لمټونه محاسبه کړای شي.

٤- د مثلثاتي توابعو لمټ تعريف او د هغو سوالونه په سمه توګه حل کړي.

د لمټ اساسي مفهوم

انټروال! په لغت کې فاصلې ته وايي، د رياضي په اصطلاح کې د دوو مختلفو عددونو ترمنځ فاصلې ته انټروال وايي. انټر وال په درې ډوله دی:

۱. تړلی انټروال

۲. نيم پرانيستی انټروال

۳. پرانيستی انټروال

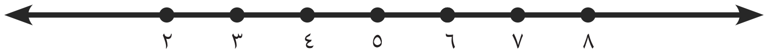
۱. تړلی انټروال: هغه انټر وال دی، چې د دوه نقطو د انجام درلودونکی وي.

لکه [8, 2] لوی قوس د تړلي قوس علامه راښيي.

د فورمول په شکل يې دارنګه نوشته کولای شو. $[\ xEIR: 2 \leq x \leq 8x]$

په لاندې شکل ښودل کېږي، لکه (۱) شکل

(۱)شکل



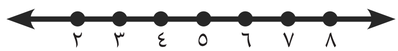
۲- نیم خلاص انټروال یا نیم تړلی انټروال: هغه انټروال دی، چې یو انجام په کې داخل او بل پکې نه وي لکه.$[2,8)$ ، $(2,8]$ کوچنی قوس د خلاص والي علامه راښيي او لوی قوس د تړل کېدو علامه راښيي.

$A = [\ x \in IR / 2 > x < 8]$

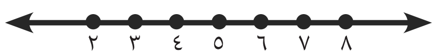
یعنې

$B = [\ x \in IR / 2 \leq x < 8]$

(۲) شکل



(۳) شکل



۳- خلاص انټروال: هغه انټروال دی، چې د نقطو انجام په کې شامل نه وي.

مثال (3,1) یعنې $P = [\ x \in IR : 3 < x < 11]$

د یوې تابع حد یا د یوې تابع لمټ

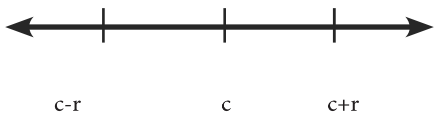
مجاورت: هر خلاص انټروال د خپلو شاملو عناصرو مجاورت وي، لکه $(2,8)$ یو خلاص انټروال دی، چې له ۳ تر ۷ عناصر په هغه کې شامل دي او $(2,8)$ انټروال د دې ټولو عناصرو مجاورت دی.

متناظر مجاورت: هر خلاص انټروال د خپل ځان وسطي متناظر مجاور وي، لکه $(2,8)$ انټروال چې د متناظر مجاورت نقطه یې (٥) ده، باید وویل شي، چې د مجاورتونو هره نقطه

ډېر متناظرونه لري.

که (b,a) د x عدد يو مجاورت وي، داسې چې x د (b,a) وسطي نقطه راشيي. دا چې (b,a) د x د متناظر مجاورت په نوم يادېږي.

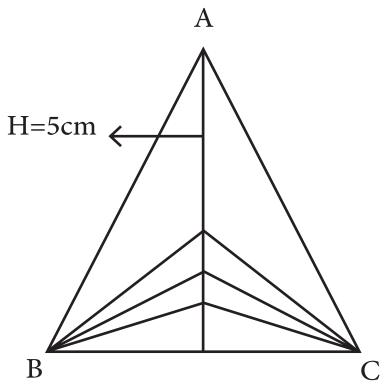
مثلاً $(0,2)$ چې متناظر مجاورت د هغه دی، د r د هر مثبت عدد لپاره $(r\rangle 0)$ $(c-r,+r,)$ د C يو مجاورت وي (٤ شکل)



(٤) شکل

مخکې له دې چې لمټ (حد) تعريف کړو، هغه د مثالونو په واسطه واضح کوو او په (٦) شکل کې د ABC مثلث په نظر کې نيسو.

چې قاعده يې a=6cm او ارتفاع يې h=5cm او مساحت يې په F ښايو، لرو چې



$f = a.h.\frac{1}{2}$

(٥) شکل

$F=\frac{1}{2}.6.5=15cm$ که قاعده ثابته وساتو او ارتفاع ته يې تغير ورکړو؛ نو مساحت يې هم تغير کوي او د h تابع دی، يعنې $F(h)=\frac{1}{2}6.h$ چې په لاندې جدول کې د h او $F(h)$ ځينې قيمتونه ښودل شوي.

h	5	3	1	0,5	0,2	0,1	0,02	0,001
F(h)	15	9	3	1,5	0,6	0,3	0,06	0,003

له پورته جدول څخه معلومېږي، چې دh په کمېدو F(h) هم کمېږي. هغه وخت چې h او د F(h)مساحت صفر ته نیږدې کېږيF(h) هم صفر ته تقرب کوي. په دې حالت کې ویلای شو چې دF(h) صفر دی او په رياضي کې يې په لاندې شکل ليکو:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

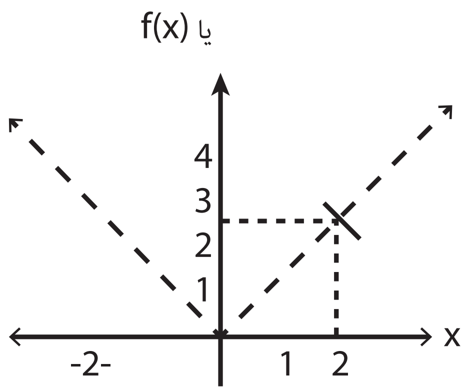
مثال: د $f(x) = x^2$ تابع په نظر کې نيسو،کله چې $x \longrightarrow 2$ ته نیږدې کېږي f(h) کوم قيمت ته تقرب کوي.

x	1	1,5	1,9	1,99	1,99	1,999	-2-	2,001	2,01	2,02	2,1	2,5	3
F(x)	1	2,25	3,61	3,9601	3,980025	3,996001	- 4-	4,004001	4,04401	4,0804	4,41	6,25	9

په پورته جدول کې ليدل کېږي، کله چې x د 2 خواته نېږدې کېږي F(x) د 4 خواته تقرب کوي.

يعنې

$$\lim_{n \to 2} f(x) = \lim_{n \to 2} x^2 = 4$$



شکل (6)

په پورته مثال کې ليدل کېږي، چې د توابعو د لمټ د پيدا کولو لپاره په يو a کې د ذکر شوې نقطې په يوه مناسب مجاورت کې د تابع وضعيت مطالعه شو او مطلوب لمټ پيدا شو.

که دې لمټ ته د عمومي لمټ نوم ورکړو، ليکلی شو چې: $\lim_{x\to a} f(x) = b$

د b عدد د f د يوې تابع لمټ د a په نقطه کې يادېږي. که د N د هر مجاورت لپاره د b نقطه د D يومجاورت د a نقطه د f د تعريف په ناحيه کې موجود وي او د هر x لپاره عنصر له D د f(x) عنصرله N وي. يعنې $\lim_{x\to a} f(x) = b$ بايد ووايو حتمي نه ده، چې a په a $\longrightarrow$ n د تعريف په ناحيه کې F شامل وي.

د توابعو لمټ

لمټ د تحول د اندازې د ټاکلو د نهايي قيمتونو او يا د توابعو له مخې مهم وي. د معاصرې رياضي عمومي مسايل له پخوا نه مشتق، سلسلې او نور له لمټ نه په ګټه اخيستو تعريف او توضېح کېږي.

د تحول تقرب (په يوه نقطه کې د يوې تابع ښي او کيڼ حد ته) ويل کېږي، چې x متحول د a ټاکلي عدد ته تقرب کوي، که چېرې په خپل زړه a ته نيږدې کېدای شي. يعنې د x او a تر منځ تفاوت له دواړو عددونو څخه کوچنی 8<0 تر ټولو کوچنی شي. پورته مفهوم په سمبوليک شکل دارنګه ليکل کېږي. $8 > 0 : |x - a| \angle 8$

Lim x=a يا x $\longrightarrow$ a يا | x-a | $\longrightarrow$ 0

له ښۍ خوا د متحول تقرب ($x \to a^+$) که په يو متناقص تصاعدکې دx قيمتونه شتون ولري، داسې چې تدريجاً څومره يې چې زړه وغواړي a ته نيږدې شي، لکه:

$x \to a^+$ X: a+0, 1, a+0,01, a+0,001, a+0, 0001,……….

له کيڼې خوا د متحول تقرب ($x \to a^-$) که چېرې متزايد تصاعد کې د x قيمتونه ټاکل کېدای شي، داسې چې تدريجاً په خپل زړه a ته نيږدې شي. دا رنګه

$x \to a^-$ X: a-0,1, a-0,01a-0,001,a-0,0001,……

بايد وويل شي، چې د x متحول تقرب a عدد ته معادل دی، دواړو خواوو (ښي او کيڼ) ته له تقرب سره $x \to a \Leftrightarrow (x \to a^+, x \to a^-)$

مثال:

وښيئ چې $\lim_{x\to 3}(4x+8)=20$

حل: د اختياري عدد لپاره $\in>0$ (ابتسيلون) قبلوو، چې $|(4X+8)-20|\angle\in$ وي $\delta>0$ عدد تعينوو.

$\Rightarrow|4X-12|<\in\Rightarrow|(4X+8)-20|\angle\in$ | دواړه خواوې په 4 تقسيموو چې

$\Rightarrow 4|X-3|<\in$ $\qquad \frac{4|X-3|}{4}<\in/4\Rightarrow|X-3|\in/4$

نو د $\delta=\in/4$ لپاره لرو، چې

$\Rightarrow 4|1-3|<\in\Rightarrow 4x-12<\in \quad |x-3|<\delta\Rightarrow|x-3|<\in/4$

د 8 عدد جمع او منفي کوو $4x+8-8-12<\in$

$|(4x+8)-20|<\in\Rightarrow Lim(4x+8)=20$ $\quad$ 3 x

دويم مثال: د x متحول د 4 عدد ته تقرب کړی، دا $4\to x$ مفهوم توضېح کړئ!

x:4,1 ,4,01,4,001,4,0001………. 4^+

حل

x:3,9 ,3,99 ,3,999,3,9999……… 4^-

په پای کې بايد ووايو، چې $x\to 4$

د تابع لمټ

هر کله چې د f(x) تابع په يوه خلاص انتروال کې، چې د a عدد په هغې کې شامل دی. تعريف شوی وي د x متحول a ته په تقرب f(x) په خپله خوښه L عدد ته نيږدې شي، ويلای شو چې د f(x) تابع لمټ عبارت له Lڅخه دی.کله چې x، a تقرب وکړي، په لاندې شکل ليکو چې

$\lim_{x\to a} f(x)=$ يا $1\,f(x)_{x\to a}=1$

د لمټ تعريف:

د f(x) تابع د Lعدد سره مساوي دی، کله چې $x\to a$ ته تقرب کړي.

که $\in>0,\delta>0:|x-a|<f\Rightarrow|F(x)-L|<\in$

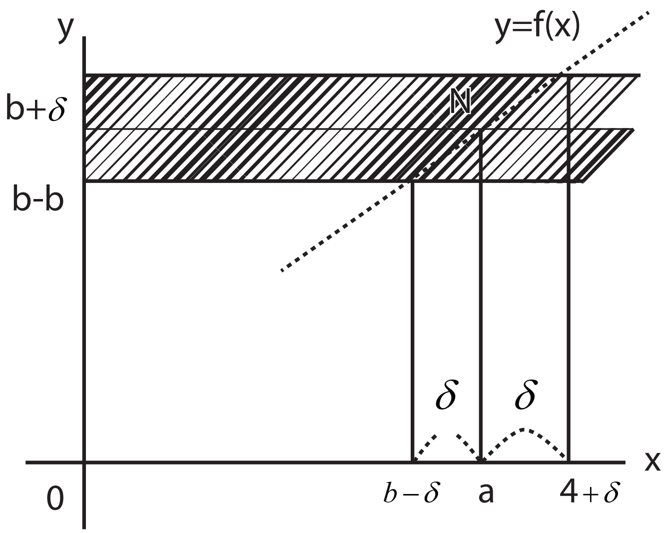
$$\in > 0, \delta >: a-\delta < x < a+f \Rightarrow l- \in < f(x) < l+ \in$$

دا چې:

$$\in > 0, \delta > 0 : x \in (x-f, x+f) = f(x) \in (l- \in, l+ \in)$$

یا پورته تعریف په لاندې شکل لیکل کېدای شي.

$$\lim_{x \to a} f(x) = I \Leftrightarrow (|x-a| \to 0 \Rightarrow |f(x)-L| \to 0)$$



(۷) شکل

ښي او کيڼ لمتونه

۱: د f(x) تابع د a په عدد کې د ښي لمټ لرونکې L_1 ده، که د هر $0 < \in$ لپاره د $0 < \delta > 0$ کوچنی عدد شتون ولري، داسې چې

$$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (L1- \in, L1+ \in)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = 1$$

2 f(x) د تابع په a کې د کيڼ L_2 لرونکې ده، چې د هر $0 < \in$ لپاره د $0 < \delta > 0$ يوعدد شتون لري، داسې چې.

$x \in (a-\delta-a) \Rightarrow f(x) \quad (L2-\in, L2+\in)$

او یایې په سمبولیک شکل لیکو چې

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\langle 2}} f(x) = l_2 \lim_{x\to a^-} f(x) \ = l_2$$

۳- د f(x) تابع هغه وخت چې $x \to a$ د L لمټ لرونکی وي.

$\lim\limits_{x\to a}$ f(x) =L په دې شرط چې $\lim\limits_{x\to a^-}$ f(x) =L= $\lim\limits_{x\to a^+}$ f(x)

باید وویل شي هغه وخت، چې د یوې تابع ښي او کیڼ لیمتونه له یو بل سره مساوي نه وي د لمټ لرونکي نه ده.

مثال:- وښایه چې $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

حل: فرضوو چې $0 <\in$ یو عدد δ موجود وي، داسې چې.

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3} - 6\right| <\in$$

دا چې $\delta >$ $|x-3|$ وي، د δ اندازه د $\in$ له جنس څخه پیدا کوو.

$$\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\right| - 6 <\in \qquad |x+3-6| <\in \Rightarrow |x-6| <\in$$

که $\delta = \in$ وي په نتیجه کې $|x-3|$ دی.

مثال: ثابت کړئ، چې $\lim\limits_{x\to5}(4x-3)=17$ دی.

حل: د هر متناظر مجاورت $(\in 2,\in 1)$ لري که چېرې $\in$ یو مثبت عدد $0<\in$ دی: د $(17-\in,17+\in)$ مجاورت لپاره $(\in 2,\in 1)$

باید $D=(a_1,a_2)$ مجاورت د 5 د عدد $(5\in D)$ پیدا کړو، داسې چې د هر x لپاره له D یا L $f(x)=4x-3$ په N کې شامل وي، یعني

$$17\in\langle 4x-3\langle \quad 17+\in$$

$$20 \quad \in\langle 4x\langle 20+\in$$

دواړه خواوې په 4 تقسیموو $\frac{5.\in}{4}<x<5\frac{5+\in}{4}$

نو د $\frac{5.\in}{4}<x<5\frac{5+\in}{4}$ لپاره او همدارنګه $17-\in<4x-3<17+3$ صدق کوي.

نو $D=\frac{5.\in}{4}<x<5\frac{5+\in}{4}$ په نتیجه کې د هر x لپاره له D څخه f(x) په N کې شامل دی او که $\in=\frac{1}{2}$ فرض شي.

$$N=\left(17-\frac{1}{8},17+\frac{1}{8}\right)=(16.5. \quad 19.5) \quad D=\left(5-\frac{1}{8},5+\frac{1}{8}\right)=(4.875.5.125)$$

د یوې تابع لمټ ته راجع قضیې

لومړی قضیه: په عمومي ډول د هرې خطي تابع لرو چې $f(x)=mx+b$

$$\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$$

دویمه قضیه: که $m=0$ وي د $f(x)=mx+b$ خطي تابع لاندې شکل اختیاروي. دې $f(x)=b$ تابع ته ثابته تابع وایي، چې لمټ یې په a کې له b سره مساوي دی. \

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} b=b$$

درېیمه قضیه: که په خطي تابع کې $b=0$ وي او $m=1$ وي $f(x)=x$ تابع کېږي، دې ته د لمټ تابع ویل کېږي. د تابع لمټ د a په نقطه کې عبارت له a څخه دی

$$\lim_{x\to a} mx = ma \Rightarrow m=1 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

څلورمه قضیه: که د g.f توابع د a په نقطه کې لمټ ولري، لاندې قضیې صدق کوي.

$$\lim_{x\to a} g(x) = c \qquad \lim_{x\to a} f(x) = b$$

د توابعو د جمعې د حاصل لمټ له مجموعي لمټونوسره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b+c$$

$$\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim(g(x) = b-c$$

پنځمه قضیه: په یوه نقطه کې د ضرب د حاصل لمټ مساوي دی په یوه نقطه کې د لیمټونو له ضرب سره

$$\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = b.c$$

شپږمه قضیه: په یوه نقطه د خارج قسمت لمټ مساوي دی، د خارج قسمت لمټ د لمټونو په هغه نقطه کې په دې شرط چې $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ وي

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{a\to x}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{a}$$

اوومه قضیه: که لمټ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ او μ یو ثابت عدد وي، د تابع لمټ په هغه نقطه کې ضرب ثابت عدد دی.

$$\lim_{x\to a}(\mu f(x)) = \mu.\lim_{x\to a} f(x) = \mu.b$$

اتمه قضیه: د یوې جذري تابع لمټ په یوه نقطه کې مساوي د لمټ د جذر د هغه تابع په هغه نقطه کې که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ وي یعنې

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a}(f(x)} = \sqrt[n]{b}$$

که چېرې $\sqrt[n]{b}$ موجود وي.

مثال: د $\lim\limits_{x \leftarrow 4} \sqrt{x+5}$ لمټ پیدا کړئ!

$$Lim\sqrt{x+5} = \sqrt{Lim(x+5)} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

نهمه قضیه: که $Lim \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = n_a^{n-1}$ وي نظر د مطابقتونو قانون ته لرو:

$$\lim_{x\to a} x^n - a^n = \lim_{x\to a}(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}\cdot a + x^{n-3}\cdot a^2 + ... + a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot a + a^{n-3}\cdot a^2 + ... + a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3}\cdot a + a^{n-3} + a^2 .... + a^{n-1} = a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1}\cdot a + a^{n-1} + ... + a^{n-1} = n_a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = n_a^{n-1}$$

مثال: د $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^5 - 2^5}{x-2}$ پیداکړئ

حل: فورمول ته په کتو لرو، چې: $\lim\limits_{n\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^5 - 2^5}{x-a} = 5.2^4 = 80$$

مثال: $\lim\limits_{x\to a}(x^3 + 5x^2 - 3x + 7)$ پیداکړئ، که چېرې $x \to a$ ته تقرب وکړي

$$\lim_{x\to a}(x^a + 5x^2 - 3x + 7) = 2^2 + 5\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 7$$

$$= 8 + 20 - 6 + 7 = 29$$

مثال: لاندې لمټ پیدا کړئ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{5x^3-6x^2-6x+2}{2x^2+3x-12}$

حل:

$$f(x)=5x^3+6x^2-6x+2$$
$$g(x)=2x^2-3x-12$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(2)$$
$$\lim_{x\to 2} \quad g(x)=g(2)$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}=\frac{f(2)}{g(2)}=$$
$$\Rightarrow \frac{5\cdot(2^3)-6(2^3)-6.2+}{2.(2^2)+3.2-12}=\frac{40-24-12+2}{8+6-12}=\frac{6}{2}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{5x^3-6x^2-6x+2}{2x^2+3x-12}=3$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ وي، ثبوت کړئ.

حل: فرض کوو چې $\in>0$ د δ عدد موجود دی داسې چې

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|\angle\in$$

کله چې $\in>|x-3|$ وي، د δ اندازه د $\in$ له جنسه لاسته راوړو

$$\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|\angle\in$$
$$\Rightarrow x+3-6\angle\in\Rightarrow|x-3|\angle\in$$

داسې چې δ مساوي دی له $\in$ سره، اوس د $\in\angle|$ -6 $|x-3|\angle\delta=x^2-9|$ لپاره

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6 \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6$$
$$\Rightarrow x+3=6 \Rightarrow 3+3=6 \Rightarrow 6=6$$

مثال: $\lim_{x\to 3}\left(x^3-3x+2/x\right)$ پیداکړئ.

حل:

$$F(x)=\left(x^2-3x+2/x\right) \Rightarrow F(x)=\frac{x^3-3x^2+2}{x}$$
$$\Rightarrow F(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x\to 3}F(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\lim h(x)}$$
$$=\frac{g(3)}{h(3)}=\frac{(3^3)-3(3^2)+2}{3}=\frac{27-27+2}{3}=\frac{2}{3}$$

مثال: $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ پیداکړئ.

حل: $f(x)$ یو ه ناطقه تابع ده، یعنې $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$

دا چې $x\to 4$ صفر کېږي ا و 4 د f د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی او $x\neq 4$ لاسته یې راوړو.

$$\lim_{x\to 4}F(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x+4)}{x-4}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$$

بې نهایت د تابع د لمت په حیث

ویل کېږي، چې $\lim_{x\to 4}f(x)=\alpha$ که د خپلې خوښې Mشخه لوی د هر عدد لپاره د δ مثبت پیدا شوی وي، داسې چې له $|x-a|<\in$ غیر مساوات څخه $|x-a|<\in$ غیر مساوات په لاس راځي لکه $\lim_{x\to 4}(x)=\alpha \Rightarrow M>0,\delta>0$ داسې چې $|x-a|<\delta \Rightarrow |F(x)|>M$ دلته دې شکل ته اوړي.

۱- هر کله چې f(x)>M وي $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=a$ دی.

۲- هر کله چې f(x)>M وي $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-a$ دی

مثال: پیدا کړئ چې $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x+1}{x}=2$ دی

حل: د $\in>0$ عدد لپاره فرض کوو، چې $\left|\dfrac{2x+1}{x}-2\right|<\in$

$$\Rightarrow\left|\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}-2\right|<\in\Rightarrow\left|2+\tfrac{1}{x}-\right|<\in$$

$$=\left|\frac{1}{x}\right|<\in\Rightarrow x>\frac{1}{\in}$$

که د $N=\dfrac{1}{\in}$ لپاره شرط دی $\lim\limits_{x\leftarrow a}\dfrac{2x+1}{x}=2$ سم دی.

مثال: $\lim\limits_{x\leftarrow a}\dfrac{x^2+2x}{x^2}$ محاسبه کړئ.

حل:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to a}\frac{x^2(1+\tfrac{2}{x})}{x^2}=\lim_{x\to a}\left(1+\tfrac{2}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to a}1+\lim_{x\to a}(\tfrac{2}{x})=1+0=1$$

مثال: په داسې حال کې چې $\lim\limits_{x\to a}2(x)=\alpha,\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$ پیداکړئ.

یعنې: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x^2}=\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}=\infty$ وي.

حل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{1-x^2}}{\dfrac{x}{1-x}}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{1-x}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+x^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

که $F(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$ وي او $2(x)=\lim\limits_{x\to 1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x^2}$ وي داسې حل کېږي.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{2(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x/1}-x}{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}\cdot 1-x^2$$

$$\lim_{x\leftarrow 1}x(1+x)=1+1=2$$

مثال: $\lim\limits_{x\to a}(2-x^2)=-a,\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)=a$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left[\left(x^2+5\right)+\left(2-x^2\right)\right]=\lim_{x\to a}(5+2)=7$$

د لمېټ محاسبه او ځینې مبهم حالات

د لمېونو په محاسبه کې د ضرب د حاصل مجموعه او ځینې وخت د توابعو نسبت د مبهمو شکلونو $\infty-\infty,\infty-\infty,0-\infty,\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$ سره مخامخ کېږو، چې ځینې حالتونه یې په لاندې ډول دي.

۱- **په $\frac{0}{0}$ حالت کې:** که $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\frac{0}{0}$ ولرو، داسې چې F(x) ، g(x) پولینومي توابع وي،

په صورت او مخرج کې یې مشترک فکتور (x-a) دی.

او په بعضو حالاتو کې کېدای شي مضاعف او یا څو ځلي وي.

لومړی مثال-

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{2-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

دویم مثال: $\lim\limits_{h\to0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h^2)-x^2}{h}$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{(x+h^2)-x^2}{h}=2x$$

مثال: $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1-3}}$ پیدا کړئ!

حل: دا چې x=2 د $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي، د لمټ د پیدا کولو لپاره د تابع صورت او مخرج د صورت او مخرج په مزدوج کې ضربوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1-3}}=\lim_{x\to2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1+3})}{(\sqrt{4x+1-3})(\sqrt{4x+1+3})(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-(x+2)(\sqrt{4x+1+3})(\sqrt{4x+1+3})}{\sqrt{4x+1-3}}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1+3})}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1+3})}{4(x+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to2}\frac{(2+1)(\sqrt{4.2+1+3})}{4(2+\sqrt{2+2})}=$$

$$=\frac{(3)(\sqrt{9+3})}{4(2+2)}=\frac{3.\overset{3}{\cancel{6}}}{4.\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{9}{8}$$

۲- $\frac{\infty}{\infty}$ **حالت:** کله چې $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{g(x)}$ د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل اختیار کړي، $\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{g(x)}}$

په حالت کې د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل ته بدلېږي. د دې طریقې په پیروۍ سره کولی شو ابهام رفع کړو؛ خو کېدای شي ځینې وخت سخت مثال هم آسانه حل شي. په دې حالت کې د کسر صورت او مخرج همزمان د متحول په لوړ طاقت تقسیموو، ابهام له منځه ځي، په دې شرط چې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت د دوو توابعو په نسبت کې، چې له دې جملې څخه په پولینوم کې ښکاره شي.
مثال: هغه لمېتونه چې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت لري، غواړو څو مثالونه یې د نمونې په شکل حل کړو.

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x+4}{x^2-12x+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(1-\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}} = \frac{3-,+0}{1-0+0} = \frac{3}{1} = 3$$

دویم مثال:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8x+5}{6x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(8+\frac{5}{x})}{x(6+\sqrt{\frac{x}{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{5}{x}}{6+\sqrt{\frac{x}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{5}{x}}{6+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x8+\frac{5}{x}}{x(6+\sqrt{\frac{x}{x.x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{5}{x}}{6+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

دریيم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^{2}-x+5}{\sqrt{9x^{4}+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}(9-\cancel{1/x}+\cancel{5/x^{2}})}{x^{2}\sqrt{9+\frac{1}{x^{4}}}}=$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

څلورم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{2}-x+3}{x^{2}-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}(2-\cancel{1/x}+\cancel{3/x^{2}})}{x^{2}(1-\cancel{8/x}+\cancel{5/x^{2}})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\cancel{\frac{1}{x}}+\cancel{\frac{3}{x^{2}}}}{1-\cancel{\frac{8}{x}}+\cancel{\frac{5}{x^{2}}}}=\frac{2}{1}=2$$

۳- دریيم حالت $(0\ \ \infty)$ **:**

$\lim\limits_{x\to a}\{F(x).g(x)\}$ ممکنه ده په $0.\infty$ شکل وي، په دې حالت کې لمټ $F(x)\,g(x)=\dfrac{F(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ د $\dfrac{0}{0}$ شکل اختیاروي، مونږ لاندې مثالونه د نمونې په شکل حل کوو.

مثال:

$$\lim_{x\to5}\left[(x^{2}-25).\frac{1}{x-5}\right]=\lim_{x\to5}\frac{x^{2}-25}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to5}(x+5)=5+5+10$$

دويم مثال:

$$\lim_{x\to 4}\left[\left(x^2-16.\right)\frac{1}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$$

دریيم مثال: $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}$ مقدار محاسبه کړئ!

که $x=y^5$ او $a=b^5$ فرض کړو، لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}=\lim_{x\to b}\frac{y-b}{y^5-b^5}=\lim_{x\to b}\frac{y-b}{(y-b)(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4}=\frac{1}{5b^4}=\frac{1}{5.\sqrt[5]{a^4}}$$

4- $\infty-\infty$:

که $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$ د $\infty-\infty$ شکل ولري.

په دې حالت کې $f(x)-g(x)=f(x)(1-\frac{g(x)}{f(x)}$ يو له دغو $\frac{\infty}{\infty}$ او يا $\infty-0$ حالاتو ته اوړي، بايد ياده شي، چې که د دوو کسرونو د تفاضل حالت او يا د جذرونو د تفاضل شکل اختيار کړي، د يو بل څخه د کسرونو د تفريق کولو، په مزدوجونو باندې د جذري افادو ضرب او تقسيم په نتيجه کې ابهام د حذف قابل وي.

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[5]{x}$ لمټ محاسبه کړئ!

حل:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})=\lim_{x\to1}\frac{1+x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)=\lim_{x\to\infty}[x^5(1-\frac{8}{x^2})]=\infty.1=\infty$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x+1}$ لمټ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x+1})(x+\sqrt{x^2+5x+1})}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-5x-1}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x-1}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}\Longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x(-5-\frac{1}{x})}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(-5-\frac{1}{x})}{x(1+\sqrt{x^2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-5}{1+1}=-\frac{5}{2}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x+1})$ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}=\frac{-1}{\infty}=0$$

بې نهایت د لمټ په حیث په بې نهایت کې

دا چې $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ دی، که د هر لوی او M مثبت عدد لپاره د N یو مثبت عدد وټاکل شي، داسې چې د $|x|>N$ غیر مساوات څخه د $|f(x)|>M$ غیر مساوات لاس ته راشي، په سمبولیک شکل داسې لیکو.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow M>0,N>0/|x|>N\Rightarrow f(x)<M$$

په پورتنیو تشېحاتو کې ځلور حالته مطرح کېږي، چې عبارت دي له:

$$1) x > N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$2) x < -N : f(xM < -M \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$3) x < -N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$4) x > N : f(x) < -M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

د توابعو محدودیت

1- f(x) تابع په یوه نقطه کې محدوده نومېږي، ځکه چې $|f(x)|$ قیمتونه د M له یوه ټاکلي عدد څخه لوېدلی شي، یعنې $|f(x)| \le M$.

2- f(x) تابع کله چې $x \to a$ محدوده وي، که په یوه (a-f,a+f) مجاورت کې د a څخه محدوده وي.

3- f(x) تابع د $x \to \infty$ لپاره محدوده ده، که د N مثبت عدد موجود کړی شي، د هر x لپاره د $|x| > N$ تابع f(x) محدوده ده ، لکه f(x)=cosx په IR کې محدوده ده او $g(x) = \frac{x+1}{x}$ تابع د $x \to \infty$ لپاره محدوده ده.

بې نهایت کوچنۍ توابع

د d(x) تابع په $x \to a$ کې بې نهایت کوچنۍ نومېږي، که $\lim_{x\to a} d(x) = 0$ وي.

۱: د دې لپاره چې $\lim_{x\to a} d(x) = b$ وي، لازمه او کافي ده، چې f(x) د b ثابت عدد د مجموعې په حیث او د d(x) بې نهایت کوچنۍ تابع په $x \to a$ وړاندې کېدی شي، یعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = b + d(x) \\ \lim_{x\to a} d(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$$

۲- کله چې d(x) په $x \to a$ کې بې نهایت کوچنی وي، چې صفر نه شي؛ نو

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{d(x)} = \infty$$

۳- د بې نهایت کوچنیو توابعو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

4- د بې نهایت کوچنۍ تابع د ضرب حاصل او محدوده تابع یوه بې نهایت کوچنۍ تابع وي.

۵- هرکله d(x) بې نهایت کوچنی او u(x) داسې تابع، چې لمټ یې صفر کېدای نه شي؛ نو $v(x) = \frac{d(x)}{u(x)}$ تابع بې نهایت کوچنۍ ده.

مثال: $d(x)=x^2-4$ تابع بې نهایت کوچنی ده، ځکه چې که $x\to 2$ تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=4-4=0$$

دویم مثال: $d(x)=x^2-4$ په $x\to 3$ بې نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=(3)^2-9)=9-9=0$$

دریم مثال: $d(x)=\frac{1}{2x}$ په $x\to\infty$ بې نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to\infty} d(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

څلورم مثال: $d(x)=x^3-27$ تابع په داسې حال کې $x\to 3$ $\lim_{x\to 3} d(x)=\lim_{x\to 3}(x^3-27)$ بې نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to 3}((3)^3-27)=0$$

۵- $f(x)=\frac{2}{5x^2-6x}$ تابع په $x\to\infty$ بې نهایت کوچنی ده، ځکه چې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{5x^2-6x}=\frac{2}{\infty}=0$$

د مثلثاتي توابعو لمټ

مخکې له دې چې د مثلثاتي توابعو لمټ تشریح کړو، مثلثاتي توابعو ته په لاندې ډول شرح ورکوو، چې مثلثاتي توابع یې عبارت دي له:

y=sinx

y=cosx

y=tanx

y=cotx

y=secx

y=csex

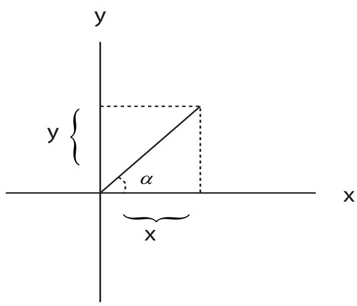
د دغو توابعو لمټ ، په داسې حال کې چې $x\to 0$ وي، په لاندې ډول یې لاس ته راوړو.

$$1)\ \lim_{x\to 0} \sin x = '$$
$$2)\ \lim_{x\to 0} \cos x = 1'$$
$$3)\ \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$
$$4)\ \lim_{x\to 0} \cot x = \infty'$$
$$5)\ \lim_{x\to 0} \sec x = 1'$$
$$6)\ \lim_{x\to 0} csex = \infty$$

د مثلثاتي نسبتونو تعریف

کله چې α زاویه په ستندرد حالت کې د (x,y) اختیاري نقطه د دویمې ضلعې د دغې زاویې غیر د مبداء څخه وي او وروسته $r=\sqrt{x^2+y^2}$ مساحت د (0,0) او (x,y) نقطو تر مینځ وي، د α زاویې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}' \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\tan x = \frac{y}{x}' \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$
$$\sec x = \frac{r}{x}' \qquad \cos s\alpha = \frac{r}{y}$$



(۸) شکل

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{x}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

باید وویل شي، چې په پورته څلور ګونو حالاتو کې مخرجونه صفر نه وي، اساسي رابطه د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په لاندې ډول ده.

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cos e\ \ \alpha = \frac{r}{y} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

دا چې $x^2+y^2=r^2$ دی، په پورته معادله کې یې د هغه په ځای وضع کوو.

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

همدا ډول $1+\cot^2\alpha = \cos c^2\alpha$ په لاس راځي.

د مثلثاتي توابعو لمټ

د مثلثاتي توابعو د لمټ په محاسبه کې امکان لري، چې د ابهام حالت منځته راشي، په دا ډول لمټ کې د ابهام له مختلفو شکلونو څخه مهم شکل $\frac{0}{0}$ دی او دا حالت د یوه عمده فکتور د تشخیص په واسطه، چې د $\sin x$ نسبت او د x زاویه ده رفع کړو، موږ په مثلثاتو کې د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ توابع پېژنو، کله چې x صفر ته نږدې کېږي د $\sin x$ تابع صفر ته تقرب کوي، یعنې $\lim\limits_{x\to0}\sin x = 0$، چې دا د $y=\sin x$ ګراف په شکل ښه درک کولای شو. (۱)شکل

په همدې ترتیب کله چې x د (۱) خواته تقرب وکړي، یعنې $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$، په (۲) شکل کې د cosx ګراف په ښه ډول سره ښیو، معلومېږي چې د y قیمت په صفري نقطه کې له یوه سره مساوي دی. شکل (2)

قضیه:

کله چې د x زاویه د صفر خواته تقرب کوي، د sin او x نسبت د 1 خواته تقرب کوي.

$$\lim_{x\to D}\frac{\sin x}{x}=1$$

ثبوت: د x زاویه لکه ښنګه چې $0<x<\frac{\Pi}{2}$ ده، د r له شعاع سره مرکزي زاویه په نظر کې نیسو، لکه د (۴) شکل، د دوو $\overset{\Delta}{OAM},\overset{\Delta}{OAC}$ مثلثونو مساحتونه د OAM قطاع د ذکر شوې دایرې سره مقایسه کوو، لرو چې:

(۴)شکل

د $<OAC$ مثلث مساحت، د $<OAM$ قطاع مساحت، د OAM مثلث مساحت او همدارنګه د مثلثونو او قطاع مساحت په ځانګړي ډول محاسبه کوو، لرو چې:

$$\text{OAM}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}r\cdot\overline{BM}$$ د مثلث مساحت

$$\text{OAM}=\frac{1}{2}xr^2$$ د قطاع مساحت

$$\text{OAC}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}r\cdot\overline{AC}$$ د مثلث مساحت

بنا پر دې د (4) شکل د مضاعفونو تساوي لاندې شکلونه اختیاروي:

$$=\frac{1}{2}r\overline{BM}<\frac{1}{2}xr^2<\frac{1}{2}r\overline{AC}..............2$$

د 2 رابطې اطراف په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو، اخرني نامساوات لاندې شکل ځانته اختیاروي.

$$\frac{2}{r^2}\cdot\frac{1}{2}r\cdot\overline{BM}<\frac{2}{r^2}\cdot\frac{1}{2}xr^2<\frac{1}{2}r\overline{AC}\frac{2}{r^2}\Rightarrow\frac{\overline{BM}}{r}<x<\frac{\overline{AC}}{r}$$

دا چې $\frac{\overline{BM}}{r}=\sin x$ او $\frac{\overline{AC}}{r}=\tan x$ دی، د دې پر ځای په پورتنۍ رابطه کې وضع کوو.

$$\sin x<x<\tan x$$

$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

ټول پورتني حدونه په sinx تقسیموو، لرو چې:

$$\frac{\sin x}{\sin x}<\frac{x}{\sin x}<\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

ټول حدونه معکوسوو

$$1>\frac{\sin x}{\cos x}<\cos x$$

$$\Rightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x<\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}<\lim_{x\to 0}1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

د ټولو حدونو لمټ اخلو، ګورو چې:

فلهذا په نتيجه کې

لومړی مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x\to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x})=1\cdot 1=1$$

دويم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x\to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=1+1=2$$

دريم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x\to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a\cdot x)}{x}$ محاسبه کړئ، که چېرې $x\to 0$ ته تقرب وکړي.

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\cdot x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\sin(a\cdot x)}{ax}=a\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\cdot x)}{ax}=a\cdot 1=a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\cdot x)}{ax}=a$$

پنځم مثال: $\frac{1-\cos x}{x^2}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=(\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2})(\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)})=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

شپږم مثال: $\lim\frac{\sin 8x}{x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{8\cdot\sin 8x}{8x}=8\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x}{8x}=8\cdot1=8$$

یا په بل عبارت، $8x=y$ نیسو او په پورتنۍ معادله کې یې وضع کوو.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{8\cdot\sin 8x}{8x}=8\lim_{x\to0}\frac{\sin 8y}{8y}=8\cdot1=8$$

اووم مثال: $\lim x\cot x$ لمټ پیدا کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to0}\cot x=\lim_{x\to0}x\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=\lim c\cos x\cdot\lim\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1\cdot1=1$$

اتم مثال: $\lim_{x\to0}\frac{5\cdot\sin 6x}{x}=$ پیدا کړئ.

حل: کوښښ کوو چې یو ضربي عامل د $\frac{\sin y}{y}$ په شکل لاسته راوړو، صورت او مخرج په 6 کې ضربوو، $6x=y$ وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to0}\frac{5\cdot\sin 6x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{6\cdot5\cdot\sin 6x}{6x}=30\lim\frac{\sin 6x}{6x}=30\lim\frac{\sin 6y}{6y}=$$

$$=30\cdot1=30\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{5\cdot\sin 6x}{6x}=30$$

نهم مثال: $\frac{\sin 2x+tagx}{2\tan 3x+\sin x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب کړی وي.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x+\tan x}{2\tan 3x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{x\sin x}{x\cos x}}{3x\frac{2\tan 3x}{3x}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{(x\frac{\sin^2 x}{2x}+\frac{\sin x}{x\cos x})}{(x\frac{6\tan 3x}{3x}+\frac{\sin x}{x})}=$$

$$\lim\frac{(2\lim_{x\to0}\frac{\sin y}{y}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x})}{(2\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x})}=\frac{2+1\frac{1}{1}}{6\cdot1\frac{1}{1}+1}=\frac{3}{7}$$

د لومړي څپرکي پوښتنې

د لاندې توابعو لمټ محاسبه کړئ؟

$1)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=?$

$2)\ \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3}{x^2+1}-x=?$

$3)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}=?$

$4)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x^2}=?$

$5)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-1}=?$

$6)\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=?$

$7)\ \lim\limits_{x\to \infty}(x-\sqrt{x})=?$

$8)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 3ax+2a^2}{x^2-2ax-3a^2}=?$

$9)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-11+5}{x^2+x}=?$

$10)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+\dfrac{4}{x})=?$

$11)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=?$

$12)\ Lim(\sqrt{x\ \ +a}-\sqrt{x}\ \ =?$

$13)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x}=?$

$14)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ \ +4}{x^2+x}=?$

$15)\ \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}+4=?$

$16)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-h}{h}=?$

د لاندې توابعو لمټ په لاس راوړئ؟

$1)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan 8x}{\tan 2x}=?$

$2\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=?$

$3)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}=?$

$4)\ Lim\dfrac{8\sin 5x}{x}=?$

$5)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin a}{x-a}=?$

$6)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\alpha}{a^2}=?$

$7)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=?$

$8)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(12x)}{\sin(4x)}=?$

$9)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 8x}{tna 2x}=?$

$10)\ \lim\limits_{b\to 1}\dfrac{\sin(b^2-1)}{b^2-1}=?$

$11)\ \lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x})=?$

$12)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=?$

$13)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}=?$

$14)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=?$

$15)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y\cdot\sin y}=?$

$16)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 2x}=?$

$17)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-6\cos^2 y}{y^2}=?$

$18)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

$19)\ \lim\limits_{x\to 0}(8x\cot g4x)=?$

$20)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2}{4x^2}$

دویم څپرکی

مشتق

ټولیزه موخه:
د مشتق او دهغه اصول پیژندل، همدارنگه د مثلثاتي او لوگارتمي توابعو له مشتقاتو سره آشناییږ

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای ته رسولو سره به محصلین په لاندې برخو کې پوره پوهه ترلاسه کړي:

۱- د مشتق تعریف او د هغې د اړوندو پوښتنو حل.
۲- د مشتق قواعد او اصول په صحیح ډول پېژندل او له هغې څخه د گټې اخسیتنې طریقه.
۳- د مثلثاتي توابعو د مشتقاتو تعریف او د هغې د اصولو او قواعدو پېژندل.
٤- د لوگارتمي توابعو مشتقاتو تعریف، قواعد او د مشتق نیولو د اصولو پېژندل.
٥- د دویمو او له هغې څخه د لوړو مشتقاتو پیژندل او د هغې د اړوندو پوښتنو حل کول.

د اوولسمې پېړۍ په لومړیو کې د پیړ فرما فرانسوي ریاضي پوه اسحق نیوتن (انگلیسي) ولایپ نیتزد (الماني) په واسطه د مشتق بنسټ کېښودل شو، چې نن ورځ د ډېرو مهمو او اساسي اقتصادي مسایلو، تفاضلي حساب او انتیگرال اړوند معاصرې ریاضي او نور د مشتق د مفهوم په اساس رامنځته شوي دي او دا چې مشتق یو ډېر اوږد بحث دی؛ نو کوښښ کوو، چې په واضح ډول یې وځیړو کړو.

د مشتق تعریف: د Y تابع په متحول کې د نسبي تغیر پیدا کول د یو وارد شوي تغیر په اساس په یو مستقل متحول کې، یعنې $y = f(x)$. او که د x متحول قیمت تغیر وکړي؛ نو د وارد شوي تغیر پیدا کول په نسبي شکل د Y تابع په متحول کې په $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ شکل سره ښودل کېږي.

یا په بل عبارت مشتق عبارت دی د تابع د تزاید لمېټ د مستقل متحول پرتزاید باندې، که چېري د مستقل متحول تزاید د صفرخواته تقرب کوي.

یعنې $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ وکړي. باید یادونه وشي چې د مشتق د ښودلو لپاره د تابع د پاسه یو زور نوشته کوو، یعنې د $f'(x)$ د $f(x)$ مشتق او $g(x)$ د $g(x)$ مشتق او $d'(x)$ د $d(x)$ او $h'(x)$ د $h(x)$ مشتق وي دا چې په یوه نقطه کې د تابع مشتق په شکل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{dy}{dx}$ په عمومي صورت د تابع مشتق په $f'(x)\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ شکل لیکو.

مثال: $f(x)=x^2$ مشتق پیداکړئ!

$$f'(x)''\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

حل:

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=a+a=2a$$

مثال: د $y=3x^2-5$ تابع د ګراف میل په (2,0) نقطه کې پیداکړئ!

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3(2+h)^2-5-(3(2)^2-5)}{h}$$

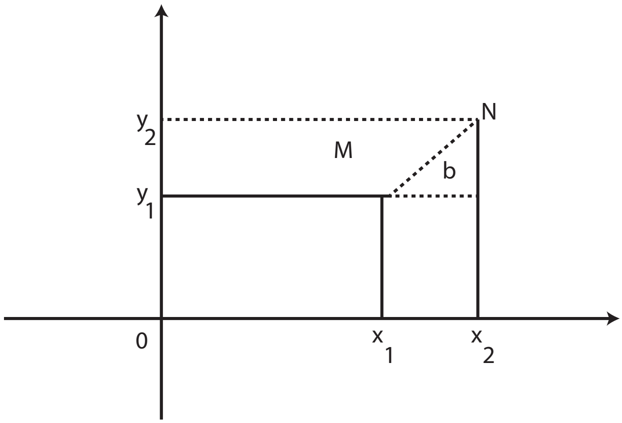
$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(3(4+4h+h^2)-5)-(3(4)-5)}{h}=$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(12+12h+3h^2-5)-12+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{12h+3h^2}{h}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(12+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}(12+3h)=12$$

د هندسي مشتق تعریف

د تابع د مماس میل په یوه مشخصه نقطه کې، د تابع له مشتق څخه په هماغه نقطه کې عبارت دی.



فرض کوو چې د $y = f(x)$ تابع منحني رسم شوی، چې د منحني لومړۍ نقطه دM وي، دا نقطه د مستقل متحول ارزښت ox_1 او د تابع د متحول ارزښت oy_1 نومېږي، چې د مستقل متحول د تغیر په اثر x_1 او x_2 له M نقطې دوهمې نقطې N ته تغیر خوري چې په هغې نقطه کې تابع د y_2 ارزش اختیاروي، په نتیجه کې د تابع مشتق $y = f(x)$ دی او په یوه مشخصه نقطه کې د منحني د مماس میل پیداکول، چې M نقطه وي او که N نقطه M نقطې ته نېږدې کړو او د هغې لمټ په یوه نیږدې فاصله کې M نقطې ته تقرب ورکړو، د هغې د میلان د تغیر درجه په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\cos = \frac{MA}{MN} =, \sin b = \frac{AN}{MN}$$

$$\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MN} \cdot \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MA}$$

یا

$$\tan b = \frac{AN}{MA} \Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m'$$

د مشتق اقتصادي تعریف

مشتق له نهایي کمیت څخه عبارت دی، که یو مجموعي کمیت ور کړ شوی وي لکه د مجموعي عاید تابع، مجموعي لګښت، مجموعي تولید، مجموعي سپما، مجموعي سرمایه ګزاري، مجموعي صادرات او واردات او نور.

په لنډه توګه وایو چې د تابع اول مشتق عبارت له نهايي عايد او نهايي لګښت، نهايي سپما، نهايي پانګې اچونې، صادراتو او وارداتو څخه وي، د لاندې مثالونو مشتق له لمې نه په ګټه اخيستو پيدا کړئ!

لومړی مثال-

$$y = 3x$$
$$y' = ?$$
$$\Delta y + y = 3(x+\Delta) \Rightarrow \Delta y = 3(x+\Delta x) - y$$
$$\Rightarrow \Delta y = 3x + 3\Delta x - 3x = 3\Delta x \Rightarrow \Delta y = 3\Delta x$$

دواړه خواوې په Δx تقسيموو.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta r}{\Delta r}$$

دا چې $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ دی نو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \Rightarrow y' = 3$$

دويم مثال- $f(x) = x^3$ وي $f'(x)$ پيداکړئ.

$$f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} \Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) = (a^2 + a\cdot a + a^2)$$
$$f'(x) = (a^2+a^2+a^2) = 3a^2$$
$$f'(x) = 3a^2$$

د مشتق الجبري تعريف

هر کله چې په $y = f(x)$ تابع کې د x متحول د h په اندازه او يا Δx تزايد وکړي، ذکر شوې تابع $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ زياتوالی متحول کېږي او د تابع او متحول د زياتوالي نسبت عبارت دی له:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که چېرې د x لمې د صفر خواته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که وجود ولري ويلای شو چې ذکر شوې تابع د x په نقطه کې د مشتق لرونکې ده، چې لمې په پورته رابطه کې نيول شوی دی، د مشتق نيونې عمليه ورته وايي يعنې د $y = f(x)$ تابع مشتق په لاندې ډول ښيرو.

$y' = f'(x)$ یا $\frac{dy}{d(x)} = \frac{df(x)}{dx}$ او یا $DY = Df(x)$

یا په لاندې شکل ښودل کېږي:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

او یا په بل عبارت:

$$y' = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

او په اخره معادله کې د f(x) تابع مشتق په لاندې ډول هم تعریفوو.

$$f'(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

او همدارنګه د f(x) مشتق په $x = x_0$ کې عبارت دی له:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

مثال:- د $f(x) = x^4$ تابع مشتق دارنګه لاسته راوړو:

$$f'(x) \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

حل: فورمول ته په کتو لرو چې:

$$f(x+h) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{x\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

مثال:- د $f(x) = 4x - x^2$ تابع د ګراف میل په $p(2,-2)$ نقطه کې پیداکړئ!

حل: د x قیمت په p نقطه کې عبارت له 2 دی او میل په m ښیو.

$$m \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4(2+h)-(2+h^2)-4\cdot 2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{8+4h-(4+4h+h^2)-8+4}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{4h-(4+4h+h^2)4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h-4-4h-h^2+4}{h} = \lim_{h\to 0}(-h) = 0$$

مثال:- د $f(x)=4x-x^2$ تابع د ګراف میل په $p(3,-3)$ نقطه کې پیدا کړئ؟

$$m\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(-3)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(3+h)-(3+h^2)-4\cdot 3-3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9+4h-(9+6h+h^2)-(4\cdot 3+3^2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{12+4h-9-6h-h^2-12+9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-6h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4-6-h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}(-2-h)=-2$$

د مشتق د پیداکولو قاعدې

د مشتق د سوالونو او مثالونو د اسانه حل کولو په خاطرکولای شو له فورمول او د مشتق له قواعدو نه ګټه واخلو او د هغې سوالونه په سمه توګه تر بررسۍ لاندې ونیسو.

(۱) قاعده: د ثابتې تابع مشتق صفر دی.

لومړۍ قاعده:

فرضاً $f(x)=C$ یوه ثابته تابع وي؛ نو $f'(x)=0$ دی یعنې $(C\in R)$.

ثبوت: $f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ او C یو ثابت عدد دی(تزاید یا تناقص) نه لري او h مقدار خلاف د صفر $x\to 0$ کړی یعنې:

$$f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{C-C}{h}\Rightarrow f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{h}=0$$

مثال:- د $f(x)=20$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{20-20}{h}=0\Rightarrow f'(x)=0$$

دویمه قاعده:

د عینیت تابع مشتق(۱) یو دی.

هر کله چې $f(x)=x$ تابع وي؛ نو $f'(x)=1$ دی

ثبوت:

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-x}{h}\lim\frac{h}{h}=1\Rightarrow f'(x)=1$$

نوټ: تابع په $x=0$ کې د مشتق نیونې وړ نه وي، په داسې حال کې چې دا تابع په صفر کې متمادي ده.

درېيمه قاعده:

د $f'(x)=x^n$ تابع مشتق د $(n \in jn)$ لپاره عبارت له $f'(x)=nx^{n-1}$ څخه وي.

فلهذا د طاقت لرونکې تابع مشتق مساوي دی، توان ضرب د تابع او له توان نه یو کمېږي.

ثبوت:

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2+.....+h^n-x^n$$

$$f(x+h)-f(x)=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2+.....+h^n$$

د رابطې دواړه خواوې په h تقسیموو لرو چې:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1nx^{n-2}h^2)}{2}}{h}+........+h^n$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{n(n-1)xn}{21}+........+h^{n-1}$$

$$f'(x)\lim\frac{f(x+h)}{h}=\underset{h\to 0}{Lim}(nx^{n-1}\frac{n(n-1)}{21}xh+........+h^{n-1}$$

$$\Rightarrow f(x+h)=nx^{n-1} \quad \text{یا} \quad (x^n)'=nx^{n-1}$$

مثال:- د $f(x)=4x-x^2$ تابع مشتق پیداکړئ!

$$f(x)=x^{12}$$

$$f'(x)=12\cdot x^n$$

$$2) f(x)=x^{20}\Rightarrow f'(x)=20x^{19}$$

مثال:-د $y=\sqrt{x}$ تابع مشتق درېیمې قاعدې ته په کتو لاسته راوړئ!

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

مثال:- د $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ تابع مشتق په لاس راوړئ!

$$y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,y=x^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow y'=(x^{-\frac{1}{4}})'=\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}\Rightarrow y'=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}\Rightarrow y'=-\frac{1}{4\cdot x\sqrt[4]{x}}$$

څلورمه قاعده:

د يوې تابع او د يوه ثابت عدد د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د تابع مشتق ضرب له هغه ثابت عدد

سره هر کله چې f يوه تابع او k يو ثابت عدد وي مشتق: $[kf(x)]=kf'(x)$

$$[kf(x)]\lim_{h\to0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{k[f(x+h)-kf(x)]}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}k\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\cdot f'(x)$$

مثال:- د $3)f(x)=8\cdot x^{12}$ $\quad 2)f(x)=7\cdot x^{6}$ $\quad f(x)=12x^{8}$ توابعو مشتق په لاس راوړی.

$a)f(x)=8\cdot x^{8}$

$f'(x)=8\cdot x^{12-1}=96x^{11}$

$\Rightarrow f9x)=96x^{11}$

$b)f(x)=7x^{6}\Rightarrow f'(x)=7\cdot(x^{6})'$

$f(x)=7(6x^{6-1})=7(6x^{5})'=42x^{5}$

$c)f(x)=12x^{8}$

$f(x)=12(x^{8})=12(8x^{7})=96x^{7}$

$\Rightarrow f(x)=96x^{7}$

پنځمه قاعده:

د توابعو مجموعي مشتق مساوي دی د توابعو د مشتقونو له مجموعې سره، هر کله چې د $u(x)$ او $v(x)$ توابع ولرو؛ نو $(u+v)'=u'+v'$ ثبوت لرو چې:

$$[u(v)+v(x)]'=\lim_{h\to0}\frac{\{u(x+h)+v(x+h)\}-\{u(x)+v(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)+v'(x)\Rightarrow(u+v)'=u'+v'$$

مثال د توابعو د مجموعې مشتق $v(x)=10x+89, u(x)=4x^{2}+5x$ پيداکړئ!

حل:

$$[u(x)+v(x)]'=u'(x)+v'(x)$$
$$[u(x)+v(x)]'=(4x^{2}+5x)'+(10x+8)'=8x+5+10=8x+15$$

یادښت: هر کله چې $y=u+v+w$ تابع وي او هره یوه برخه د تابع د x تابع وي د دا رنګه توابعو مشتق عبارت دی له: $y'=u'+v'+w'$

مثال:هر کله چې $y=15x^6+2x^5+4x^3+4$ تابع د نومو ړو توابعو مشتق لاسته راوړئ!

حل:

$$y'=u'+v'+w'$$

$$y=15x^6+2x^5+4x^3+4$$

$$y'=90x^5+10x^4+12x^2$$

شپږمه قاعده:

د دوه توابعو د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د مضرب مشتق ضرب مضروب فیه جمع د جمعې مشتق د مضروب فیه د مضروب سره.

هر کله چې $u(x)$ او $v(x)$ توابع ولرو نو:

$$y'=u'+v'+w'$$

$$(u(x),v(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

ثبوت:

که چیرې $v(x+h)(u(x))$ هم جمع او هم تفریق کړو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)v(x)}{h}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h-v(x)}{h}y(x)+u(x)\lim_{h\to 0}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$\Rightarrow u'(x)v(x)++u(x)y'(x)$$

مثال:- که زموږ تابع لاندې شکل ولري:

$$y=(8x^3+3x^2+5)(2x^2+4x)$$

$$y'=u'+v'+w'$$

$$u'=24x^2+6x$$

$$v'=4x+4$$

$$f'(x)=(24x^2+6x)(2x^2+4x)(4x+4)(8x^3+3x^2+5)$$

$$f'(x)=48x^4+96x^3+12x^3+24x^2+32x^4+12x^3+20x+12x^3+32x^3+12x^2+20$$

$$f'(x)=80x^4+152x^3+36x^2+20x+20$$

دویم مثال – هر کله چې د $y=(3x^2+2x)(7x^3+8)$ وي $y'(x)$ مشتق یې پیداکړئ!

حل:

$$y'=(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$u'=6x+2$$
$$v'=21x^2$$
$$y'(x)=(6x+2)(7x^3+8)(21x^2)(3x^2+2x)$$
$$y'(x)=42x^4+48x+14x^3+16+63x^4+42x^3$$
$$y'(x)=105x^4+56x^3+48x+16$$

اوومه قاعده:

د کسري تابع مشتق عبارت دی د صورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع

هر کله چې د $u(x)$ او $v(x)$ توابع ورکړل شوي وي؛ نو:

$$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v+v'u}{v^2}$$

$$(\frac{u}{v})'=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{v(x+h)(v(x))-u(x)(v(x+h))}{v(x+h)v(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}=$$

پورته $u(x)$ او $v(x)$هم جمع او هم منفي شوي، په رابطه کوم تغیر نه دی راغلی او همدارنګه صورت او مخرج په h تقسیموو لاندې شکل نیسي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)-u(x)\frac{v(x)-v(x)}{h}}{\frac{v(x+h)v(x)h}{h}}=$$

او په نتیجه کې

$$=\frac{v(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{\lim v(x+h)v(x)}=$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x)^{\ 2}}$$

هر کله چې $u(x)$ او $v(x)$ توابع ورکړل شوې وي نو:

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$(\frac{u}{v})' \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

مثال:- هر کله چې $y = \frac{10x^4 + 5x^2}{2x^6 - 4x}$ تابع وي مشتق يې پيداکړئ؟

حل: دا چې $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$ دی. $v(x) = 2x^6 + 4x,\ (x) = 10x^4 + 5x^2$ هغه په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$f'(x)(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(40x^3 + 10x)(2x^6 - 4x) - (10x^4 + 5x^2)(12x^5 - 4)}{(2x^6 - 4x)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(80x^9 - 40x^7 - 20x^7 - 40x^2) - 120x^9 + 40x^4 - 40x^4 - 60x^7 + 20x^2)}{(2x^6 - 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2} \Rightarrow y' = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2}$$

دويم مثال- د $y = \frac{1}{x^4}$ تابع مشتق پيداکړئ؟

حل: که $u(x) = 1$ او $v(x) = x^4$ وضع شي نظر اوومې قاعدې ته لرو چې:

$$y' = (\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{(1)'}{(x^4)} = \frac{0x^2 - 4x^3 \cdot 1}{(x^4)^2} = \frac{-4x^3}{x^8} \Rightarrow y' = -\frac{4}{x^5}$$

اتمه قاعده

هر کله چې v,u او w توابع د مشتق نيونې وړ وي لرو چې:

$$(uvw)'[u(v \cdot w)]' = u'(v \cdot w) + u(vw)'$$
$$= u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$$
$$\Rightarrow (uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$

مثال:- د $y = (2x^2 + 2x)(x^2 - 4)(3x^2 + x)$ توابعو مشتق پيداکړئ؟

حل: اتمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

$$(uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$
$$y' = (4x+2)(x^2-4)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(2x)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(x^2-4)(6x-1)$$
$$y' = (4x^3-8x+2x^2-8x)(3x^2+x) + (4x^3+4x^2)(3x^2+x) + (2x^4-8x^2+2x^3-8x)(6x-1)$$
$$y' = (12x^5+4x^3-24x^2-8x^2+4x^2+6x^4+2x^3-24x^2+2x^3-8x+12x^5+4x^4$$
$$+12x^4+4x^3+12x^5+2x^4-48x^3-8x^2+12x^4+2x^3-48x^2-8x$$
$$\Rightarrow y' = 36x^5+40x^4-64x^3-88x^2-16x$$

نهمه قاعده:

هر کله چې u تابع د مشتق نیونې وړ وي او c هم ثابت عدد(ثابته تابع) وي نو:
$$(cu)' = c'u + cu' = 0 \cdot u + cu' = cu' \Rightarrow (cu)' = cu'$$

لومړی مثال:- د $y = (24)(2x^3+5x)$ توابعو مشتق پیداکړئ؟

حل: داچې $u = 2x^3+5x$ او $c = 24$ دی او مشتق یې $u = 6x^2+5$ او c=0 دی په معادله کې وضع کوو.

$$y' = (cu)' = (c)'(u) + c(u)'$$
$$y' = (cu)' = y' = (24)'(2x^3+5x) + (24)(2x^3+5x) = 0(2x^3+5x) + 24(6x^2+5)$$
$$y' = 0 + 144x^2 + 120 \Rightarrow y' = (cu)' = 144x^2 + 120$$

لسمه قاعده:

د مرکبو توابعو مشتق(تابع تابع) د مرکبې تابع مشتق مساوي دی عمومي مشتق ضرب داخلي مشتق دی.

فرضا $(fog)(x)$ یوه مرکبه تابع ده ثبوتوو چې:

ثبوت:

$$[fog(x)]' = [f(g(x)]'$$
$$= f'(g(x) \cdot g'(x)$$
$$[f(g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x)+h) - f(g(x)}{h}$$

اوس x+h په x' شیو؛ نو $h = x' - x$ کېږي
$$\lim_{x' \to x} \frac{f(g(x)+h)' - f(g(x)}{x' - x}$$

حل: صورت او مخرج په $g(x') - g(x)$ ضربوو لرو چې:

$$\lim_{x'\to x}\frac{f(g(x))'-f(g(x)}{x'-x}\cdot\frac{g(x')-g(x)}{g(x')-g(x)}=$$

$$\lim_{x'\to x}\frac{f(g(x')-f(g(x)}{g(x')-g(x)}\cdot\frac{g(x')-g(x)}{x'-x}=$$

$$\lim_{g(x')\to g(x)}\frac{f(g(x')-f(g(x)}{g(x')-g(x)}\cdot\lim_{x'\to x}\frac{g(x')-g(x)}{x'-x}$$

$$\Rightarrow [f(g(x)]'=f'(g(x)\cdot g'(x)$$

مثال:-د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$f'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$f'(x)=8(x^5+4)^{8-1}(5x^{5-1})$$

$$f'(x)=8(+4)^7\cdot 5x^4=40(x^5+4)^7\cdot x^4$$

دویم مثال:- د $g(x)\frac{1}{(x^3-4x^2+2)^4}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$g(x)\frac{1}{(x^3-4x^2+2)^4}=(x^3-4x^2+2)^{-4}$$

$$g'(x)=-4(x^3-4x^2+2)^{-4-1}\cdot(3x^2-8x)$$

$$g'(x)=-4(x^3-4x^2+2)^{-5}\cdot(3x^2-8x)$$

$$g'(x)=\frac{-4(3x^2-8x)}{(x^3-4x^2+2)^5}=\frac{-12x^2+32x}{(x^3-4x^2+2)^5}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-12x^2+32x}{(x^3-4x^2+2)^5}$$

دریم مثال:- د $f(x)=\sqrt{x^3+2}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$f(x)=\sqrt{x^3+2}=(x^3+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow [f(g(x)]'=f'(g(x)\cdot g'(x)$$

$$f'(g)=\frac{1}{2}(x^3+2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(3x^2)=\frac{1}{2}(x^3+2)^{\frac{1}{2}}\cdot(3x^2)$$

$$f'(g)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{(x^3+2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+2}}$$

$$\Rightarrow f'(g)=\frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+2}}$$

د مثلثاتي توابعو مشتق

د مثلثاتي توابعو مشتق عبارت دی له:

$$1)\frac{d}{dx}(\sin x)=(\sin x)'=\cos x$$

$$2)\frac{d}{dx}(\cos x)=(\cos x)'=\sin x$$

$$3)\frac{d}{dx}(\tan x)=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$4)\frac{d}{dx}(\cot x)=(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\cos^2 x$$

$$5)\frac{d}{dx}\sec(x)=(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$

$$6)\frac{d}{dx}(\sec x)=(\sec x)'=-\cos x\cdot\csc x$$

$$1)\frac{d}{dx}(\sin x)=(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\cdot\lim\cos(x+\frac{h}{2})$$

$$(\sin x)'=1\cdot\cos x\Rightarrow(\sin x)'=\cos x$$

$$2)(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+h}{2}\sin\frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\cdot\lim\cos(x+\frac{h}{2})=-1\cdot\sin x=-\sin x$$

$$3)\frac{d}{dx})(\tan x)=(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{(\sin x)'-\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(\sin x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

$$4)\frac{d}{dx}(\tan x)=(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot=\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x\Rightarrow(\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$5)\ \frac{d}{dx}\sec x = (\sec x0' = (\frac{1}{\cos x})' = \frac{0\cdot\cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\cdot\tan x \Rightarrow (\sec x)' = \sec x\cdot\tan x$$

$$6)\ \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cdot\cot x$$

$$(\csc x)' = \left[\frac{1}{\sin x}\right] = \frac{0\cdot\cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x\cdot\sin x} =$$

$$= -\csc x\cdot\cot x \Rightarrow (\csc x)' = -\csc x\cdot\cot x$$

لومړی مثال:- د $y = \frac{x^2}{\cos x}$ تابع مشتق پیداکړئ؟

$$y' = \frac{(x^2)'\cos x - (\cos x')x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x - 1(\sin x)x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$$

دویم مثال:- د $y = x^4\sin x$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$y = (x^4)'\sin x + (x^4)(\sin x)' = 4x^3\sin + x^4\cos x$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3\sin + x^4\cos x$$

دریم مثال:- $y = \sin\frac{\pi x}{180}$ مشتق یې محاسبه کړئ؟

حل: هر کله چې $f(x)\sin x$ او $g(x) = \sin\frac{\pi x}{180}$ وضع کړو او y لاندې قیمت اختیاروي.

$$y = f(g(x) \Rightarrow y' = f'(g(x)\cdot g'(x)$$

$$y' = (\sin x)'(g(x)\cdot(\frac{\pi}{180}x)' = \cos\frac{\pi}{180}x\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}$$

څلورم مثال- د $y = \cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

حل: که f(x)cos او $g(x) = \cos\frac{\pi x}{180}$ وضع کړو.

$$y = f(g(x) \Leftrightarrow y' = f'(g(x)).g'(x)$$

$$y' = (\cos)'(\frac{\pi}{180}x).(\frac{\pi}{180}x) = -\sin(\frac{\pi}{180}x)\ \frac{\pi}{180}$$

$$y' = -\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi x}{180}$$

پنځم مثال:- د $y=\cos^2 2x$ تابع مشتق پیداکړئ!

حل: لسمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)$$
$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x).\cos(2x)' = 2\cos(2x)(-2\sin(2x))2$$
$$(\cos^2 2x)' \Rightarrow = -4\cos 2x.\sin 2x$$

شپږم مثال:- د y=cos(6x-4) تابع مشتق پیداکړئ!

$$y'(\cos(6x-4))' = -\sin(6x-4).(6x-4)$$
$$= -\sin(6x-4)\ 6$$
$$\Rightarrow y' = -6\sin(6x-4)$$

اووم مثال:- د y=sin(4x-1) تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$(\sin(4x-1))' = \cos(4x-1).(4x-1)' = \cos(4x-1)4 = 4\cos(4x-1)$$
$$\Rightarrow (\sin(4x-1))' = 4\cos(4x-1)$$

اتم مثال:- د y=secx.cotx تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$y' = (\sec x.\cot anx)' = (\sec x)\ \cot inx + (\cot x)'\sec$$
$$= (\sec x.\tan x)(\cot x + (-\cos^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \cos^2 x.\sec x$$
$$= \sec x(1-\cos^2 x)$$

د لوګارتمي توابعو مشتق

د لوګارتمي تابع مشتق $y=\log_a^x$ عبارت دی له $y'=\frac{1}{x}\log_a^e$ داچې په پورته فورمول کې a کولای شي هر قیمت غوره کړي او e عبارت ده له $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ او یا $\lim_{x\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$ او e یو غیر ناطق ثابت عدد دی او قیمت یې عبارت دی له

e =2,7182818284599045……

او اوس د $y=Log_a^x$ تابع مشتق پیداکوو چې $(Log_a^x)' = \frac{1}{x}Log_a^e$

ثبوت:

$$(Log_a^x)' = \lim_{x\to0}\frac{Log(x+h)-\log_a^x}{h} = \lim_{x\to0}[\frac{1}{h}Log_a\frac{x+h}{x}]$$

$$\frac{1}{x}\lim_{x\to0}[\frac{x}{h}Log_a(1+\frac{h}{x})] = \frac{1}{x}\lim_{x\to0}Log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{a\to0}\log_a(1+a)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{x}Log_a^e$$

$$\Rightarrow (Log_a^x)' = \frac{1}{x}Log_a^e$$

دا چې $\frac{h}{x}=a$ فرض کوو.

یا په بل عبارت زنځیري قاعدې ته په کتو $f'(x)=f'(u).u'(x)$ که چېرې $f(x)=Loab^{u(x)}$

غواړو لرو $f'(x)=\frac{1}{u(x)}\log_a^e.u'(x)$ دی که چېرې $u=x$ وي $f(x)Log_e^x$ مساوي په $f'(x)=\frac{1}{x}$

سره دی.

نتیجه: د پورته فرمول ثبوت دارنګه تشریح کوو چې:

۱- هر کله چې a=e وي که چېرې $\log_a^e=\log_a^e=1$ دی یعنې:

$$(Lnx)' = (Log_a^e)' = \frac{1}{x}Log_a^e = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x} \Rightarrow (Lnx)' = \frac{1}{x}$$

۲-هر کله چې a=10 وي که چېرې $Log_a^x = Log_{10}^x$ لیکلای شو او د هغې مشتق اخیستلای

شو داسې چې:

$$Log_a^x)' = (Log_{10}^x)' = \frac{1}{x}Log_{10}^e = \frac{1}{x}.Loge$$

$$\Rightarrow= (Logx)' = \frac{1}{x}Loge$$

لومړی مثال:- د f(x)=Log(4x+2) تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل: په دې ځای کې u(x)=4x+2 او $u'(x)=4$ نو

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}Log_e\frac{4}{4x+2} \Rightarrow \frac{4}{4x+2}Log_e = f'(x)$$

د توان لرونکو توابعو مشتق:

د$y=a^x$ توابعو مشتق دارنګه محاسبه کوو:

$y=a^x$ دواړو خواوو ته مشتق نیسو $Lny = xLna$

دواړو خواو ته مشتق نیسو $\frac{y'}{y} = Lna$

$$\Rightarrow y' = y.Lna = a^x.Lna \Rightarrow y' = a^x.Lna$$

دویم مثال- لاندې مشتقات محاسبه کړئ!

$a) f(x) = Log5x$

$b) g(x) = Ln(x^2+1)$

$c) f(x) = Ln(x^3+x^2)$

$d) f(x) = Ln(\cos 3x)$

حل:

$a) f(x) = Log5x$

په دې ځای کې $u(x)=5x$ او $u'(x)$ نظر فورمول ته لرو چې:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Loge = \frac{5}{5x}Loge = \frac{Loge}{x}$$

$b) g(x) = Ln(x^2+1)$

$c) f(x) = Ln(x^3+x^2)$

حل: $u(x) = x^2+1$ او $u'(x) = 2x$ فورمول ته په کتو لرو چې:

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Lne = \frac{2x}{x^2+1}Lne = \frac{2x}{x^2+1}$$

داچې $Lne = 1$ دی.

حل:

داچې:

$u'(x)3x^2+2x, u(x) = x^3+x^2$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Lne = \frac{3x^3+2x}{x^3+x^2}Lne = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{x(x^2+2x)} = \frac{x+2}{x^2+x}$$

حل:

$$d) f(x) = Ln(\cos 3x)$$

$$u'(x) = -3\sin 3x, u(x) = \cos 3x$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x} = -3\tan 3x$$

که $y = Lpg_e^{u^x}$ تابع موجوده وي که چېرې u=f(x) وي مشتق يې عبارت دی له:

$$y = Log_e^{u^n} = (Log_e^{u^n})' = \frac{n.u^{n-1}.u'}{v^n} = \frac{nu'}{u}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{nu'}{u}$$

مثال: د لاندې معادلې مشتق پيداکړئ:

$$y = Log(10x^3.5x^2 + 6x)^2$$

$$u = 10x^3.5x^2 + 6x$$

$$u'(x) = 30x^2 + 10x + 6$$

$$y'(x) = \frac{n.u'u^{n-1}.}{v^n} = \frac{nu'}{u} =$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)(10x^3.5x^2 + 6x)}{(10x^3.5x^2 + 6x)^2} = \frac{60x^2 + 20x + 12}{(10x^3.5x^2 + 6x)^2}$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)}{2(5x^3 + 2.5x^2 + 3x)^2} = \frac{30x^2 + 10x + 6}{5x^3 + 2.5x^2 + 3x}$$

د ضمني توابعو مشتق

هر کله چې د x اوy متحولين د y=f(x) را بطې پواسطه له يو بل سره رابطه ولري، په دې صورت کې y صريح تابع د x متحول ده، ولې ممکنه ده چې د y, x تر منځ ارتباط د f(x,y)=0 رابطې پواسطه معين يا ټاکلی وي، په دې حالت کې ويل کېږي، چې y ضمني تابع د x وي لکه $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ معادله چې دوه صريح تابع $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ او $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ افاده کوي او پورته معادله د ذکر شويو توابعو ضمني حالت دی .د ضمني توابعو د مشتق پيداکولو په خاطر y نظر x متحول ته د ټاکلې معادلې دواړو خواوته نظر x ته مشتق نيسو، داسې چې y متحول د x ترلې تابع فرض کېږي او په نهايت کې د y تابع مشتق نظر x متحول ته عبارت دی له:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f'(y)}$$

که y ثابت فرض شي $f'(x)$ د f مشتق نظر x متحول ته دی، که x ثابت فرض شي $f'(y)$
د f مشتق نظر y متحول دی.

مثال: د y مشتق نظر x ته له $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ضمني تابع په لاس راوړئ!

حل:

$$(x^2 + y^2 - r^2)' = 2x + 2yy' = 0$$
$$\Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

دويم مثال-

$$y^6 - y - x^2 = 0$$
$$(y^6 - y - x^2)' = 6y^5y' - y' - 2x = 0$$
$$\Rightarrow 6y^5y' - y' = 2x \Rightarrow y'(6y^5 - 1) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

درېيم مثال- د $y^4 - y - x^2 = 0$ تابع مشتق پيداکړئ!

$$y^4 - y - x^2 = 0 \Rightarrow (y^4 - y' - x^2) = 0 \Rightarrow 4y^3y' - y' - 2x = 0$$
$$\Rightarrow 4y^3y' - y' = 2x \Rightarrow y'(-1) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{4y^3 - 1}$$
$$\Rightarrow (y^4 - y - x^2)' = \frac{2x}{4y^3 - 1}$$

بايد يادونه وشي، چې موږ کولای شو د لوګارتم په وسيله مشتق ګيري وکړو، ځکه په ډېرو مواردو کې د توابعو مشتق له لوګارتم نه په ګټه اخيستو محاسبه کېږي، داسې چې په پيل کې د y=f(x) رابطې دواړو خواوو ته طبيعي لوګارتم نيسو

لرو چې Lny=Lnf(x)

د پورته ذکر شوې رابطې دواړو خواوو ته د ضمني تابع په حيث کولای شو مشتق ونيسو، داسې چې

$$(Lny)' = \frac{1}{y}y' \Rightarrow \frac{y'}{y} = (Lny)' \Rightarrow y' = y(\,Lny)'$$
$$\Rightarrow y' = f(x).)Lny)'$$

داچې $y = f(x)$ دی

دویمه طریقه:

$$(Lnf(x))'\frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x).(Lnf(x))'$$

لومړی مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق د لوګارتم په مرسته محاسبه کړئ!

حل:

$$y = x^{2x}$$
$$Lny = Lnx^{2x} \Rightarrow Lny = 2x.Lnx$$
$$(Lny)' = (2Lnx)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2Lnx + 2x.\frac{1}{x}$$
$$y' = y(2Lnx + 2) \Rightarrow y' = 2(Lnx + 1)\, y$$
$$y' = 2(Lnx + 1)x^{2x}$$

داچې $y = x^{2x}$ په پورته معادله کې وضع کوو.

دویم مثال- د $y = v^u$ تابع مشتق لاسته راوړئ.

حل:

$$y = v^u \Rightarrow Lny = Lnv^u \Rightarrow (Lny)' = (uL.nv)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'Lnv + u(Lnv)'$$
$$\Rightarrow (u'Lnv + u\frac{v'}{v'})y$$
$$y' = (u'Lnv + u\frac{v'}{v})v^u$$

د نسبتي توابعو مشتق د مشتق متحول

کله چې زموږ تابع یوه نسبتي تابع ورکړل شوې وي او د هغې مشتق پیداکوو، د مشتق د پیداکولو لپاره له لاندې قاعدې څخه ګټه اخلو.

۱- که $y = \frac{1}{x}$ تابع ورکړل شوې وي، مشتق یې عبارت دی له:

ثبوت:

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$$
$$y'(x) = -1 \cdot x^{-1-1}$$
$$y'(x) = -x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

۲-که تابع $y=\frac{1}{x^n}$ شکل ولري، مشتق يې عبارت دی له:

$$y=\frac{1}{x^n}$$

$$y'=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{1}{x^{10}}$ تابع مشتق پیدا کړئ!

$$y=\frac{1}{x^{10}}=x^{-10} \qquad y'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$y'(x)=-10x^{-10-1} \Rightarrow y'(x)=-10x^{-11}$$

$$\Rightarrow y'(x)=\frac{-10}{x^{11}}$$

۳-که تابع $y=\frac{1}{(x^3+2x^2+6)}$ وي د دارنگه توابعو مشتق عبارت دی له:

حل:

$$y=\frac{1}{u} \Rightarrow y'=\frac{-u}{x^{n+1}}$$

$$y=\frac{1}{(x^3+2x^3+6)} \Rightarrow y'=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^3+6)^2}$$

٤- هر کله چې $y=\frac{1}{x^n}$ تابع وي، د هغو توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y'(x)=\frac{-nu'}{u^{n+1}}$$

مثال: **د** $y=\frac{1}{(x^3+2x^2+6)}$ تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$y=\frac{1}{(4x^5+6x^2+12)^{12}}$$

$$u=(4x^5+6x^2+12)$$

$$u'(x)=20x^4+12x$$

$$y'(x)=\frac{-nu}{u^{n+1}}$$

$$y'(x)=\frac{-12(20x^4+12x)}{(4x^5+6x^2+12)^{13}}$$

دويم مشتقات او له هغې پورته

په پورته مثالونو کې مو ړ يواځې د ورکړل شوو توابعو اول مشتق د مشتق نيونې له روشونو نه په ګټه اخيستو او د هغو د قاعدو په کارونې خپل سوالونه حل کړي او اوس د دويم مشتق دپيداکولو لپاره او له هغې پورته هم له قاعدو څخه چې په پورته ذکر شوو توابعو کې د مشتق نيونې په خاطر ترې ګټه اخيستل شوې وه هم دګټې اخيستو وړ ګرځي، داسې چې مخکې ذکر شوي د تابع اول مشتق ورکړل شوی وي، د مربوطه منحني په ميلان کې له تغير نه ګټه اخيستل شوې او د دويم مشتق څخه د مربوطه منحني په ميلان کې ګټه اخلو او په ورکړل شوې تابع کې دويم مشتق د تغير درجه ښيي.

د مثال په توګه: که يوه توليدي تابع ورکړل شوې وي د دې تابع لومړی مشتق په مجموعي توليد کې نسبي تغير ښيي، چې د نهايي توليد يا مؤلديت په نوم يادېږي او د ذکر شوې تابع دويم مشتق په مؤلديت کې زياتوالی ښيي.

$$y = 4x^2 + 12x$$
$$y' = 8x + 12$$
$$y' = 8$$

د $y = 4x^2 + 12x$ تابع د مشتق غوندې يې محاسبه کړئ!

او همدارنګه بايد وويل شي چې د يوې تابع مشتق د يوې نوې تابع په حيث کېدای شي د مشتق نيونې وړ وي، د تابع د مشتق مشتق دوهمه مرتبه مشتق نومېږي او په همدې ډول تابع کېدای شي څو ځلې او حتی لايتناهي ځلې د مشتق نيونې وړ وي او دارنګه مشتقات په لاندې ډول ښودل کېږي.

تابع	y = f(x)
لومړی مشتق	$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$
دويم مشتق	$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$
درېيم مشتق	$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$
n ام مشتق	$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$

مثال: د لاندې توابعو اول، دويم، درېيم او څلورم مشتق لاسته راوړئ!

$$a)\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y'' = 6ax + 2b$$
$$y''' = 6a$$
$$y^{(4)} = 0$$

$$b)\ y = 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 12$$
$$y' = 8x^3 + 15x^2 + 12 + 2$$
$$y'' = 24x^2 + 30x + 12$$
$$y''' = 8x + 30$$
$$y^{(4)} = 48$$
$$y^{(5)} = 0$$

$$c)\ \begin{cases} y = \sin x, y' = \cos x \\ y'' = -\sin x, y''' = -\cos x \\ y^{(4)} = \sin, \ldots \end{cases}$$

$$c)\ y = 6x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 6$$
$$y' = 30x^4 + 12x^2 + 10x + 10$$
$$y = 120x^3 + 12x^2 + 10$$
$$y'' = 360x^2 + 24x$$
$$y^{(4)} = 36x^2 + 24$$
$$y^{(5)} = 720x$$
$$y^{(6)} = 0$$

د دويمو او له هغې نه د پورته مشتق قواعد هر كله چې د u او v توابع د n ام ځلې مشتقاتو لرونكې وي نو:

$$1)(\lambda u(x))^{(n)} = \lambda u^{n}(x)$$
$$2)(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + (v)^{n}$$
$$3)(u.v)' = uv' + v'u$$
$$4)(u.v)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$5)(u.v)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$6)(u.v)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$
$$(u.v)^{(n)} = u^{(n)}v + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} u^{n-1}v' + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} u^{n-2}v'' + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} u^{n-3}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

مثال: دویم مشتق له $y = e^{\alpha} .x^{2}$ تابع څخه په لاس راوړئ!

$$y = e^{ax}.x^{2}$$
$$y' = (e^{ax})'.x^{2} + e^{ax}(x^{2})^{2} = ae^{ax}.x^{2} + 2e^{ax}.x$$
$$y'' = (e^{ax})''.x^{2} + 2(e^{ax})'.(x^{2})' + e^{ax}(x^{2})''$$
$$y'' = a^{2}e^{ax}.x^{2} + 4ae^{ax}x + 2e^{ax}$$
$$\Rightarrow y = e^{ax}.x^{2} \Rightarrow y'' = a^{2}e^{ax}.x^{2} + 4ae^{ax} + 2e^{ax}$$

د دویم څپرکي پوښتنې

له قاعدو نه په ګټه اخیستو سره د لاندې توابعو مشتق پیداکړئ!

1) $f(x) = x^4$

2) $f(x) = 3x + 4$

3) $y = \dfrac{1}{x^{10}}$

4) $y = \sqrt{x}$

5) $f(x)\dfrac{1}{8}x^8 + 3x^4 - 8$

6) $f(x) = 2x^5 - 8x^3$

له تعریف نه په ګټه اخیستو د لاندې توابعو مشتق لاسته راوړئ!

7) $y = 2x^3 + 4$

8) $f(x) = x^3 - 9$

9) $h(x) = x^4 \qquad h'(x) = ?$

10) $f(x) = 4x^2 - 6$

11) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

12) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

13) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

د لاندې الجبري توابعو مشتق په لاس راوړئ!

14) $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

15) $y = x^4 + 3x^2$

16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

17) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}$

18) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

19) $y = \sqrt{6x+8}$

د مثلثاتي توابعو مشتقات لاسته راوړئ!

20) $\mathrm{y = 2sinx - 3cosx}$

21) $\mathrm{y = 4cos^2x}$

22) $\mathrm{y = 2sin^3x}$

23) $\mathrm{y = tanx + cotx}$

24) $\mathrm{y = 2xtanx}$

25) $\mathrm{y = 2xcotx}$

26) $y = Logx$

27) $y = Log(3x+1)$

28) $y = Ln(x^3 + x^2)$

د لاندې توابعو مشتق د لوګارتم په مرسته پیداکړئ!

29) $y = x^{x^3}$

30) $y = x^{\sin x}$

31) $y = (1+x)^3(2x+1)^2(9x-9)$

32) $y = L0g(\sin 3x)$

33) $y = Log4x$

34) $y = Ln(x^2 + 2)$

35) $4x^3 + 4x^2$

36) $y = 5x^2 + 6x$

37) $y = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x$

قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونه

ټوليزه موخه
لوستونکي به په سمه توګه قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونه درک کړي او له اصولو او قواعدو به سمه ګټه واخلي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي:
۱-مشتق تعريف او اړونده سوالونه حل کړای شي.
۲- قسمي مشتقات تعريف او قواعد يې درک کړي.
۳- دويم قسمي مشتقات تعريف او قواعد يې درک کړي.
٤- کلي مشتقات تعريف او د هغې مربوطه سوالونه حل کړي.
٥- له قسمي، دويم قسمي مشتقاتو نه ګټه اخيستل او د مشتقاتو حل به لوستونکي درک کړي او د هغې په کارونه به پوه شي.

قسمي مشتقات

څو متحوله تابع او قسمي مشتقات د اقتصادي رياضي له مهمو او اساسي مسايلوڅخه دي، تر اوسه مو د توابعو مفاهيم، لمټ او مشتق مطالعه کړل، چې يواځې د يو مستقل متحول لرونکي وو، يعنې توابعو په عمومي توګه $y=f(x)$ شکل درلود.

د دارنګه توابعو د مشتق له قيمت نه په ګټه اخيستو يا يو د مشتق له قواعدو څخه ګټه اخلو مشتق يې پيداکوو او اوس هغه توابع تر مطالعې لاندې نيسو، چې امکان لري په ځينو حالاتو کې يو تابع د يوه ټړلي متحول د دوه او يا څو مستقلو متحولونو په عوض وي، يعنې $u=f(x,y)$ او $u=f(x,y,z)$ او نور چې دارنګه تابع دوه متحوله، درې متحوله او نور نومېږي.

مثلاً:

$$1)\ z=4x+6y-10$$

$$2)\ z=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$3)\ u=2x^2-y^2+xyz+3z^2$$

$$4)\ z=f(x_1,x_2,x_3,x_4....x_n)$$

د (۱) او (۲) سوالونو په اړه د z تابع دوه متحوله او ۳ د u تابع درې متحوله او ۴ مثال باید وویل شي، چې په دې ځای کې z د تابع متحول $(x_1,x_2,x_3,x_4....x_n)$ مستقل متحولین وي او د څو متحوله تابع مشتق له متحولینو څخه یوه ته په کتو په داسې حال کې ډېر له هغې څخه ثابت عددونه فرض شي نظر هماغه متحول ته په کتو د تابع د قسمي مشتق په نوم یادېږي او څو متحوله توابع کېدای شي د بیلابېلو مرتبو د قسمي مشتقاتو لرونکې نظر هر مربوط متحول ته وي، داچې د دوه متحوله تابع قسمي مشتقات z=f(x,y)په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dz}{dx}=fx(x,y)$$

$$\frac{dz}{dy}=fy(x,y)$$

همدارنګه د z قسمي مشتقات نظر x_1 ته نیسو، نظر x_2 او اخر x_3 پیدا کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx_{1f(x_1)}}=zx_1\Rightarrow f(x_1)$$

$$\frac{dz}{dx_{2f(x_2)}}=zx_2\frac{dz}{dx_3f(x_3)}=zx_3$$

لومړی مثال- قسمي مشتقات یې پیداکړئ!

$$z=6x^2+8xy+6y^2$$

$$\frac{dz}{dx}=12x+8y$$

$$\frac{dz}{dy}=8x9+12y$$

دویم مثال: قسمي مشتق يې پيداکړئ!

$$z = 6x^{12}y^8 + 4x^2y + 24xy^2$$

$$\frac{dz}{d(x)} = zx = 72x^{11}y^8 + 4xy + 24y^2$$

$$\frac{dz}{d(y)} = zy = 48x^{12}y^7 + 4x^2 + 48xy$$

درېیم مثال: قسمي مشتقات يې پيداکړئ چې:

$$z = \frac{4x^2}{3y^2}$$

$$zx = \frac{8x(3y^2) - 0(4x^2)}{(4y^2)^2} = \frac{24xy^2}{16y^4}$$

څلورم مثال:

$$z = 4x3y3 + 12x2y2 + 4y4$$

$$\frac{dz}{dx} = zx = 12x^2y^3 + 24xy^4$$

$$\frac{dz}{dy} = zy = 12x^3y^2 + 24x^2y + 16x^3$$

پنځم مثال- د درې متحوله تابع قسمي مشتقات په لاندې ډول دي:

$$u = x^2y^2z + 4x - 2y + z + 6$$

$$\frac{du}{dx} = 2xy^2z + 4$$

$$\frac{du}{dy} = 2x^2yz - 2$$

$$\frac{du}{dz} = x^2y^2 + 1$$

شپږم مثال- د $f(x,y)=x^2y-5xy^2+4xy$ تابع قسمي مشتق په لاندې ډول دي:

$$f(x) = \frac{du}{dx} = 2xy - 5y^2 + 4y$$

$$\frac{df}{\partial y} = f(y) = x^2 - 10xy + 4x$$

دویم قسمي مشتقات او ترکیبي مشتقات

۱-دویم قسمي مشتقات :کله چې وغواړو اول قسمي مشتقونه د دویم ځل لپاره نظر هماغه متحول ته مشتق ونیسو د ذکر شوې تابع قسمي دویم مشتقونه نظر هماغه متحول ته په لاس راځي، دویم قسمي مشتقات په تابع کې له تغیر څخه عبارت دي نظر په وارد شوي تغیر په مستقل متحول کې یې تر بحث لاندې نیسو.

۲-ترکیبي مشتقات: که موږ قسمي مشتقات نظر x متحول ته یو ځل بیا نظر y متحول مشتق و نیسو، ویلای شو چې د تابع ترکیبي مشتق په لاس راغلی.

او هر کله چې د f(x,y) تابع په (x,y) نقطه کې له تعریف ناحیې څخه د قسمي مشتقاتو لرونکې وي د $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}$ مشتقات هم توابع د x او y دي او کېدای شي د لاندې قسمي مشتقاتو لرونکې وي.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}$$

که f_{yx},f_{xy} توابع متمادي وي په هغه صورت کې $f_{xy}=f_{yx}$ دی.

لومړی مثال: د لاندې تابع اول قسمي مشتقات، دویم او ترکیبي مشتق پیداکړئ!

$$z=6x^2+8xy-8y^2$$

$$z_x=12x+8y$$

$$z_{xx}=12x$$

$$z_y=8x-16y$$

$$z_{yy}=-16$$

$$z_{xy}=8$$

$$z_{yx}=8$$

ترکیبي مشتق

دویم مثال- دوه متحوله تابع $z=x^4y^3+3x^2y^2-2xy+2$ محاسبه کړئ!

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3y^3+3xy^2-2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2y^3+6y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=12x^3y^2+12xy-2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^4y^2+6xy-2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x^2y+6x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=12x^3y^2+12xy-2$$

په پورته مثال کې ليدل کېږي چې $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ دی

دریيم مثال- د $z=x^2y+y^3$ تابع اول او دويم ځلي مشتقات دا رنګه پيداکوو.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy\,\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x$$

څلورم مثال- فرض کړئ چې د يوې تصدۍ د توليد تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$Q=A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$ په پورته تابع کې Q د توليد مجموعي مقدار دی.

وسطي توليد دk په ارتباط

$$\Rightarrow Q=A(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$Q=\frac{Q}{L}Ak^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}}\Big/L\quad=$$

$$=Ak^{\frac{1}{4}}.L^{-1}.L^{\frac{3}{4}}=A.k^{\frac{1}{4}}.L^{-\frac{1}{4}}=A(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}})$$

$$=A\cdot\frac{k^{\frac{1}{4}}}{L^{\frac{1}{4}}}=A(\frac{K}{L})^{\frac{1}{4}}$$

A د تکنالوجۍ ضريب kد توليد عامل لکه د توليد د وسايلو پانګه د توليد بل عامل، لکه کار او طاقت L اوk نه يواځې د توليد د عواملو نماينده ګي کوي، بلکې د عايد په توزيع کې هم ترې ګټه اخيستل کېږي، لاندې مطالب هدف دی.

۱- تولید یا د تولید د عواملو وسطي مؤلدیت.

۲- نهایي تولید یا د تولید د عواملو نهایي تولید.

۳- په تولید کې د تغیر درجه یا د عواملو مؤلدیت.

٤- په نهایي مؤلدیت کې د تغیر درجه یو له عواملو ده، که چېرې په یوه وخت تغیر وکړي.

نوټ:

$$Q = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$$

L= کارګر

K=ماشین

Q= تولید

د لومړي جز ځواب:

$$Q = \frac{Q}{K} = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}} \Big/ K =$$

د هغې حل په صفحه مخامخ لیکل شوی.

$$= A.k^{\frac{1}{4}}.K^{-1}.L^{\frac{3}{4}} = A.k^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}} = A\left(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}}\right)$$

د L په ارتباط وسطي تولید

۲-نهایي تولید: مخکې له دې چې دویم جز حل کړو، نهایي تولید دا رنګه تعریفوو:

نهایي تولید د مجموعي تولید په مقدار کې له هغه تغیر څخه عبارت دی، چې د یو وا حد تغیر په اثر په مربوطه عامل کې منځ ته راځي، خو که چېرې زیات عوامل ثابت پاتې وي.

د ریاضي له مخې د تولید د تابع له قسمي مشتق څخه عبارت نظر د K په څېر عامل ته که چېرې بل عامل په تابع کې پاتې شوی وي.

یعنې:

د درېیم جز ځواب.

$$\frac{dQ}{dQ} = Q_k = \frac{1}{4} AK^{\frac{1}{4}-1} . L^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} AK^{-\frac{3}{4}} L^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} A(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}}) = \frac{A}{4}(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{dQ}{dL} = Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} . L^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} A . K^{\frac{1}{4}} \Big/ L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} A(\frac{K}{L})^{\frac{1}{4}}$$

$$Q_K = \frac{1}{4} AK^{\frac{-3}{4}} . L^{\frac{3}{4}}$$

$$Q_{KK} = -\frac{3}{4}(\frac{1}{4}) AK^{\frac{-3}{4}-1} . L^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}(\frac{1}{4}) AK^{-\frac{7}{4}} . L^{\frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{3}{16} AK^{-\frac{7}{4}} . L^{\frac{3}{4}} = \frac{-3}{16} A(K^{-\frac{7}{4}} . L^{\frac{3}{4}}) = -3AL^{\frac{3}{4}} \Big/ 16K^{\frac{7}{4}}$$

$$\Rightarrow Q_{KK} = -\frac{3A}{16}(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{7}{4}}})$$

$$Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} . L^{\frac{-1}{4}}$$

$$Q_{LL} = -\frac{1}{4}(\frac{3}{4}) AK^{\frac{1}{4}} . L^{-\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{4}(\frac{3}{4}) AK^{\frac{1}{4}} . L^{-\frac{5}{4}}$$

$$= -\frac{3}{16} AK^{\frac{1}{4}} \Big/ L^{\frac{5}{4}}$$

د څلورم جز ځواب

د تابع ترکیبي مشتق دا رنګه پیداکوو، دا چې ترکیبي مشتق مثبت وي په دې دلالت کوي، چې په نهایي مؤلدیت کې تغیر او ټول عوامل د متحول مربوط وي، مثبت دي فلهذا مخ په زیاتېدو دي.

$$Q_K = \frac{1}{4} AK^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$$

$$Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{4}}$$

$$Q_{KL} = (\frac{1}{4})(\frac{3}{4}) AK^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}}.L^{-\frac{1}{4}}$$

$$= 3A/16\, AK^{\frac{3}{4}}.L^{\frac{1}{4}}$$

$$Q_{KL} = \frac{1}{4}(\frac{3}{4})K^{\frac{1}{4}-1}.L^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}}.L^{-\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow = \frac{3A}{16K^{\frac{3}{4}}.L^{\frac{1}{4}}}$$

پنځم مثال- هر کله چې د $Q = 4K^{\frac{1}{3}}.L^{\frac{2}{3}}$ تصدۍ د تولید تابع وي.

۱- د K او L عامل وسطي تولید محاسبه کړئ!

۲- نهایي تولید یې محاسبه کړئ!

۳- په تولید کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

٤- په نهایي مؤلدیت کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

د k عامل وسطي تولید $\frac{Q}{K} = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}/K$ = L وسطي تولید عامل

$$= 4K^{\frac{1}{3}}.K^{-1}.L^{2/3} = 4K^{\frac{-2}{3}} L^{2/3} = 4L^{2/3}/K^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow = 4(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$= Q/L = 4K^{\frac{1}{3}}.L^{\frac{2}{3}}/L = 4K^{\frac{1}{3}} L^{-1} L^{\frac{2}{3}}$$

$$= 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{-1}{3}} = 4K^{\frac{1}{3}}/L^{\frac{1}{3}} \Rightarrow QL = 4(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

د دویم جز څواب تر کیبي مشتق

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$dQ \big/ dK = 4(\frac{1}{3})K^{\frac{1}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}L^{\frac{2}{3}} \Big/ K^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}(\frac{L}{K})^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}(\frac{L}{K})^{\frac{2}{3}}$$

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$dQ \big/ dL = \frac{2}{3}(4)K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}(K^{\frac{1}{3}} \Big/ L^{\frac{+1}{3}}) = \frac{8}{3}(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow QL = \frac{8}{3}(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

د دریيم جز څواب

$$QK = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$QKK = \frac{4}{3}(\frac{-2}{3})K^{\frac{-2}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = -\frac{8}{9}K^{\frac{-5}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKK = -8L^{\frac{2}{3}} / 9K^{\frac{5}{3}}$$

$$QLL = \frac{8}{3}(-\frac{1}{3})K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-1}{3}-1} = -\frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-4}{3}} = -8K^{\frac{1}{3}} \Big/ 9L^{\frac{4}{3}} = QLL = \frac{-8K^{\frac{1}{3}}}{9L^{\frac{4}{3}}}$$

$$QK = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKL = \frac{2}{3}(\frac{4}{3})K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{9}K^{\frac{-2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}.L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QLK = \frac{1}{3}(\frac{8}{3})K^{\frac{1}{3}-1}.L^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

باید وویل شي چې د ترکیبي مشتقونو ضریبونه مثبت دي، فلهذا تابع مخ په زیاتېدو ده.

کلي مشتقات

په قسمي مشتق نیونه کې مو د تابع مشتق، نظر یوه متحول ته نیوه او نور متحولونه مو ثابت فرض کړل.

ولې په کلي مشتق نیونه کې ټول متحولونه په یو وخت تغیر کوي، د مشتق نیونې په مبحث کې مو ولیدل چې که y=f(x) تابع وي.

او د هغې تابع مشتق $dy/dx = f(x)$ شکل لري او که د معادلې دواړه خواوې په dx ضرب کړو معادله لاندې شکل غوره کويdy=f(x)dx چې دا افاده د کلي مشتق مفهوم لري ، کلي مشتق نیونه هغه وخت د بحث وړ کېږي، چې تابع د څو مستقلو متحولینو لرونکې وي او مونږ په خپل ځای کې توابع تر مطالعې لاندې نیسو.

چې د دوه ډوله مستقلو متحولینو لرونکې وي او د دې توابعو کلي مشتق عبارت دی د تابع له قسمي مشتقاتو د ضرب د حاصل له مجموعې سره او د هغې په مربوطه متحول کې د وارد شوي تغیر سره.

فرضاً که تابع لاندې شکل ولري y = f(u v w) چې په هغې کې u,v,w د بل متغیر تابع لکه د x ده، چې مرکبه تابع نومېږي او د دارنګه توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y' = f'u.ux + f'v.vx + f'w.wx$$

یا په بل عبارت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{dx} + \frac{\partial f}{dw}.\frac{\partial w}{dx}$$

یاپه بل عبارت په اقتصادي مسایلو کې هغه وخت بې نهایت ارزښت لري او په t ښودل کېږي، کولای شو له دې فورمول نه ګټه واخلو، یعنې که u=f(x,y,z) په داسې حال کې چې z,y,x توابع له t متحول څخه

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{dz}.\frac{dz}{dt}$$

او که د مرکبو توابعو مشتق د دوه میانجي مستقل متحولونو لرونکی وي . Z=f(u,v) په داسې حال کې چې u=f(x,y) او v=Q(x,y) وي x,y مستقل وي؛ نو د z تابع مشتقات نظر x اوy متحول ته عبارت دي له:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{dy}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

لومړی مثال: د لاندې مرکبې تابع مشتق محاسبه کړئ!
دا چې

$$y=2u^2-4uv-5v^2$$
$$u=2x^2-2x$$
$$v=x^3+x$$
$$u'x=4x-2$$
$$v'x=3x^2+1$$
$$y'=4uu'-4u'v-4uv'-10vv'$$
$$y'=4(2x^2-2x)(4x-2)-4(4x-2)(3x^2+1)$$
$$-4(2x^2-2x)(3x^2+1)-10(x^3+x)(3x^2+1)$$

دویم مثال: وښایئ چې $z=\varphi(x^2+y^2)$ تابع لاندې معادله صدق کوي!

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

حل: د φ تابع (فی) د دوه مستقلو متحولو x.اوy د میانجي متحول په واسطه $t=x^2+y^2$ وي نو:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)2y$$
$$\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$\Rightarrow \varphi'(x^2+y^2)2xy-\varphi'(x^2+y^2)2xy=0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

باید یادونه وشي چې اقتصادي ریاضي تر ډېره له پخوا راهسې له اقتصادي مسایلو تولید، عرضه، تقاضا، توزیع، متاع، اجناس، وخت، کار او نورو سره سروکار لري، له دې سببه

د توابعو د کلي مشتق د پیداکولو لپاره له لاندې فورمول نه ډېره ګټه اخیستل کېږي او فورمول په لاندې شکل تشریح کوو، فرضاًکه تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx}.dx + \frac{dz}{dy}.dy...\mathrm{I}$$

$$dz = zx.dx + zy.dy...\mathrm{I}$$

۱-که تابع د تابع تابع شکل ولري، دا چې z د تابع په اوله مرحله کې د (x,y) متحول وي او په دویمه مرحله کې یو له مستقلو متحولو څخه تابع د بل مستقل متحول وي لکه z= f(x,y) داسې، چې y=f(x) وي په دې مرحله کې دz کلي مشتق نظر x ته او $\frac{dz}{dx}$ محاسبه کېږي او د I معادلې دواړه خواوې په dx تقسیموو، معادله لاندې شکل اختیاروي.

$$\frac{dz}{dx} = zx.\frac{dx}{dx} + zy.\frac{dy}{dx}.dx.......1$$

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy\frac{dy}{dx}.........2$$

۲-که z=f(x,y) وروسته د x له له طریقه یواځې د y تابع وي، د z کلي مشتق نظر Y ته دارنګه محاسبه کېږي، یعنې $\frac{d}{dz}$ او په اول قدم کې z = f(x,y) وروسته x=f(y) اوس د I معادلې دواړه خواوې په dy تقسیموو، معادله لاندې شکل اختیاروي.

$$\frac{dz}{dy} = zx\frac{dx}{dy} + zy.\frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dy} = zx\frac{dx}{dy} + zy...3$$

۳-په درېیم حالت کې کولای شي د z تابع اول د y,x تابع او دویم د y,x له طریقه هر یو د بل متحول وي، داچې په اقتصادي مسایلو کې د (t) وخت عامل اساسي رول لري، په دې حالت کې z د y,x تابع او وروسته د y,x له طریقه د t تابع وي لکه:

z=f(x,y) و X=f(t)

Y=f(t)

داچې د z کلي مشتق نظر t ته عبارت له $\frac{dz}{dt}$ محاسبه کېږي د I معادلې دواړه خواوې په dt تقسیموو اول فورمول لاندې شکل غوره کوي.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}.\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt}=zx.x(t)+zy.y(t)$$
$$\Rightarrow dz\big/_{dt}\, zx.\frac{dx}{dt}+zy.\frac{dy}{dt}............4$$

دریم مثال: د $z=6x^{\frac{2}{3}}.y^{6}$ تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!

حل: اول فورمول ته په کتو لرو چې :

$$z=6x^{\frac{2}{3}}.y^{6}$$
$$dz=zxdx+zy.dy$$
$$dz=(\frac{2}{3})(6)(x^{\frac{2}{3}-1}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$
$$dz=(\frac{12}{6})(x^{-\frac{1}{3}}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$
$$dz=(2x^{-\frac{1}{3}}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$

څلورم مثال: فرض کوو چې د یوه کارګر د عاید تابع عبارت له $z=9x^2y^2$ څخه وي، په دې تابع کې z خالص عاید x د کارګر د ورځې کار y د فی ساعت کار مزد او لکه څنګه چې فرض کوو، چې د في ساعت کار مزد د تابع تابع د کارګر د کار د ساعت اندازه وي $y=x^2+3x-1$ په دې حالت کې د کارګر د تابع کلي مشتق پیداکړئ(د کار ګر په عاید کې تغیر په y اوx کې د وارد شوي تغیر په اثر یعنې کار په ساعت کې او د في ساعت کار مزد) څو دی.

حل: فورمول ته په کتو لرو چې:

$$\frac{dz}{dx}=zx+zy\frac{dy}{dx}$$
$$z=9x^2y^2\,\frac{dz}{dx}=18xy^2+18x^2y(2x+3)$$
$$y=x^2+3x-1=18xy^2+36x^3y+54x^2y$$
$$zx=18xy^2$$
$$zy=18x^2y\,\frac{dz}{dx}=18xy(y+2x^2+3x)$$
$$\frac{dy}{dx}=y'=2x+3$$

۱- د y قیمت په لاسته راغلي ځواب کې وضع کوو

$$\frac{dz}{dx}=18xy^2+36x^3y+54x^2y$$
$$\frac{dz}{dx}=18(x^2+3x-1)+36x^3(x^2+3x-1)+54x^2(x^2+3x-1)^2$$
$$=18(x^2+3x-1)^2(x^2+3x-1)^2+36x^3+108x^4-36x^3+54x^4+162x^3-54x^2$$
۲
$$=18x(x^4+3x^3-x^2+3x^5+9x^2-3x-x^2-3x+1)+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=18x(x^4+6x^3+7x^2-6x+1)+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=18x^5+108x^4+126x^3-108x^2+18x+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=54x^5+270x^4+252x^3-162x^2+18x$$

۳- کولای شو د پورته سوال ځواب دارنگه په لاس راوړو، چې د y قیمت په اصلي تابع کې وضع کوو او بیا نظر x ته د تابع مشتق نیسو.

$$z=9x^2(x^2+3x-1)^2=9x^2(x^2+3x-1)(x^2+3x-1)$$
$$z=9x^2(x^4+6x^3+6x+1)$$
$$z=9x^6+54x^5+63x^4-54x^3+9x^2$$
$$\frac{dz}{dx}=54x^5+270x^4+252x^3-162x^2+18x$$

پنځم مثال: فرض کوو چې د عرضې تابع د یوې متاع لپاره عبارت ده له $z=(4x+6y-1)^3$ په پورته مثال کې z د عرضې مقدار او تابع ده، x د متاع قیمت او y د تعویض د اشیاؤ قیمت وي، هر کله چې د اشیاؤ قیمت تعویضي او د تابع قیمت متاع $y=2x^2+8x$ وي، د اړونده متاع په عرضه کې کلي تغیرات د هماغې متاع د قیمتونو او اشیاوو په نظر کې نیولو سره عوض او محاسبه کړئ او د z کلي مشتق پیداکړئ!

حل:

$$z=(4x+6y-1)^3$$
$$y=2x^2+8x$$
$$\frac{dz}{dx}=zx\frac{dy}{dx}+zy.\frac{dx}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=3(4x+6y-1)^2(6)(4x+8)+3(4x+6y-1)^2(4)$$
$$=18(4x+8)(4x+6y-1)^2+12(4x+6y-1)^2$$
$$=(72x+144)(4x+6y-1)^2+12(4x+6y-1)^2$$
$$=(72x+144)(4x+6y-1)(4x+6y-1)+12(4x+6y-1)12(4x+6y-1)$$
$$=(72x+144)(16x^2+24xy-4x+24xy+36y^2-4x-6y-6y+1)$$
$$+12(16x^2+24xy-4x+24xy+36y^2-6y-4x-6y+1)$$
$$=(72x+144)(16x^2+48xy-8x+36y^2-12y+1)+$$
$$+12(16x^2+48xy-8x+36y^2-12y+1)$$
$$=1152x^3+3454x^2y-576x^2+2592xy^2-864xy+72x$$
$$+2304x^2+6912xy-1152x+5184y-1728y+144$$
$$+192x^2+576y-96x+432y-144y+12$$
$$=1152x^3+3456x^2y+1920x^2+2592xy^2+6048xy-1176x$$
$$+9350y+432y^2+156$$

٦مثال- که فرض کړو د متاع لپاره د عرضې تابع $z=(x^2+2xy+y^2)^2$ وي، څکه د

$y=6x^2+1$

او $x=2$ $y=4$

حل:

$$\frac{dz}{dx}=zx\frac{dy}{dx}+zx.\frac{dx}{dx}$$
$$\frac{dz}{dx}=2(x^2+2xy+y^2)(2x+2y)(12x)+2(x^2+2xy+y^2)(2x+2y)$$
$$\frac{dz}{dx}=2(2^2+2.2.4+4^2)(2.2+2.4)(12.2)+2(2^2+2.2.4+4^2)(2.2+2.4)$$
$$=2(4+16+16)(4+8)(24)+2(4+16+16)(4+8)$$
$$=2(36)(12)(24)+2(36)(12)$$
$$=8640.24+8640=207360+8640=216000$$
$$\frac{dz}{dx}==216000$$

اووم مثال: فرض کوو چې د يوه کارگر د عايد تابع عبارت له $z=9x^2y^2$ څخه وي؛ نو په دې تابع کې z خالص عايد x د کارگر د ورځني کار ساعت y د کار د في ساعت مزد، همدارنگه فرض کوو چې د في ساعت کار مزد تابع د تابع د کارگر د کار د ساعتونو اندازه او لاندې شکل لري.

$$y=x^4+3x-1$$

په دې حالت کې د کارگر د کار د تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!
(د وارده تغير په اثر د کارگر په عايد کې تغير په x,y کې يعنې د کار په ساعت کې او د فې ساعت کار مزد) څو دی؟

حل:

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy\frac{dy}{dx}$$

$$z = 9x^2y^2$$

$$y = x^4 + 3x - 1$$

$$zx = 18xy^2$$

$$zy = 18x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3$$

$$y'(x) = 4x^3 + 3$$

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 18x^2y(4x^3 + 3)$$

$$= 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 18xy(y + 4x^3 + 3x)$$

پاسنی سوال کولای شو له دوه جهتو بررسي کړو:

1- د y قيمت په وروستي ځواب کې وضع کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\frac{dz}{dx} = 18x(x^4 + 3x - 1)^2 + 72x^5(x^4 + 3x - 1)^2 + 54x^2(x^4 + 3x - 1)^2$$

$$= 18x(x^4 + 3x - 1)^2(x^4 + 3x - 1)^2 + 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x(x^8 + 3x^5 - x^4 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^4 - 3x + 1) +$$

$$+ 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x^9 + 108x^6 - 36x^5 + 162x^3 - 108x^2 + 18x$$

$$+ 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 90x^9 + 378x^6 + 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 90x^9 + 378x^6 + 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

۲-کولای شو د ذکر شوې تابع ځواب دارنګه لاسته را وړو، چې y په اصلي تابع کې وضع کوو، وروسته نظر x ته د تابع مشتق پیداکوو.

حل: دا چې $z = 9x^2y^2$ دی $y = x^4 + 3x - 1$ وي.

$$z = 9x^2(x^4 + 3x - 1)^2$$

$$z = 9x^2(x^4 + 3x - 1)(x^4 + 3x - 1)$$

$$z = 9x^2(x^8 + 3x^5 - x^4 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^4 - 3x + 1)$$

$$z = 9x^2(x^8 + 6x^5 - 2x^4 + 9x^2 - 6x + 1)$$

$$z = 9x^{10} + 54x^7 - 18x^6 + 81x^4 - 54x^3 + 9x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 90x^9 + 378x^6 - 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

د درېیم څپرکي پوښتنې:

۱- د لاندې توابعو قسمي مشتقات محاسبه کړئ!

$$1) z = x^2 + y^2 + 5xy$$
$$2) z = 3x^2y^2 + 12xy^3 + 2y^4$$
$$3) z = (x^2 + y^2)^5$$
$$4) z = x^2 + 3x - 9$$

۲- د لاندې توابعو اول او دویم قسمي مشتقونه او ترکیبي مشتق پیداکړئ!

$$1) z = 8x^2 + 16xy - 24y^2$$
$$2) z = (4x^2 + 2y^2)$$

۳- فرض کړئ چې د یوې تصدۍ د تولید تابع لاندې شکل لري:

$$p = 8k^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

۱-د k د عامل په اړه وسطي تولید

۲- دL د عامل په اړه وسطي تولید

۳-نهایي تولید

٤- په تولید کې د تغیر درجه

٥- په مؤلدیتونو کې د تغیر درجه

پورتني پنځه جزه محاسبه کړئ!

٤- فرض کوو چې د یوه نجار د عاید تابع عبارت له $z = 9x^2y^2$ وي.

۱- z خالص عاید ۲- x د نجار ورځني کاري ساعتونه ۳- y د في ساعت کار مروج مزد سربېره پر دې فرض کوو، چې د في ساعت کار مزد د نجار د کاري ساعت د اندازې تابع وي، یعنې $y = x^4 + 3x - 1$ په دې حالت کې د نجار د تابع کلي مشتق پیداکړئ!

٥- د $z = e^{4x2+3y2}$ تابع کلي مشتق پیداکړئ که چېرې $x=8y^4$ وي.

٦- د $z = 8x^3 + 12xy - 6y^3$ تابع کلي مشتق پیداکړئ، که چېرې $x = 2t^{\frac{1}{2}}, y = 4t^2$ وي.

سرچینې او اخیستنې:

۱- ریاضی عمومی موءلف داکتر غوری سال ۱۳۸۶
۲- ریاضیات عمومی سردار محمد ۲۰۰۶ میلادی
۳- لکچر نوت های پوهاند اقتصاد سال های ۱۳۷۷ و ۱۳۷۶
۴- ریاضیات عالی موءلف پوهنوال دکتور محمد (نور غوری) و زا کتاب های صنوف ۱۱ و ۱۲ مکاتب نیز استفاده شده است.

د ښوونيز نصاب د پراختيا د رياست پيغام

د پوهنې وزارت د تخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت دښوونيز نصاب د انکشاف رياست د ټولنې دعيني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلينو او شاگردانو د درسي کتابونو په برخه کې يې تخنيکي او مسلکي رشتې درلودې او لري يې، په لومړي سرکې يې تصميم ونيو، چې په ښوونيزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بياکتنه وکړي او ورپسې بيا د شاگردانو او محصلينو د درسي کتابونو د تاليف لپاره مبادرت او کوښښ وکړي. د خدای(ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانگې د ښوونکو په ميړانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تاليف شول تر څو په وړيا ډول د شاگردانو او محصلينو په واک او اختيار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، گرانو شاگردانو او د تخنيکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصينو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صميمانه هيله کيږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانگې د مسلکي غړو له لوري تاليف او تدوين شوي دي. د مسلکي، تخنيکي او علمي مطالبو او مفاهيمو د څرنگوالي په هکله خصوصاً د هغوی املايي او انشايي اشتباهاتو په اړهمونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخوکې گرانو شاگردانو ته له دې څخه ښه، غوره، گټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له گرانو شاگردانو او محصلينو څخه هيله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هيواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظرکې ونيسي او د کتابونو په ساتنه کې کوښښ او زيار وباسي، ترڅو د ډېرو شاگردانو او محصلينو د گټې وړ وگرځي.

پته: دپوهنې وزارت – دتخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت د تعليمي نصاب د انکشاف رياست – دکتابونو د تاليف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مديريت.