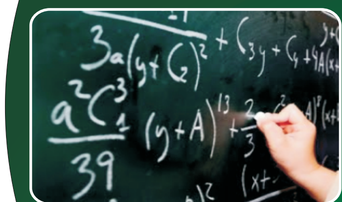
انالیز ریاضی I

سید یوسف مانووال

AFGHANIC



In Dari PDF
2012

Balkh Medical University
پوهنځی طب بلخ

Funded by:
DAAD Deutscher Akademischer Austausch Dienst
German Academic Exchange Service

Mathematical Analysis 1

Said Yousuf Manowal

پوهنځی طب بلخ

انالیز ریاضی I

همرای سی دی

سید یوسف مانووال

۱۳۹۱

انالیز ریاضی I

Mathematical Analysis

سید یوسف مانووال

AFGHANIC

Balkh Medical Faculty

Said Yousuf Manowal

Mathematical Analysis 1

Funded by:
DAAD Deutscher Akademischer Austausch Dienst
German Academic Exchange Service

ISBN 978-9936-200-88-3
9 789936 200883

with CD

2012

بسم الله الرحمن الرحيم

پوهنځی طب بلخ

انالیز ریاضی I

سید یوسف مانووال

۱۳۹۱

نام کتاب	انالیز ریاضی I
مؤلف	سید یوسف مانووال
ناشر	پوهنځی طب بلخ
ویب سایت	www.ba.edu.af
چاپ	مطبعه سهر، کابل، افغانستان
تیراژ	۱۰۰۰
سال	۱۳۹۱
داونلود	www.ecampus-afghanistan.org

کتاب هذا توسط انجمن همکاریهای اکادمیک آلمان (DAAD) از بودیجه وزارت خارجه فدرالی آلمان تمویل شده است.
امور اداری و تخنیکی کتاب توسط موسسه افغانیک انجام یافته است.
مسؤلیت محتوا و نوشتن کتاب مربوط نویسنده و پوهنځی مربوطه می باشد. ارگان های کمک کننـــده و تطبیق کننده مسؤل نمی باشند.

اگر میخواهید که کتابهای تدریسی طبی شما چاپ گردد، با ما به تماس شوید:
داکتر یـــحـیـی وردک ، وزارت تحصیلات عالی، کابل
دفتر: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰
ایمیل: wardak@afghanic.org

ای اس بي ان: 9789936200883

پیام وزارت تحصیلات عالی

در جریان تاریخ بشریت کتاب برای کسب علم و دانش نقش عمده را بازی کرده و جز اساسی پروسه درسی بوده که در ارتقای کیفیت تحصیلات دارای ارزش خاص میباشد. از اینرو باید با در نظر داشت ستندردها و معیارهای شناخته شده جهانی و ضروریات جوامع کتب و مواد درسی جدید برای محصلین آماده و چاپ گردد.

از اساتید محترم موسسات تحصیلات عالی کشور قلبا اظهار سپاس و قدردانی مینمایم که با تقبل زحمات در جریان سالهای متمادی با تالیف و ترجمه کتب درسی دین ملی خود را ادا نموده اند. از سایر اساتید و دانشمندان گرانقدر نیز صمیمانه تقاضا مینمایم که در رشته های مربوطه خود کتب و سایر مواد درسی را تهیه نمایند، تا بعد از چاپ در دسترس محصلین گرامی قرار داده شوند.

وزارت تحصیلات عالی وظیفه خود میداند تا جهت ارتقای سطح دانش محصلین عزیز کتب و مواد درسی جدید و معیاری را آماده نماید.

در اخیر از وزارت خارجه کشور آلمان، موسسه DAAD، سایر ادارات و اشخاصی که زمینه چاپ کتب طبی اساتید محترم پوهنځی های طب کشور را مهیا ساخته اند صمیمانه تشکر مینمایم.

امیدوارم که این کار سودمند ادامه یافته و به سایر بخش ها نیز گسترش یابد.

با احترام

پوهاند دوکتور عبیدالله عبید

وزیر تحصیلات عالی

کابل، ۱۳۹۱

چاپ کتب درسی پوهنځی های طب

استادان گرامی و محصلین عزیز !

کمبود ونبود کتب درسی در پوهنتون های افغانستان از مشکلات عمده به شمار میرود. محصلین و استادان با مشکلات زیاد روبرو میباشند. آنها اکثرا به معلومات جدید دسترسی نداشته و از کتاب ها و چپتر های استفاده مینمایند که کهنه بوده و در بازار به کیفیت پایین فوتوکاپی میگردد.

برای رفع این مشکلات در دو سال گذشته ما چاپ کتب درسی پوهنځی های طب پوهنتون ها ی کشور را آغاز نمودیم وتا اکنون ۲۰ عنوان کتب درسی را چاپ نموده و به تمام پوهنځی های طب افغانستان ارسال نموده ایم.

این در حالی است که پلان ستراتیژیک وزارت تحصیلات عالی (۲۰۱۰ – ۲۰۱۴) کشور بیان می دارد:

« برای ارتقای سطح تدریس، آموزش و آماده سازی معلومات جدید ، دقیق وعلمی برای محصلان، باید برای نوشتن و نشر کتب علمی به زبان های دری و پشتو زمینه مساعد گردد. برای ریفورم در نصاب تعلیمی ترجمه از کتب و مجلات انگلیسی به دری و پشتو حتمی و لازمی میباشد. بدون امکانات فوق ناممکن است تا محصلان و استادان در تمامی بخش ها به پیشرفت های مدرن و معلومات جدید زود تر دسترسی بیابند.»

استادان و محصلین پوهنځی های طب با مشکلات زیاد مواجه اند. تدریس به میتود کهنه ،عدم دسترسی به معلومات و مواد جدید درسی و استفاده از کتب و چپتر های که به کیفیت بسیار پایین در بازار دریافت میگردد از جمله مشکلات عمده در این راستا میباشد. باید آن عده از کتاب هاییکه توسط استادان تحریر گردیده اند جمع آوری و چاپ گردند. با درنظرداشت حالت بحرانی کشور جنگ زده، ما به دوکتوران ماهر و ورزیده نیاز داریم تا بتوانند در بهبود و ارتقای تحصیلات طبی و صحت عامه در کشور سهم فعال بگیرند. از اینرو باید توجه زیادتر برای پوهنځی های طب جلب گردد.

تا به حال ما به تعداد ۲۰ عنوان کتب مختلف طبی برای پوهنځی های طب ننگرهار، خوست ، هرات ، کندهار ، بلخ هرات و کابل را چاپ نموده ایم و پروسه چاپ ۵۰ عنوان دیگر جریان دارد که یک نمونه آن همین کتابی است که فعلا در دسترس شما قرار دارد. قابل یاد آوری است که تمام کتب چاپ شده مذکور بصورت مجانی برای پوهنځی های طب کشور توزیع گردیده اند.

به اثر درخواست وزارت محترم تحصیلات عالی، پوهنتون ها، استادن محترم ومحصلین عزیز درآینده می خواهیم این پروگرام را به بخش های غیر طبی (ساینس، انجنیری ، زراعت و سایر بخش ها) و پوهنځی های دیگر هم توسعه دهیم و کتب مورد نیاز پوهنتون ها و پوهنځی های مختلف را چاپ نماییم.

از آنجاییکه چاپ نمودن کتب درسی یک پروژه پروگرام ما بوده، بخش های کاری دیگر ما بطور خلاصه قرار ذیل اند :

۱ چاپ کتب درسی طبی

کتابی که در اختیار شما است، نمونه از فعالیت های ما میباشد. ما میخواهیم که این روند را ادامه دهیم تا بتوانیم در زمینه تهیه کتب درسی با پوهنتون های کشور همکاری نماییم و دوران چپتر و لکچرنوت را خاتمه دهیم و نیاز است تا برای موسسات تحصیلات عالی کشورسالانه به تعداد ۱۰۰ عنوان کتاب درسی چاپ گردد.

۲. تدریس با میتود جدید و وسایل پیشرفته

در جریان سال ۲۰۱۰ توانستیم در تمام صنوف درسی پوهنځی های طب بلخ، هرات، ننگرهار، خوست و کندهار پروجیکتورها را نصب نماییم. برای ایجاد محیط مناسب درسی باید تلاش گردد که تمام اطاق های درسی و کنفرانس و لابراتوارها مجهز به مولتی میدیا، پروجکتور و سایر وسایل سمعی و بصری گردند.

۳. ارزیابی ضروریات

وضعیت فعلی (مشکلات موجوده و چلنج های آینده) پوهنځی های طب باید بررسی گردد و به اساس آن به شکل منظم پروژه های اداری، اکادمیک و انکشافی به راه انداخته شوند.

۴. کتابخانه های مسلکی

باید در تمام مضامین مهم و مسلکی کتب به معیارهای بین المللی به زبان انگلیسی خریداری و به دسترس کتابخانه های پوهنځی های طب قرار داده شود.

۵. لابراتوارها

در پوهنځی های طب کشور باید در بخش های مختلف لابراتوارهای فعال وجود داشته باشد.

۶. شفاخانه های کدری

هر پوهنځی طب کشور باید دارای شفاخانه کدری باشد و یا در یک شفاخانه شرایط برای تریننگ عملی محصلین طب آماده گردد.

۷. پلان ستراتیژیک

بسیار مفید خواهد بود که هر پوهنځی طب در چوکات پلان ستراتیژیک پوهنتون مربوطه خود دارای یک پلان ستراتیژیک پوهنځی باشد.

از تمام استادان محترم خواهشمندیم که در بخش های مسلکی خویش کتب جدید تحریر، ترجمه و یا هم لکچرنوت ها و چپتر های خود را ایدیت و آماده چاپ نمایند. بعدا در اختیار ما قرار دهند، تا به کیفیت عالی چاپ و به شکل مجانی به دسترس پوهنځی های مربوطه، استادان و محصلین قرار داده شود.

همچنان در مورد نکات ذکر شده پیشنهادات و نظریات خود را به آدرس ما شریک ساخته تا بتوانیم مشترکاً در این راستا قدم های مؤثرتر را برداریم.

ازمحصلین عزیز نیز خواهشمندیم که در امور ذکر شده با ما و استادان محترم همکاری نمایند.

از وزارت محترم خارجه آلمان و مؤسسه DAAD (همکاری های اکادمیک آلمان) اظهار سپاس و امتنان مینماییم که تااکنون چاپ ۹۰ عنوان کتب طبی درسی را به عهده گرفته که از آن جمله پروسه چاپ ۵۰ عنوان آن جریان دارد. از پوهنځی طب پوهنتونماینز آلمان (Mainz/Germany) و استاد پوهنځی مذکور دوکتور زلمی توریال، Dieter Hampel و موسسه افغانیک نیز تشکر میکنیم که در امور اداری و تخنیکی چاپ کتب با ما همکاری نمودند.

بطور خاص از دفاتر جی آی زیت(GIZ) و CIM (Center for International Migration and Development) یا مرکز برای پناهنده گی بین المللی و انکشاف که برای من امکانات کاری را طی دو سال گذشته در افغانستان مهیا ساخته، است اظهار سپاس و امتنان مینمایم.

از دانشمند محترم پوهاند دوکتور عبیدالله عبید وزیر تحصیلات عالی، محترم پوهنوال محمد عثمان بابری معین علمی وزارت، محترم پوهندوی دوکتور گل حسن ولیزی معین اداری و مالی، روسای محترم پوهنتون ها ، پوهنځی های طب و استادان گرامی تشکر مینماییم که پروسه چاپ کتب درسی را تشویق وحمایت نمودند.

همچنان از همکاران محترم دفترهرکدام دوکتور محمد یوسف مبارک، عبدالمنیر رحمانزی، احمد فهیم حبیبی، سبحان الله و همت الله نیز تشکر مینمایم که در قسمت چاپ نمودن کتب همکاری نمودند.

داکتر یحیی وردک، وزارت تحصیلات عالی
کابل، نومبر سال ۲۰۱۲ م
نمبر تیلیفون دفتر: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰
ایمیل آدرس: wardak@afghanic.org
textbooks@afghanic.org

پیشگفتار

میتود های عنعنوی و مؤثر ریاضیات که در دهه اخیر به میان آمده اند، درین کورس انالیز ریاضی به شکل مطلوب و مناسب مطابق نیازمندی زمان به بررسی گرفته شده است، که عبارت از بیان شکل اکسیوماتیکی اعداد حقیقی میباشد. این فاصله زمانی امکان موفقیت های چشم گیر و کلی را نظر به ضرورت برای تغییرات اعداد در انالیز ریاضی مساعد ساخت، که میتوان به مثابه منطق روشنی برای ترتیب (ساختن) میتودهای قضایای اعداد حقیقی (مانند کسر های اعشاری بی نهایت، ساحه نمایش اعداد حقیقی و کلاس های معادل ترادف های اعداد ناطق میباشد)

روی هم رفته ضروری پنداشته میشود که بررسی مجموع اعداد حقیقی را در موجودیت اکسیوم انالیز ریاضی داخل ساخته که بدون آن به میان آوردن هر نوع ترتیب های آن هیچ نوع مشخصه (دلیل) منطقی ندارد. هر گاه بدون در نظرداشت مفاهیم فوق الذکر ترتیب آنرا در نظر بگیریم، مسئله اکسیومی اعداد حقیقی از هدف اساسی خارج میگردد. بناء مطالعه اعداد حقیقی به شکل اکسیوماتیکی در انالیز ریاضی در واقع مبنای این مدعا است. اساسا درین کورس میتود های کلی در نظر گرفته شده و حتی الامکان تمام مفاهیم ضروری را ابتدا برای مطالعه وبررسی حالات ساده و مختلف بقدر کافی مثالها در نظر گرفته شده و برای مطالعه بعدی مراحل ضروری آنرا به پیش میبریم. بطور مثال: مفهوم لیمت که ابتدا برای سلسله های عددی، بعدا برای توابع یک متحوله مفهوم لیمت درست ها، فضای اقلیدسی، لیمت، مجموعه انتیگرالی و بالآخره به مطالعه مفهوم لیمت در توپولوژی ختم میگردد.

فورمول تیلور قبلا برای قیمت توابع حقیقی بالای قطعه خط و در اخیر کورس برای نمایش نورم خطی فضا به کار گرفته شده است. بررسی معیار های عالم کوشی افاده چند حده

منجر به موجودیت لیمت معیار کوشی شده و موجودیت لیمت منجر به تحلیل نمایش کامل سیستم اندازه گیری فضا گردید. مطالعه سلسله های فوریه به بررسی سلسله های مثلثاتی کلاسیک آغاز گردید و مطالعه سلسله فوریه منجر به فضای هیلبرت در سیستم قایم ختم شد. خواص تابع شماری در قطعه خط به نمایش سیستم متری فشرده عمومیت بخشید و غیره.

قضایای ثبوت شده برای همیشه فورمولبندی نمیگردد، بلکه اکثرا برای استنتاج بهتر ماهیت سوالات مورد مطالعه قرار میگیرد. زیراکه ثبوت قضایا بدون ضیاع وقت و کلان شدن حجم کتاب، دیگر اهمیت ندارد و چنین نقطه نظرها به همین قسم منتقل و قبول شده اند. بطور مثال برای فراگیری حل مسایل لیمت باید تعریف و تیوری آن دقیق مطالعه گردد. ضرورت نیست در صورتیکه $x \to x_0$ نوشته شود که $x \neq 0$ باشد. و یا اینکه تابع منفصل حالت خاص تابع متمادی است. پس ضرورت به ثبوت آن در حل مسایل لازم نیست.

بخش عمده این کتاب انالیز ریاضی در برگیرنده موضوعات ذیل میباشد:

ترتیب تیوری برای هر موضوع به شکل ساده و عام فهم.

بعداً جهت بهتر روشن شدن موضوع مثالها برای شاگردان و علاقمندان در نظر گرفته شده است و نیز جهت مشق و تمرین دانش آموزان در اخیر هر موضوع تمرینات تحریر گردیده است. از این کتاب انالیز ریاضی محصلین انجینیری، اقتصاد و بالخصوص رشته های ریاضی و فزیک و اشخاص و افراد مسلکی و حرفوی نیز میتوانند جهت بلند بردن سطح دانش مسلک خویش استفاده نمایند.

موضوعات این کتاب مطابق به مفردات ریاضیات عالی پوهنتون های مسکو بوده و در انستتیوت های مسکو ازین کتاب انالیز ریاضی بطور وسیع استفاده میگردد و جزء پروگرام تدریس آن ها میباشد.

بخش اساسی این کتاب به موضوعات عمده انالیز ریاضی و خواص آن اختصاص داده شده است. آموختن این مواد میتواند بدون تکلیف بطور مستقلانه با استفاده از سوالات مخصوص ریاضی که در آینده برای حرفه های مخصوص خدماتی ضرورت میباشد مسایل با میتودهای اساسی و با بیان تیوری با دقت تمام درین کتاب حل گردیده است.

علاوه بر آن برای کارهای مستقلانه دانشجویان تمرینات و مسایل در نظر گرفته شده است . حل تمرینات بصورت کل برای فعالیت حفظ کردن انالیز ریاضی تا آنها را با زبان خود بیان نماید و در کتابچه یاداشت خود بطور جداگانه یادداشت نمایند و یکتعداد مسایل مشکل درینجا گنجانیده شده که فوراً حل آنها ضروری نمی باشد زیرا برای آموختن آنها وقت کافی به اساس تقسیم اوقات در نظر گرفته شود طوریکه معلوم است فاکت های ریاضی بطور واضیح و مفصل بیان گردیده و در محدوده حجم کتاب میباشد. بر علاوه آن تمرینات در هر پراگراف بطور جداگانه نمره گذاری شده و هر مسأله نمره گذاری شده ودر میان مسایل بطور روشن و ساده تحریر گردیده است.

این کتاب انالیز ریاضی به سطح دانشجویان کنج کاو و عام فهم بیان گریده سوالات این کتاب در چوکات پروگرام ریاضیات عالی برای دانشجویان فاکولته انجنیری و اقتصاد تهیه گردیده و برای رشته های اختصاصی ریاضی و فزیک که به شکل تخصص انالیز ریاضی را میخوانند. درین کتاب موضوعات توسط ستاره ها نشانی شده است. به این اساس این کتاب انالیز رياضي را میتوانند در مؤسسات تحصیلات عالی به سطوح و سویه های مختلف تدریس نمایند.

بخش قابل ملاحظه مواد جمع آوری شده درین کتاب در جریان سالهای متمادی از طرف مولف در انستیتوت فزیک- تخنیک در لیکچر های انالیز ریاضی تدریس گردیده است.

کتاب موجود ارائه محصول زحمات سه ساله مولف کورس انالیز ریاضی 2 کتب عالی 1989-1988 میباشد. مؤلف عمیق ترین و صمیمانه ترین تشکرات خویش را از جانب خود به مجموعه خود و به اعضای علمی ریاضیات عالی دانشمندان بلند پایه هریک: س. م. نکالسوف، ب. س. ولادیمیروف، و. ب. ویسوف، س. ا. تیلیاسکوفسکی و. گ. ن. یاکولیف ابراز میدارد. و از دانشمندان بزرگوار هریک: ن. و. ایفیموف، و. ا. یسلینه که بدون شک مواد مفصل و با کیفیت جهت بهتر شدن کتاب همکاری نموده ابراز سپاس میکنم.

مؤلف نیز رضایتمندی و قدردانی خویش را از اعضای محترم کافدراي ریاضیات عالی پوهنتون مسکو و از استادان محترم انستیتیوت فزیک تخنیکی هری: ک. ل. کوتاسوف، و. ل. خارکوف، س. م. بژنوف، و. عی. چخلوکوف، ف. گ. پولایفسکی، ی. ا. وراچینسکه که مشوره های بسیار سودمند و مفید را که در غنامندی متن کتاب مؤثر واقع گردیده است ابراز شکران و امتنان می نمایم. در اخیر مؤلف تشکرات عمیق خود را نسبت به کلکتیف تقریظ دهندگان و از آمر کافدرای ریاضیات عالی پوهنتون لامنوسوف پروفیسور ب. س. ولادیمیروف به خاطر مطالعه و بررسی دقیق و همه جانبه این کتاب ابراز میدارد.

پیشگفتار مترجم

طوریکه واضح است.کمبود کتب درسی مورد نیاز، بخصوص در عرصه ریاضیات همواره بحیث یک مشکل قابل توجه در تمام واحد های تحصیلی مطرح بوده بنده بتأسی از همین اندیشه و خواست طی سالهای تدریس انالیز ریاضی در پوهنحی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ در فکر تهیه کتاب درسی که بتواند جوابگوی نیاز های مبرم محصلان رشته اختصاصی ریاضی باشد، بوده ام خوشبختانه دیپارتمنت ریاضیات با تشخیص این مشکل به بنده وظیفه سپرد تا کتاب درسی تحت عنوان انالیز ریاضی جلد اول قسمت اول اثر دانشمند بلند پایه ل. د. کود ریا حیف را که شامل 10 § و 313 صفحه بوده که طبع و نشر وزارت تحصیلات عالی فدراتیف روسیه سال 2006 مسکو میباشد که داری مفاهیم بکروتازه است ترجمه نمایم.

چون کتاب متذکره در مطابقت با مفردات و پروگرام درسی صنوف دوم سمستر سوم ریاضی قرار دارد؛ بناء بنده با وجود همه نا رسائی های علمی و تا جای که دانش مسلکی ام صلاحیت میداد، به قصد و نیت انجام این وظیفه علمی به یاری و استعانت خداوند(ج) توانا و دادگر،با حسن امانت داری و دقت تام این وظیفه مهم را انجام نموده ام.امیدوارم تا این کارکردبند ه بحیث یک گام علمی مورد قبول دانش دوستان و مسؤلین امور واقع گردد. مسلما این کتاب ارزشمند منبع و مأخذ مطمئن برای تمام علاقمندان عرصه ریاضیات و سایرین خواهد بود.

اینجانب با کمال احترام از پوهاند عبدالحق «ایمل» وپوهاند دکتورسید قیوم شاه «باور» استادان پوهنحی ساینس پوهنتون کابل وعموم دانشمندان، اساتید محترم و بالخصوص از پوهنتون بلخ که بامن دراین زمینه همکاری نموده اند، ابراز سپاس و قدردانی می نمایم و نیز از خوانندگان گرانمایه متمنی است تا با ایرادها و انتقادات سودمند بنده را منت گذاشته ممنون سازند.

با احترام

پوهنمل سید یوسف "مانووال"

تقریظ

برای همه هویدا است که انالیز ریاضی یک بخش مهم علم ریاضی بوده و در زندگی روزمره در مسایل پیشرفت تخنیک، اقتصاد و علوم طبیعی رول با ارزش را بازی می کند. کتاب هذا تحت عنوان انالیز ریاضی I که توسط پوهنمل سید یوسف مانووال ترجمه شده از آثار معتبر در عرصه انالیز معاصر بشمار می رود. مولف کتاب هذا پروفیسور .ل.د. کودریاخیف بوده که در سال 2006 از طرف وزارت تحصیلات عالی فدراتیف روسیه طبع و نشر گردیده است. در این کتاب مطالب جدیدی نسبت به کتب دیگری انالیز ریاضی که قبلاً نشر گردیده گنجانیده شده که از هر نگاه برای علاقمندان انالیز ریاضی مفید است.

مترجم با کمال دقت و امانت داری متن روسی کتاب مذکور را ترجمه نموده و متون بدون سکتگی و با تسلسل منطقی و ادبی تنظیم گردیده است. طرز نگارش معیاری بوده و بدون غلطی املائی و مسلکی می باشد. اینجانب با آنکه زحمات پوهنمل سید یوسف مانووال استاد دیپارتمنت ریاضیات پوهنځی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ را قابل قدر و با ارزش ارزیابی می نمایم و منحیث تقریظ دهنده ترجمه این اثر با ارزش را در غنامندی و تهیه کتب انالیز ریاضی و مواد درسی گام خیلی ها مثبت تلقی نموده و مطالعه آنرا نه تنها برای محصلان صنف دوم سمستر سوم رشته اختصاصی ریاضی و فزیک ضروری میدانم بلکه برای آنانکه با آنالیز ریاضی سروکار دارند لازم و مفید میدانم . من در حالیکه ترجمه هذا را تائید می نمایم برای موصوف کامیابی های شایان در امر خدمت گذاری در راه تربیه اولاد وطن خواهانم و امیدواریم تا این فعالیت علمی موصوف در ترفیع علمی شان از رتبه علمی پوهنمل به رتبه علمی پوهندوی مورد قبول واقع گردد. و چاپ و نشر آن مفید و سهولت های مزیدی را فراهم خواهد نمود.

با احترام

پوهنوال دوکتور محمد انور "غوری"

استاد پوهنځی ساینس پوهنتون کابل

تقریظ

ترجمه کتاب انالیز ریاضی توسط پوهنمل سید یوسف مانووال در عرصه ریاضیات کار مهم و قابل تمجید میباشد. کتاب ترجمه شده اثر علمی پروفیسور ل.د. کودریاشیف که در سال 2006 از طرف وزارت تحصیلات فدراتیف روسیه طبع و نشر گردیده است یک اثر مفید، نخبه و خیلی معتبر در عرصه های انالیز ریاضی میباشد. کتاب ترجمه شده دارای (   ) صفحه و 9 بخش میباشد که ترجمه آن با کمال دقت و امانت داری مطابق متن روسی آن صورت گرفته است. مترجم اهتمام و کوشش به خرچ داده است تا مطالب را به زبان سلیس و فصیح ریاضی بیان و حین ترجمه قواعد و موازین لسانی و میتودیکی را رعایت نموده که چاپ و نشر آن مفید بوده و سهولت های مزیدی را فراهم خواهد ساخت. مطالعه این اثر نه تنها برای صنوف دوم سمستر سوم ریاضی و استادان مفید می دانم بلکه آنانکه به انالیز ریاضی سر و کار دارند توصیه می نمایم. اینجانب منحیث استاد رهنما صحت ترجمه را تصدیق نموده زحمت کشی و فعالیت علمی ترجمه را در ترجمه کتاب مذکور به دیده قدر نگریسته و برای محترم پوهنمل سید یوسف مانووال طول عمر با سعادت در راه خدمات بیشتر فرهنگی به وطن و جامعه از بارگاه ایزد متعال استدعا نموده و این کارکرد علمی را برای ترفیع علمی موصوف از رتبه علمی پوهنمل به ره تبه علمی پوهندوی کافی می شمارم.

با احترام

پوهاند عبدالحق "ایمل"

استاد پوهنځی ساینس پوهنتون کابل

تقریظ

تا جائیکه محسوس است تالیف و ترجمه کتب درسی مورد نیاز بویژه در بخش ریاضیات یکی از وظایف مبرم در استقامت فعالیت علمی استادان در واحد های تحصیلی کشور بشمار میآید، زیرا مسلما" با ترجمه یا تألیف یک عنوان کتاب یک درِ جدید از دانش و علوم به روی دانش آموزان و طالبان علم و دانش مفتوح می گردد. دیپارتمنت ریاضیات پوهنځی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ به اساس لزوم دید و ضرورت مبرم دیپارتمنت ریاضیات برای محترم پوهنمل سید یوسف مانووال عضو دیپارتمنت متذکره وظیفه سپرد تا از کتاب انالیز ریاضی I قسمت اول را به ترجمه بگیرد که حاوی 303 صفحه و 9 بخش میباشد. کتاب ترجمه شده از آثار معتبر در عرصه انالیز ریاضی به شمار می رود. مترجم با کمال دقت و امانت داری ترجمه کتاب مذکور را انجام داده و متون بدون سکتگی بوده و با تسلسل منطقی وادبی تنظیم گردیده است. با در نظر داشت خصوصیات فوق الذکر مطالعه ترجمه این کتاب را برای محصلان رشته ریاضی و فزیک موئسسات تحصیلات عالی کشور، استادان و محصلان و استادان همین رشته ها مفید می دانم.

اینجانب با آنکه زحمات پوهنمل سید یوسف مانووال استاد دیپارتمنت ریاضیات را قابل قدر و با ارزش ارزیابی می نمایم، برای موصوف موفقیت مزید را در امر خدمت گذاری در راه تربیه اولاد وطن خواهانم. و این فعالیت علمی موصوف در ترفیع علمی شان از رتبه علمی علمی پوهنمل به رتبه علمی پوهندوی کافی میدانم.

با احترام

پوهاند دوکتور سید قیوم شاه "باور"

استاد پوهنځی ساینس پوهنتون کابل

فهرست مطالب

عناوین صفحه

عناوین صفحه

عناوین صفحه

عناوین صفحه

مقدمه

هیچ تحقیق انسانی نمیتواند حقیقت علمی نامیده شود، تا آنکه با شیوه و اصول ریاضی اثبات نشده باشد. هیچ نوع مؤثقیت در علوم نیست، تا در آن حق اولیت به علم ریاضی داده نشده باشد.و با ریاضی رابطه نداشته باشد.[1]

ریاضی[2] عبارت از یک علم دقیق و کاملا مجرد بوده، عواملی که مبنای ریاضیات را تشکیل می دهند عبارت از: منطق، تحلیل، سازگاری و استدلال میباشد و ریاضی بر مبناي منطق و استدلال استوار است. هر ساختار ریاضی، الجبر، توپولوژی و احتمالات، دارای خصوصیات جداگانه میباشد. آموختن ریاضیات یک آموزش اتفاقی نیست، بلکه بر اساس یک سلسله کار های دقیقا علمی و تنظیم شده انجام می شود. چون ریاضیات بیشتر سرشت تجمعی دارد، یعنی هر مفهوم از مفاهیم قبلی بهره می گیرد، در تحقیقات ریاضی تفکر منطقی کار اساسی میباشد. یعنی میتود های اساسی در تحقیقات ریاضی عبارت از تفکر منطقی میباشد.

ادراک از منشأ طبیعی و رشد تکاملی ایده های اساسی ریاضیات، نگارشی منطقی و رابطه ای سالم بین استدلال صحیح، تعریف های دقیق و فهم روشن فرضیات اساسی، درک نقش ریاضیات به عنوان یکی از شاخه های تلاش انسان و ارتباط آن با سایر شاخه های معرفت بشر لازم و ضروری میباشد. زیراکه رازهای در ریاضیات هست که بیشتر از هر چیز دیگر انسان را در فشار قرار می دهد. بدیهی است که ابداعات ریاضی صرفاً محصولات تخیلات دلخواه ریاضیدانان نیست، بلکه وابسته به رابطه طبیعی و حقیقی میباشد. شخصی که می خواهد ریاضیات

[1] لوی ناردو. داوینچی. اثر منتخب علوم طبیعی که در سال 1955 طبع شده.

[2] از کلمه لاتینی ماتیما($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$) گرفته شده و به معنای علم شناسی است.

را بفهمد، باید این دید اصلی را داشته باشد که ریاضیات بر خلاف علوم دیگر، مستقیما با اشیای مادی که ما آنها را میتوانیم احساس کنیم، بچشم ببینیم و بشنویم سروکار ندارد.

ریاضیات آن مفاهیمی هستند که در ذهن ما بوده و به صورت اشیای مادی وجود خارجی ندارند. موجودات ریاضی از قبیل نقطه، سطح و اعداد میباشند که: خود اشیای مادی نیستند، بلکه تصوراتی هستند از اشیای خارجی. پس تجرید ریاضی به این معنی که اهداف این علم مادی نبوده، بلکه مفاهیم منطقی و رابطه بین آنها میباشد. که یکی از مهم ترین مفاهیم آن رابطه و عمل متقابل بین آنها میباشد که توسط رابطه مفاهیم مادی میتواند مودل ریاضی را ترتیب و مطالعه نمود. و با به وجود آوردن چنین مودل ریاضی میتوان مودلهای جدید دیگری ریاضی را که دارای خواص مشابه اند بوجود آورد، تا بتوانند ریاضیات تأثرات حقیقی خویش را بیان نماید. زیرا که برای ریاضی مطالعه مفاهیم طبیعت آنقدر مهم نیست، بلکه نسبت و رابطه بین آنها مهم به نظر میرسد. ترتیب مودل ریاضی از وضعیت فیزیکی مورد نظر به دست می آید.

این مودل ممکن است یک معادله خطی یا برخی دیگر از عبارات ریاضی باشد، که مودل بدست آمده به کمک روشهای ریاضی موجب میشود که جواب مسأله داده شده به صورت ریاضی تعیین شود. تحقیقات میتود های ریاضی همیشه در حالت جریان و تحرک بوده و این تحرک و جریان همیشه بطور وسیع ادامه دارد و رول بزرگ آن در دانش علوم طبیعی میباشد. میتود های ریاضی انجام و پایان ندارد، بلکه به طور وسیع ادامه دارد.

درین میتودها، میتودهای جدید بروز میکند و به بخش های جدید منقسم میشود و انکشاف متوازن راضی با استفاده از آن میباشد و تأثیر گذار بالای انکشاف دیگر علوم و تخنیک در ماحول خود میباشد. افزایش مسایل پراکتیکی در اساس علوم دیگر تجربی، به ریاضیات جهت های جدید

را میدهد و باعث جهت دادن این یا آن تحقیق ریاضی میشود. و امکانات وسیعی استفاده میتود های ریاضی را میدهد. به این علت استفاده ریاضی بطور تدریجی انکشاف میکند.

درین اواخر به کمک تأثرات ماشین های محاسبوی سریع با استفاده میتود های ریاضی تحرک کمی و کیفی به میان آمده است. از این میتود ها نه تنها درین عرصه، بلکه در میخانیک و فزیک نیز مورد استفاده قرار میگیرد. درین عرصه دانش انسان برعلاوه در ریاضی، در دیگر علوم نیز مورد استفاده میباشد مانند طب ، اقتصاد و سوسیالوژي ، همین قسم موجودیت دستگاه های ریاضیکی میتودها و مفاهیم جدید ریاضی را برای طراحی و مطالعه تأثرات آن به بررسی گرفته میشود. پس تمام آن چیزهای که هست در ساختار علم ریاضی معمول میباشد.

امروز در تمام علوم طبیعی، ریاضی سرلوحه آن دانسته میشود. کارمندان و یا انجینیران به مثابه استفاده کنندگان گذشته از میتود های جدید ریاضی در تحقیقات روزمره بطور وسیع از آن در اجرای امور خویش استفاده می نمایند. برای اینکه امکانات استفاده موفقانه ازین و یا آن میتود ریاضی در حل سوالات داشته باشیم، لازم است تا قبل از همه دانش درست با سیستم ریاضیکی را ملاک عمل خویش قرار دهیم.

قرار گرفتن استفاده از حدود مجازی بررسی میتودهای ریاضی که آن یکی از مهم ترین خصوصیت و قابلیت حل مسایل در میتود ریاضی بشمار میرود، که به صورت عموم به کمک و همکاری ریاضی انجام پذیر میباشد. پس این یک حقیقت درست برای ترتیبات حل مسایل متذکره محسوب میشود.

تحلیل، تجربه و انتخاب طریقه برای حل آنها ایجاب یک دستورالعمل بسیار دقیق می نماید تا با درک عمیق و فکر عالی نتیجه را بدست آوریم. و قبل ازینکه مسأله را حل نماییم، منتظر به نتیجه مثبت آن میباشیم. یکی ازین درک عمیق، زمان استفاده و انتقال تفکر سریع میباشد. درک

عمیق در ریاضی مقام اول را دارد. گرچه همه مهم است، ولی منسجم شدن فکر و هوش از یک طرف احساس آرامش و امیدواری را به بار می آورد و از طرف دیگر با راحتی میتوان نتیجه خوبی که از آن توقع داشته باشیم بدست می آوریم.

درینجا استفاده از فارمولها، ثبوت فرضیه های ریاضی، سمبولهای مختلف اعداد و غیره نیز نقش خاصی را درین عرصه بازی میکنند، ثبوت فرضیه ها و انتخاب میتود درست برای حل مسایل، کامیابی بیشتر را نصیب می گرداند. بر علاوه این کار سبب میشود تا معلومات مفید در مضمون مورد مطالعه کسب گردد. زیراکه سیستم ریاضی بسیار مطالب سرپوشیده دارد و یک سرمایه سرپوشیده میباشد، که با حفر کردن با گذشت قرن ها ازین سرمایه سرپوشیده توسط فارمولها که عقل آنرا نشان میدهد و به پیمانه وسیع که اضافه از تصور خواهد بود استفاده صورت خواهد گرفت.

نتایج نشان میدهد که در ریاضی فاکت ها و عوامل بطور عادلانه بررسی و ثبوت میگردد. و ثبوت مثالها به شکل تجربی و تطبیقات در ریاضی مشکل بوده و از قانونمندی و فارمولهای ریاضی در آن استفاده میشود. زیراکه حل مثالهای تجربی نقش مهم در تحقیقات ریاضی دارد.

درین اواخر انکشاف سریع تخنیک، رشد قابل ملاحظه و چشم گیری در مفاهیمی ریاضی، علوم تجربی و تحقیقات علمی صورت گرفته است. درینجا واقعا امکانات جدید و به خصوص افق ریاضی را بدون قید وشرط باز نموده و تمام نقشه ها و خیالها را به حقیقت مبدل ساخت. تمام این وقایع و پیشرفت های بزرگ همزمان به وقوع نه پیوسته، بلکه با گذشت زمان و به تعمق فکر و ذهن انسان تدریجاً صورت گرفته وبا گذشت زمان همیشه بین شان روابط وعمل متقابل در تمام پروسه ها موجود بوده است.

هیچ گاهی چنین واقع نشده که هر تجربه باید نتیجه مثبت بدهد، ولی برای آزمایش و تفکر راه گشا می باشد که برای ریاضی تنها ثبوت، تأیید تجارب و نتایج مشهود و پرمعنی تا به تغییرات منطقی قابل اهمیت میباشد. مثالها، تیوریها و حالات مختلفی که میتوانند شکل فورمول بندی را انجام دهند مجرد است، ولی بازهم نشان دهندۀ موجودیت تأثیرات ریاضی در همه آنها محسوس میباشد.

نتایج نهائی که در ریاضی نوشته شده، آن عبارت از منطق تجرید و مودلهای ریاضی میباشد که دارای اهداف مشخص و خواص مطلق بوده و تحقیقات آن نظر به انکشاف دانش تغییر ناپذیر است. بطور مثال دوهزار سال قبل تصورات ما در ماحول جهان در سمت دهی و قانونمندی آنها تغییرات زیادی بوجود آمده، ولی قضیه فیثاغورث به حال خود باقی مانده است. این به آن معنی نیست که با گذشت انکشافات تاریخی بسیار مفاهیم ریاضی و ثبوت ها فوراً اختراع گردیده و اختراعات دیگر قطع میگردد. نه هرگز نه، بلکه مراحل انکشافات ریاضی از نقطه نظر های مختلف پیوسته به گذشته به اهداف مورد نظر خود نایل میگردد که سرپوشی از خاصیت های جدید ریاضی را باز میگرداند و محتویات جدید آنرا مورد مطالعه قرار میدهد و همیشه تصورات ما راجع به ماهیت و اهمیت آن تغییر ناپذیر میباشد. استفاده از ریاضی برای نوشتن کدام اثر در مطابقت به مفاهیم ریاضی نظر به خصوصیت میتود تحقیق شده صورت میگیرد. مثل قاعده برای رفع خطا ها در تحقیقات ضروری میباشد، که برای چنین تصورات از مفاهیم ریاضی استفاده صورت میگیرد. درین حالت میتوان دقیقا به درست بودن استنتاج آن متیقن شد.

برای اینکه اگر خواسته باشیم ریاضی را به مثابه میتود تحقیقاتی مبدل بسازیم مشکل است. برای این کار لازم است تا ماهیت روابط وعمل متقابل و نظریات اساسی مفاهیم ریاضی را نزد خود دقیقا واضح و روشن ساخته، بعدا عملیات تحقیقاتی مورد نظر خویش را به یاری ریاضی

بررسی نماییم. نه به شکل سطحی و تفکر ظاهری. تسلط آزاد بالای میتود های ریاضی بالاثر دانش عمیق و به شکل سیستماتیک در نتیجه کار های طولانی و تدریس زیاد ریاضی صورت میگیرد.

کسی میتواند تسلط آزاد داشته باشد که همیشه سروکار به حل مسایل، مطالعه کتب ریاضیات و باسیستم های ریاضی کاملا بلدیت داشته باشد و به اصطلاح همیشه افزار گوشکی آن در دست داشته باشد، تغییرات فوری از یک سیستم به به سیستم دیگر، و یا انتخاب یک عده میتودهای بغرنج و پیچیده که از آن به مشکل میتوان مفهوم گرفت درین صورت مشکلات زیاد و چشمگیری بار می آید و یا مقدمه چنین مختصر به عوض مقدمه چنین طولانی که نمیتواند مفاهیم ریاضی را به درستی بیان نماید، در حل مسایل مشکلات را وارد میسازد. طریقه و میتود بهتر در عملیه فراگیری ریاضی آن است که تا مشکلات ذکر شده را به میان نه آورند.

میتود خوب آن میتودی است که تا در اول قضایا و فورمولها را بطور واضح و ساده بیان نماید و روابط آن را با معلومات گذشته پیوند دهد و شکل طبیعی را داشته باشد. این کار بصورت عموم آنقدر ساده نیست و ضرورت به حد کافی با تطبیق مهارت های مسلکی و قبل از همه با تجارب غنی آموزگار بوده که چگونه میتواند پروسه درسی را تشکیل دهد. و ازین تنگنای پر خم و پیچ موفقانه برآید و کشتی مقصود خویش را به هدف برسانند. مشکل است تا رول بزرگ انالیز ریاضی را در چند سال جداگانه بشکل تیوری و یا ثبوت ها نمایش دهیم؛ زیرا انالیز ریاضی به قدر کافی با کلتور خوبی دارد و به آشنایی کامل فرضیه، ثبوت ها و فورمول بندیها و تطبیقات آنها آگاه میسازد و هیچ وقت در یک محدوده سردرگم حرکت نمیکند. خواندن ریاضی بطور مستقیم و یا غیر مستقیم در بلند بردن سطح دانش منطقی شخص رول مهم را بازی میکد. موقف و دانش او را نظر به تحولات زمانی بالا میبرد.

خواندن ریاضی کامیابی های غیر مترقبه را به بار می آورد، که تأثیر گذار بالای شخصیت و ماهیت کار آن میباشد. فراگیری ریاضی راه های جدیدی برای خوشبختی و همکاریهای جهانشمول را به بار می آورد. واین مشکل است تا تماما ً کامیابیهای ریاضی و موفقیت های در همه عرصه ها، که این عمل از حوصله این رساله خارج میباشد، بدست آورد. درینجا برای آنانکیه مصروف خواندن و یا تحقیقات ریاضی اند در صفحات بعدي یاد آوری گردیده است .

محاسبه دیفرانسیال توابع یك متحوله

1 § . ست ها و توابع ، سمبول های منطقی

1.1 ست ها . عملیه ها بالاي ست ها

ست ها اساس و مفاهیم اولیه ریاضی میباشند . هریک از اشیائی متشکله ست را یک عنصر یا عضو ست مینامند .

معمولاً ست ها را با حروف بزرگ لاتین و یا دیگر حروف مانند A, B, C یا X, Y, Z و غیره نشان میدهد .

و عناصر ست را با حروف کوچک مانند $a, b, c, x, y...$ نشان میدهند .

هرگاه a عنصر از ست A باشد مینویسند : $a \in A$

و میخوانند (a عنصری از ست A است) . اگر a عنصري از ست A نباشد چنین مینویسند $a \notin A$ و میخوانند (a عنصری از ست A نیست) .

ست A و B را مساوی گویند اگر هر دوی آن ها دارای عین عناصر باشند و مینویسند که $A = B$. به بیان دیگر دو ست را زمانی مساوی گویند که عناصر یک ست در ست دیگر شامل باشد .

یک ست را میتوان به حروف مختلف مانند A و B نشان داد وچنین نوشت $A = \{a, b, c, ...\}$ ، که ست A از عناصر a, b, c تشکیل شده است و امکان دارد که ست به همین و یا کدام طریقه دیگر نیز ارائه گردد .

هرگاه ست A از عناصر a_α تشکیل شده باشد در حالیکه α اندکس تعداد ست های u گفته شود . پس میتوان چنین نوشت $A=\{a_\alpha\}$ و یا به صورت واضح $A=\{a_\alpha\}, a\in u$ نوشت. یا هرگاه نتوانیم آنرا به حافظه بسپاریم ، پس بطور ساده مینویسیم $A=\{a\}$ نوشت و تکرار و یا تبدیل عناصر ست، ست جدید را تشکیل نمیدهد . هرگاه ست A متشکل از تمام عناصر مشخص کننده با خصوصیت یک ست باشد پس میتوان چنین نوشت :

$$A=\{a:\cdots\}$$

در حالیکه (:) نقطه بعد از حرف که در داخل قوس موجود است نشان دهنده خصوصیت عناصر ست A میباشد .

مثال : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد. طوري که $a\le b$ ، انتروال بسته $[a,b]$ نشان دهنده تمام اعداد حقیقی x است طوری که $a\le x\le b$ ، پس به اساس تعریف چنین ست را میتوان توسط سمبولها طور ذیل ارائه کرد:

$$[a,b]=\{x:a\le x\le b\}$$

یعنی x ست اعداد حقیقی است :

ست خالی :

برای مشخص کردن مفهوم ست خالی، ستي را که دارای هیچ عنصر نباشد ست خالی گفته میشود و توسط علامه $\varnothing$ نشان میدهند .

به اساس تعریف ، ست خالی دارای هیچ عنصر نبوده ولی ست محسوب میشود.

ست فرعی :

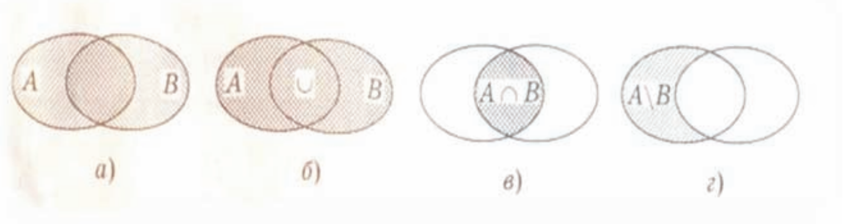
هرگاه تمام عناصر ست A شامل ست B باشد ست A ست فرعی از ست B گفته میشود و مینویسیم : $A \subset B$ (A ست فرعی از B است میخواند

تمرین 1 : ثبوت کنید که اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد، پس $A = B$ است .

اتحاد دو ست :

هرگاه دو ست A و B مطابق(شکل $1,a$) داده شده باشد اتحاد دو ست حقیقی A و B را با $A \cup B$ نشان میدهند . اتحاد دو ست A و B عبارت از ست است که تمام عناصرش شامل ست A و(شکل $1,b$) ست B باشد .

در شکل ست A و B مطابق (شکل $1,b$) اتحاد ست های A , B ست است که هر عنصر آن شامل ست A و یا شامل ست B باشد ، اتحاد ست کیفی A با ست خالي سلويست به خود A يعني $A \cup \varnothing = A$ و ست A ست فرعی خودش است .



تقاطع ست ها :

تقاطع دو ست A و B ست است که عناصرش در هردو ست شامل باشند . و تقاطع دو ست A و B را به $A \cap B$ نشان داده و میخوانیم که ست A با ست B تقاطع نموده است .

اگر ست A و B عنصر مشترک نداشته باشند (و یا قسماً از آنها و یا هر دو خالی باشند) پس $A \cap B = \varnothing$ درین ست ها A و B بنام ست های غیرمتقاطع یاد میشود . خاطر نشان میسازیم که ست خالی باخود یکدیگرراقطع مینماید و مینویسیم .

$$\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

تفاضل دو ست :

توسط $A \setminus B$ تقاضل دوست Aو B نشان داده میشودعبارت از ست است که عناصرش در A شامل باشد ولی در B شامل نباشد مطابق شکل $(1,d)$ و میگویند $A - B$ از تفریق نمودن B از A بدست میآید .

هرگاه $B \subset A$ باشد پس تفاضل $A \setminus B$ عبارت از مکمله ست Bتا ست A میباشد و یا مکمله B درA است بنابر تعریف داریم : $A \setminus A = \varnothing$

تمرین 2 : ثابت کنید که : $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ است .

اگر سیستم ست های A_α داده شده باشد (اصطلاحات ست) سیستم ، مجموع ، کلاس میتوان منحیث هم نام استفاده نمود و دراینجا α مجموع تمام اندکس های u را ارئه میکنند اتحادتمام A_α رابه $\bigcup_{\alpha \in u}$ نشان داده وآن ست است که هرعنصر آن مربوط به A_α میباشدیعنی شرط $x \in \bigcup_{\alpha \in u}$ معادل است به $\alpha \in u$ موجوداست که $x \in A_\alpha$ تقاطع تمام ست های A_α ، $a \in u$ به ستی نام داده میشود که به $\bigcap_{\alpha \in u} A_\alpha$ نشان داده شده وهرعنصران به تمام ست های A_α مربوط می شود یعنی $x \in \bigcap_{\alpha \in u} A_\alpha$ نشان میدهد که برا ی تمام $\alpha \in u$ صدق

کند $x \in A_\alpha$ برای تمام ست ها ی $\{A_\alpha\}$ ، $A_\alpha \subset X$ ، $\alpha \in u$برای هر ست X روابط ذیل صدق میکند.

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in u} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in u} (x \setminus A_\alpha) ...(1.1)$$
$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in u} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in u} (x \setminus A_\alpha) ...(1.2)$$

بطورمثـال رابطـه $(1,1)$ راثبـوت نمـایم $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in u} A_\alpha$ را داشـتـه باشـیم ، پـس بـه اسـاس تعریف تفاضل ست ها داریم که $x \notin X \setminus \bigcup_{\alpha \in u} A_\alpha$, $x \in X$ به نوبت خود مطـابق بـه تعریـف اتحـاد ست هـا معـادل است بـه این کـه $x \in X$ و بـرای تمـام $\alpha \in u$ رابطـه $x \notin A_\alpha$ صـدق مینماید.

همین قسم به اساس تعریف تفاضل ست ها و معادل است براي تمام $\alpha \in \upsilon$ است داریم که . $x \in X \setminus A_\alpha$ بالاخره بیان اخری که به اساس تعریف تقاطع ست ها به این معني است که $x \in \bigcap_{\alpha \in \upsilon} (X \setminus A_\alpha)$ و همین قسم شرایط $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in \upsilon} A_\alpha$ و $x \in \bigcap_{\alpha \in \upsilon} (x \setminus A_\alpha)$ معادل است . قسمیکه دیده میشود مساوات (1.2) با مساوات (1.1) بصورت مشابه ثبوت میشود . مشابهت دارد بیانیه مشابه رامیتوان برای ست های اختیاری A,B,Cرابه اثبات رسانید

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

در بخش 1.2 مفهوم تابع بررسي میگردد و در بخش 1.3 بـه ست هـاي متنـاهي و تـرادف هـا معلومات ارائه خواهند شد کـه در آنجـا بخش هـا و پراگراف هـا بـه ستاره نشـاني شده است . نظر به تقاضاي این کورس خواننده میتواند اول از پراگراف هاي بـدون ستاره و بعداً نظر بـه ضرورت میتواند از پراگراف هاي ستاره دار استفاده نمایند تا به مطلب خویش نایل گردد .

2-1 توابع :

میتوان گفت که تعداد عناصر درست A مساوی به یک است هرگاه درآن عنصر $a \in A$ موجود بوده ودیگرعنصر نداشته باشد (به عبارت دیگر میگوئیم هرگاه از ست A این عنصر را حذف نمایم پس ست خالی بدست میآید) ست A بنام ست دو عنصره یاد میشود هرگاه بعد از طرح تنها یک عنصر ما تنها $a \in A$ داشته باشیم پس ست عددی عناصر مساوی به یک است . به آسانی میتوان متیقن شد که تعریف مربوط به انتخاب عنصر نشان دهنده ست نیست طوریکه $a \in A$ باشد . همین طور هرگاه $a \in A$ و $b \in A$ باشد طوریکه تفاضل $A \setminus \{a\}$ و از یک عنصر b متشکل باشد و تفاضل ست $A \setminus \{b\}$ همین قسم از یک عنصر a متشکل باشد یعنی از عنصر a است .

فرض میکنیم که ست $X = \{x\}$ و $Y = \{y\}$ ست که از دو عنصر تشکیل شده باشد طوریکه $x \in X$ و $y \in Y$ باشد (x, y) بنام عناصر جفت مرتب ست عناصر y, x یاعنصر x بنام عنصر اول جفت مرتب $\{x, \{x, y\}\}$ یاد شده وعنصر y بنام عنصر دوم یا د می شود.جفت مرتب $\{x, \{x, y\}\}$ توسط (x, y) نشان داده میشود درآیند ه تحت نام جفت معمولا جفت مرتب یاد میشودست تمام جفت مرتب (x, y) طوریکه $x \in X$ و $y \in Y$ باشد بنام حاصل ضرب ست X و Y یاد شده وتوسط $X\text{x}Y$ ارایه میشود. به این ترتیب فرض میشود که ست X از ست Y مختلف باشد یعنی امکان داردکه حالت $X = Y$ هم باشد .

تعریف 1 : همه ست های تابع $f=\{(x,y)\}$ جوره هاي مرتب (x,y) بوده طوریکه

$x\in X$ و $y\in Y$ باشدطوریکه برای هر جوره مرتب یعنی $f\ni(x',y')$ و

$(x'',y'')\in f$ است و یابنام تابع یا مپنگ $x'\neq x''$ که نتیجه شود $y'\neq y''$ از شرط

یاد میشود . درسلسله اصطلاح «تابع »ومیپنگ درتعریف فوق اصطلا ح

«transformation» یا مورفیزم« morohism » «وارتباط هم استعمال دارد.

تابع را میتوان به حروف f,g,F,G,ϕ,ψ......... و غیره ارائه نمود .

ست عناصر اول جوره مرتب را ناحیه تعریف تابع یاد کرده و به حرف X_f نشان میدهد . و

ست عناصردوم جوره مرتب را بنام ست قیمت های تابع یاد کرده و به حروف Y_f نشان

میدهد.واضح است که ناحیه تعریف ست فرعی $X_f\subset X$ و برد $Y_f\subset Y$ است وخود ست

جفت های مرتب تابع $f=\{(x,y)\}$ مانند ست فرعی $X\times Y$ درنظرگرفته شده وبنام

گراف تابع f یاد میشود.

و عنصر $x\in X_f$ عبارت از ارگومنت (متحول)تابع یا متحول مستقل تابع f و عنصر

$y\in Y$ متحول وابسته به x میباشد.

هرگاه ست تابع $f=\{(x,y)\}$ (تابع (میپنگ)) باشد درآن صورت گویند که تابع f ست

x_f رابه ست Y نقش میکند .درحالت $X=X_f$ تنها $f:X\to Y$ مینویسند.

هرگاه $F:X\to Y$ یک تابع باشدیعنی ست تمام جوره های مرتب

$f=\{(x,y)\}$, $x\in X$, $y\in Y$ که شرایط تعریف 1 را صدق نمایدو $(x,y)\in f$ باشد

پس آنرا به شکل $y=f(x)$ مینویسند

بعضاً $y=f\left(x\right)$ یا $F:x\to y$ مینویسند و میگویندکه تابع f عنصر x رابه عنصر y ارتباط میدهد.

((میپنگ f عنصر X رابه عنصر Y نقش میکند))

و یا به همین ترتیب عنصر y در ارتباط به عنصر x میباشد .

برای جفت مرتب (x,y) طوریکه $y=f(x)$ است نیز گویند که y قیمت تابع $f(x)$ درنقطه x است واین همان مفهومی است که گویند که y تصویر x میپنگ f است .

درارتباط با سمبول $f(x_0)$ برای ارایه قیمت تابع f درنقطه x_0 این ارایه ارنیز کارمیبرند

$$f\left(x\right)\Big|_{x=x_0}$$

بعضاً تابع f را توسط سمبول $f\left(x\right)$ نشان میدهند ، افاده نمودن تابع به شکل $F:x\to y$ و قیمت آن درنقطه $x\in X$ به عین سمبول $f\left(x\right)$ ارائه میشود ، که این قسم ارائه نمودن ، دقیق و عام فهم میباشد .

افاده نمودن $f\left(x\right)$ نظربه افاده نمودن $F:X\to Y$ مناسب ترایت بطور مثال :

$f\left(x\right)=x^2$ مناسب تر است زیرا که درارایه تحلیلی $F:x\to x^2$ به طورقابل ملاحظه نسبت به $F:x\to x^2$ بیشترقابل استفاده است.

هرگاه $y\in Y$ ست تمام عناصر $x\in X$ طوریکه درآن $f\left(x\right)=y$ است به نام ست عناصر اصلی یادشده. و آنرابه شکل $f^{-1}\left(y\right)$ نشان میدهندبه این ترتیب .

یعنی : $$f^{-1}\left(y\right)=\left\{x:X\in x,f\left(x\right)=y\right\}$$

واضح است که اگر $y\in Y\setminus Y_f$ باشد پس $f^{-1}\left(y\right)=\phi$ میباشد .

فرض مینمایم که تابع $f:X\to Y$ داده شده یعنی میپنگ (تابع) ست X به ست Y .به عباره دیگر گویند هرعنصر $x\in X$ تنها وتنها به یک عنصر $y\in Y$ ارتباط داده شده است وهرعنصر $y\in Y_f\subset Y$ اقلاً به یک عنصر $x\in X$ ارتباط گرفته است .

اگر $Y=X$ باشد درینصورت گوین تابع f ست X رابه خودش نقش میکند .

اگر $Y=Y_f$ باشد یعنی ست Y با ست قیمت های تابع f مطابقت نماید . درینصورت گویند که تابع f ست X را به ست Y نقش میکند یا تابع f عبارت از تابع سورجکتیف است بصورت خلاصه سورجکتیف به این ترتیب گویند که تابع $f:X\to Y$سورجکشن است هرگاه به هر $y\in Y$ برای آن کی اقلایک $x\in X$ موجود شود طوریکه $f(x)=y$ شود.

واضح است که اگر $f:X\to Y$ و Y_f ست تمام قیمت های تابع f باشد پس $f:X\to Y_f$ یک تابع سورجکتیف است .

اگرتابع $f:X\to Y$ به $x\in X$ مختلف تصاویر مختلف $y\in Y$ ارتباط داشته باشد یعنی $x'\neq x''$ رابطه $f(x')\neq f(x'')$ باشد درینصورت تابع f بنام تابع یک به یک X در Y یاد میشود این تابع رابنام تابع انجکتیف یاد میکنند.به این ترتیب تابع $f:X\to Y$ انجکتیف است. اگروتنها اگر هرعنصرکه به شکل تصویر در Y_f ظهورمیکند. تایک عنصر اصلی در x' مرتبط باشد.

طوریکه برای هر $y\in Y$ چنین عنصر $x\in X$ موجود باشد که $f(x)=y$ شود پس تصویر یک به یک ست x درست y همین قسم همیشه یک به یک به عناصر این ست مطابقت مینماید .

هرگاه : $f:X\to Y$ و $A\subset X$ باشد پس این ست را میتوان چنین نوشت :

$$S=\left\{y:y\in Y,y=f\left(x\right),x\in A\right\}$$

یعنی که ست تمام y ها که هر کدام از این ها درتابع f تصویر اقلاً یک عنصر ازست

$A\subset X$ که بنام ست قیمت هایا دشده و مینویسند $S=f\left(A\right)$ و قسماً همیشه داریم که

$y_f=f\left(x\right)$ است .

برای ست ها $A\subset X$ و $B\subset X$ شرایط ذیل صدق نمود ه وثبوت روابط ذیل ساده است

1. $f\left(A\cup B\right)=f\left(A\right)\cup f\left(B\right)$

2. $f\left(A\cap B\right)\subset f\left(A\right)\cap f\left(B\right)$

3. $f\left(A\setminus f\left(B\right)\subset f(A\setminus B\right)$

هرگاه $A\subset B$ باشد پس $f\left(A\right)\subset f\left(B\right)$ میباشد .

اگر $f:X\to Y$ و $B\subset Y$باشد پس ست: $A=\left\{x:x\in x,f\left(x\right)\in B\right\}$

بنام مودل معکوس ست B یاد میشود : $A=f^{-1}\left(B\right)$

به این ترتیب مودل معکوس ست B از B یا همین قسم خود آن متشکل از تمام مودل

معکوس نقاط $y\in B$ باشد یعنی : $f^{-1}\left(B\right)=\bigcup\limits_{y\in B}f^{-1}\left(y\right)$

برای مودل معکوس ست $A\subset y$ و $B\in Y$ نسبت ثبوت شده ساده ذیل صدق میکند :

1. $f^{-1}\left(A\cup B\right)=f^{-1}\left(A\right)\cup f^{-1}\left(B\right)$

2. $f^{-1}\left(A\cap B\right)\subset f^{-1}\left(A\right)f^{-1}\left(B\right)$

3. $f^{-1}\left(A\setminus B\right)=f^{-1}\left(A\right)\setminus f^{-1}\left(B\right)$

هرگاه $A \subset B$ پس $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ میباشد .

اگر $A \subset X$ باشد دراین صورت تابع $f : x \to y$ به شکل طبیعی تابع را در ست A بوجود میآورد که تابع حاصله به هر عنصر $X \in A$ از عناصر $f(x)$ مطابقت مینماید که این تابع بنام تابع فشرده f در ست A یاد میشود و بعضی اوقات آنرا بشکل $f\Big|_A$ و یا ساده به شکل f_A نمایش میدهند .

به این ترتیب f_A انعکاس دهنده A در y است .

و برای هر $X \in A$ به جا است که $f_A : x \to f(x)$ نوشته گردد . هرگاه ست A به ست x مطابقت نداشته باشد دراین حالت ست فرعی مخصوص ست x تشکیل میگردد .

پس فشرده گی f_A تابع f در ست A دارای ساحه تعریف دیگر نظر به تابع f میباشد.

در حقیقت نظر به تابع f تابع دیگر تشکیل میگردد .

بعضی اوقات موجودیت تابع $f : x \to y$ در ست $A \subset x$ به همین سمبول f نشان داده و بنام تابع f در ست A یاد میگردد .

هرگاه دو تابع f و g در عین ست x مطالعه گردد و دقیقاً هرگاه فشرده گی توابع f و g در یک ست x مطالعه گردد پس نوشتن $f \equiv g$ در x نشان میدهد که $f(x) - g(x)$ برای هر $x \in X$ است . دراین حالت میگویند تابع f به تابع g در ست x مطابقت دارد .

معمولاً یکی از این سمبولهای بکار رفته دراین حالت دارای مفهوم خاص برای نوشتن هدف نسبت به سمبولهای دیگر میباشد .

بطور مثال : $f\left(x\right)=f\left(x_1,...,x_n\right)$ نشان میدهد که $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ و در خود همین نوشته $f\left(x\right)$ و $f\left(x_1,...,x_n\right)$ عین تابع را ارائه میکند .

قابل ذکر است که تابع y در تمام عناصر بعضی ست ها به یک و یا به عین عنصر مطابقت دارد . پس تابع y زمانیکه نظر به تغیرات قیمت های ارگومنت قیمت تابع تغیر نه نماید بنام تابع ثابت (در ست داده شده) و یا constant یاد میشود .

همچنان اگر در اثر تغیر یک متحول (ارگومنت تابع) متحول دیگر که تابع اولیه را تشکیل میدهد تغیر نه نماید تغییر در این صورت به متحول اولی ارتباط ندارد . پس این قسمت را در یک مفهوم معین حالت ساده ارتباط تابعی مینامند .

اگر $f:x\to y$ و هر عنصر $y\in y_f$ نشان دهنده یک ست با خود باشد و عناصر $y=\left\{Z\right\}$ طوریکه دربین این ست ها {z} دارای یک ست غیر خالی باشد که از یک عنصر تشکیل نشده باشد پس چنین تابع f بنام تابع چند قیمته یاد میشود . دراین صورت عناصر ست Z و $f\left(x\right)=Z$ همیشه بنام تابع چند قیمت تابع f در نقطه x نامیده میشود .

اگر هر ست $f\left(x\right)$ از یک عنصر تشکیل یافته باشد پس تابع f بنام تابع یک قیمته یاد میگردد .

اگر $f:x\to y$ و $g:y\to z$ باشد پس تابع $f:x\to z$ برای هر f و g را بنام تابع مرکب یاد نموده و به شکل gof نشان داده میشود .

فرضاً تـابع $f: x \to y$ داده شده و y_f ست قیمت های آنرا تشکیل دهد مجموع جوره

مرتب کـه نـوع $y \in y_f$ ، $\left(y, f^{-1}(y)\right)$ تـابع را بوجـود میآورد کـه بنـام تـابع معکوس

برای تابع f یاد گردیده و با شکل f^{-1} نمایش داده میشود .

تابع معکوس f^{-1} با هر عنصر $y \in y_f$ ست که به شکل $f^{-1}(y)$ آمده پس بـه بعضـی از عناصر ست مطابقت دارد ، بصورت عموم بنام تابع چند قیمته یاد میگردد .

به همین ترتیب برای هر نقطـه $x \in X$ دارای محل مناسب ورودی $x \ni f^{-1}, f(x)$ و

برای هر نقطه دیگر $y \in y_f$ مساوات $f\left(f^{-1}(y)\right)$ صدق میکند .

نمایش f و f^{-1} معکوس همدیگر گفته میشوند اگر نمایش تابع $f: x \to y$ یک طرفه باشد ، پس نمایش معکوس آن مثل y_f تعیین و بنـام تـابع یـک قیمتـه یـاد شـده و بـه شـکل y_f در X نشان داده میشود .

پس $f^{-1}: y_f \to x$ حقیقتـاً دریـن حالـت شـکل تمـام نقـاط $y \in y_f$ دقیقاً از یـک نقطـه $x \in X$ بوجود آمده دریـن حالـت مثل تمـام نقـاط $y \in y_f$ تنهـا از یـک نقطـه $x \in X$ مرکب میباشد .

طوریکه دیده میشود برای انعکاس ایـن بیکیتـوی انعکـاس معکـوس f^{-1} شـرایط ذیـل تـامین میگردد یعنی به هر $x \in X$ دارای مساوات $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ موجود است .

و به این اساس برای هر انعکاس این بیکتیوی تعداد داده شده (کیفی) f هر یـک شـرط یکسـان مفهوم انعکاس متقابل f^{-1} را معین مینماید . (و به این اساس برای هر انعکاس نمـایش این

بیکتوي فرض (کیفی) f هریک از شرایط فوق الذکر انعکاس معکوس f^{-1} یک قیمته را معین مینماید) .

$1-3^{*}$ ست های متناهی و اعداد طبیعی ترادف ها :

در حقیقت ست های ساده تشکیل دهنده ست های متناهی میباشد این مفهوم را در بخش $\left(1\cdot\overset{*}{2}\right)$ تعریف گردیده :

ست های که از یک یا دو عنصر تشکیل یافته باشند با چند تبصره در آینده یاداوري مینماییم .

از مقدمه میدانیم که : اگر ست x از چندین عنصر x تشکیل شده باشد و دارای دیگر عنصر نباشد صرف از عناصر x تشکیل شده باشد بعد از طرح ست x از ست x ست خالی را بدست میآوریم .

یعنی : $X\setminus\{x\}=\varnothing$

پس ست x ستی نامیده میشود که از یک عنصر تشکیل شده باشد به این ترتیب مفهوم ست که از یک عنصر تشکیل باشد به مفهوم عنصر معادل میباشد واضح است دو ست که از یک عنصر تشکیل شده باشند میتوان به عوض قیمت یکی از دیگرآن استفاده نمود . (انعکاس دهنده متقابل یکدیگر است) گفته میشوند که تعداد عناصر هر ست طوریکه از یک عنصر متشکل باشد مساوی به واحد است.و اصطلاح حرف (واحد) را توسط سمبول (1) نمایش میدهند .

اگر ست x بعد از طرح کردن از ست آن ست که از یک عنصر کیفی متشکل باشد $x\in X$ به ست تبدیل میگردد که تنها از یک عنصر متشکل شده باشد .

یعنی : $x \in y$ پس $\{x\}=\{y\}$ | x دراین صورت ست x بنام ست که از دو عنصر تشکیل یافته شد ، یاد میگردد . پس واضیح است که هر دو ست که از دو عنصر تشکیل یافته باشد میتوان به عوض قیمت یکی از دیگر آن استفاده نمود .

میگویند عدد عناصر هر ست که از دو عنصر تشکیل شده باشد مساوی به دو ست و کلمه دو توسط سمبول 2 نشان میدهد .

اگر ست x بعد از طرح نمودن از ست خود آن که از یک عنصر تشکیل یافته باشد یعنی $X \in x$ به ست تبدیل میشود که از دو عنصر تشکیل شده باشد . این ست x عبارت از ست است که از سه عنصر تشکیل شده باشد . ویا ست که تعداد عناصر آن برابر 3 باشد وکلمه سه توسط سمبول نشان داده میشود (3) .

به طور مشابه ست هایکه از چهار ، پنج ، شش و ... عنصر تشکیل شده باشد تعین میگردد . و یا همین قسم خود ست که تعداد عناصر آن مساوی به چهار ، پنج، شش و غیره باشد به عوض چهار ، پنج ، شش به سمبول های 4 ، 5 ، 6 و غیره نشان میدهند . و عنصر ست $\{1,2,3,4,5,6,\}$ نمایش میدهد که بنام اعداد طبیعی یاد میشود . اعداد طبیعی از علاوه نمودن عدد (1) به عدد قبلی به دست مي آيد و اعداد طبیعی به حرف N نشان داده میشود .

و تماماً اعداد کیفی مثبت توسط حرف n نشان داده میشود . طوریکه $n \in N$ باشد اما عدد طبیعی مستقیماً بعد از عدد n در ست $(1\cdot 3)$ توسط $n+1$ نشان داده میشود . عدد n بنام عدد ماقبل $n+1$ یاد میگردد . طوریکه دیده میشود تماماً اعداد طبیعی n بدون (1) دارای عدد ماقبل میباشد که میتوان آنرا به $n+1$ نشان داد که به این ترتیب : $n=1+(n-1)+1=n$

مطابق به تعریف عدد طبیعی هر عدد طبیعی را میتوان به شکل ذیل نوشت:

$$n=\left(\cdots((1+1)+1\cdots\cdots(1\cdot4)\right)$$

مطابق به روش دقیق برای تعیین نمودن اعداد طبیعی ، عدد $n+1\in N$ توسط همین خاصیت که هر ست مرکب از $n+1$ عنصر باشد مشخص میشود .

بعد از حذف نمودن عدد کیفی از آن به ست مبدل میشود که از n عنصر مرکب شده باشد موافق به روش مذکور در ست کیفی که مرکب از $n\in N$ عنصر باشد.

مستقیماً متناسب یکدیگر میباشد . اگر در ردیف اعداد طبیعی $(1\cdot3)$ از دو عدد طبیعی m و n عدد m قبلاً نسبت به n ذکر شده باشد ، پس عدد m طرف چپ عدد n قرار میگیرد .

پس عدد m از n کوچکتر بوده و به شکل $m<n$ مینویسیم .

و یا به همین قسم عدد n بزرگتر از m میباشد و مینویسیم $n>m$ است .

بطور مثال : $n\neq1$, $n-1<n<n+1$ باشد .

برای دو عدد طبیعی مختلف کیفی m و n دارای محل مشخص یکی از نسبت های $m<n$ و یا $m>n$ میباشد . دراین صورت اگر $m<n$ و $n<p$ باشد .

پس $p\in N$ ، n ، m ، $m<p$ است .

اگر عدد $m\in N$ کوچک از عدد $n\in N$ باشد پس در آنصورت هر ستی مرکب از n عنصر دارای ست فرعی m عنصر میباشد . این نتیجه گیری خود دستوالعمل تعریف ترادف اعداد طبیعی است . ست اعداد طبیعی N دارای خواص قابل ملاحظه ذیل است .

اگر ست M طوری باشد که :

1- $M\subset N$ باشد .

2- $1\in M$ باشد .

3- از $n\in M$ نتیجه میشود که $n+1\in M$ است .

پس $$M = N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\cdot5)$$

حقیقتاً مطابق به شرط شماره (2) . که $1 \in M$ است .

به شرط شماره (3) ، $2 \in M$ نیز مطابقت دارد . پس مطابق به خواص شماره (3) داریم که $3 \in M$ است . مگر عدد کیفی طبیعی $n \in N$ از یک ترادف با افزودن عدد یک نیز بدست میآید . برای اینکه $n \in M$ است پس داریم که $N \subset M$ است . و همین قسم مطابق شرط (1) روشن است که $M \subset N$ است پس $M = N$ بوده که در زمینه مساوات $(1\cdot5)$ ثابت است .

از تمام گفتنی ها نتیجه میشود که ست اعداد طبیعی N دارای خواص ذیل میباشد .

1° – به هر عنصر $n \in N$ یک عنصر این ست مطابقت دارد و به $n+1$ افاده میگردد .که عنصر متذکره بعد از عنصر n قرار میگیرد .

2° – هر عنصر از N واحد میتواند تنها نتیجه یک عنصر بعدی $n \in N$ شود .

3° – موجودیت عنصر خاص که توسط سمبول (1) افاده میگردد قبل از کدام عنصر نتیجه نمیدهد .

منصفا نه و بر عکس تأئید کردن این مفهوم که تماماً ست ها توسط شرایط $\left(1^\circ - 4^\circ\right)$ تامین میگردد ، میتواند مقابله به یک نوع انعکاس به ست N باشد با حفظ نسبت (خوردی ، و بزرگی) این حالت ممکن است که تعریف اکسیوماتیکی ست اعداد طبیعی را بدست آورد به این اساس کافی است تا شرایط $\left(\overset{\circ}{1} - \overset{\circ}{4}\right)$ را کاملاً به حیث اکسیوم قبول کرد .

که آنها بنام اکسیوم های پینه[1] (Peano) یاد میشود . به این ترتیب تعریف اکسیوماتیکی ست ها اعداد طبیعی قرار ذیل است .

تعریف 2 : ست که تحت تأمین شرایط $\left(\mathring{1} - \mathring{4}\right)$ بوده عبارت از ست اعداد طبیعی میباشد .

به این ترتیب تعریف خاصیت 4° عبارت از اکسیوم استقراي رياضي میباشد .

از ثبوت مساوات $(1\cdot5)$ نتیجه میشود که پرنسیب یاد شده عبارت از ثبوت میتود های استقراري رياضی میباشد .

اگر ستی تأئید شده موجود باشد دراینصورت عدد طبیعی را به نمبر طور ذیل مینویسیم :

$$n = 1, 2, 3, ...$$

اگر ثابت باشد که :

1 -مطابق تائید مساوات نمبر 1 .

2 -از تأئید کردن مساوات با نمبر کیفی $n \in N$ نتیجه تائید کردن مساوات با نمبر $n+1$ میشود در آنصورت خودش ثبوت است .

که تمام مساوات تحت مطالعه مورد تائید است پس مساوات تائید شده با نمبر کیفی $n \in N$ میباشد .

مثال : بیان کردن ثبوت توسط میتود استقرا ریاضی (مراجعه نماید به) مثال در بخش $(1\cdot4)$ قضیه اول . فرضاً میگویند ست که تعداد عناصر آن مساوی به صفر باشد به کلمه صفر توسط (o) نشان میدهد .

ست اعداد طبیعی که با صفر افزوده میشود توسط $\left(N_o\right)$ نشان میدهد .

$$N_o \underline{\underline{def}} N \cup \{0\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 6)$$

صفر کوچکتر از هر عدد طبیعی کیفی میباشد یعنی $n \in N$ ، $0 < n$ است .

اعداد طبیعی میتوانند بین خود و با صفر جمع شود . عملیه جمع در ست ها (N_o) توسط عملیه اتحاد ست صورت میگیرد حاصل جمع $m+n$ عدد طوریکه $m \in N$ و $n \in N$ باشد عبارت از تعداد عناصر ست است که در اتحاد دو ست غیر متقاطع بدست میآید . که یکی از آن به m و دیگر به n عناصر ترکیب شده است .

تعریف فوق مربوط به انتخاب وخواص ست نیست به ساده گی دیده میشود که در حالت $n=1$ عدد $m+n=m+1$ است .

مفهوم عملیه جمع با عدد مابعد از m عدد مطابقت دارد . که قبلاً هم به همین سمبول $m+1$ نشان داده شده است .

همین قسم مستقیماً از تعریف خواص عملیه جمع در ست (N_o) ذیلاً استفاده مینمائیم .

$1^\bullet$, $\quad n+0=n, \qquad n \in N_0$

$2^\bullet$, $\quad m+n=n+m, \qquad m,n \in N_0$

$3^\bullet$, $\quad m+(n+p)=(m+n)+p, \qquad n,m,p \in N_0$

عملیه تفریق در ست (N_o) توسط عملیه تفریق ست ها تعین میشود .

هرگاه $n \in N_0$ ، $m \le n, m$ پس حاصل تفریق $m-n$ عبارت از عددی عنصر ست است که از ست n عنصر مرکب شده و توسط عملیه تفریق ازآن ست که از m عنصر مرکب شده حاصل میشود تعریف فوق مربوط به انتخاب ست مورد مطالعه که مرکب از n و m عنصر است .

عملیـــه تفریـــق در ســـت $\left(N_o\right)$ عبـــارت از معکـــوس عملیـــه جمـــع اســـت هرگـــاه

$m,n \in N_0 \quad m+n=p,$ باشد پس $n=p-m$ است .

از تعریف عدد طبیعی n چنین نتیجه مشود که ست $\{1,2,3,........,n\}$ از n عنصر مرکب شده است زیرا که هر ست که از n عنصر مرکب شده باشد متقابلاً یکسان در ست $\{1,2,3,.......n\}$ انعکاس میکند .

تعریف 3 : اگر برای هر ست عدد طبیعی که تعداد عناصر آن مساوی بـه n شود ، پس چنین ست متناهی نامیده میشود .

(که از n عنصر مرکب است) . تماماً ست هایکه متناهی نیست بنـام ست هـای نامتنـاهی یـاد میشوند . مثال ست های نـا متنـاهی عبارت از تمام اعداد طبیعی N میباشد ست هـا ی خـالی (عبـارت از سـت فرضـی اسـت کـه هیچ عنصـر نـدارد) بـه اسـاس تعریـف اینگونـه سـت هـا نامتناهی مینامند .

تمرین3: مساوات راثبوت کنید: $m+n=\left(.....\left(m+1\right)+1).....+1\right)+1$

افاده (n دفعه) در اینجا این معنی میدهد که از ست n دفعه عنصر گرفتـه میشود و هر کدام آنها را به (1) نشان میدهند و تماماً این واحد ها پی هم با اعداد طبیعی m افزوده میشود .

تعریـف 4 : فرضـاً x یـک نـوع سـت اسـت و N سـت اعـداد طبیعـی باشـد تمـام انعکـاس $f\ :N\rightarrow x$ (2.ا.پ.س.م) عبارت از ترادف های عناصر ست x میباشد . $\left(N\right)$ f بـه حرف X_n نشانی میگردد .

وحد $n-m$ ام ترادف $f:n\rightarrow x$ و خود این ترادف $\{X_n\}$ با خود جوره مرتب را نشان میدهد که از عدد $n\in N$ ترکیب شده است . و به آن در صورت انعکاس $f:N\rightarrow x$ عناصر (x) به ست x مطابقت دارد .

پس داریم : $X_n=(n,x)$ عنصر دوم این جوره مرتب بنام قیمت عنصر X_n ترادف X_n نامیده میشود و عنصر اول این جوره مرتب نمبر آن میباشد . ست عناصر ترادف همیشه نا متناهی است .

دو عنصر مترادف میتوانند دارای یک مفهوم (قیمت) باشد ولی از نظر نمبر مثل ست های نامتناهی متفاوت میباشد .

راجع به مفهوم عناصر مترادف معمولاً به طور مختصر میگویند : قیمت ست ترادف میتوان نامتناهی باشد بطور مثال : اگر $n\in N$ در مطابقت به یک و عین عنصر $a\in x$ برابر باشد پس در آنصورت تمام $n\in N$ دارای مساوات ذیل میباشد . $f(n)=a$ قیمت ست ترادف $x_n=a,\ n=1,2,....$ که از یک عنصر $a\in x$ ترکیب شده که این ترادف بنام ترادف ثابت یاد میشود .

هرگاه $n_1<n_2, n_1\in N, n_2\in N$ باشد پس حد X_n ترادف $\{X_n\}$ عبارت از حد قبل X_{n2} بوده و حد X_{n2} حد بعدی X_{n1} میباشد . در این قیمت حد ترادف همیشه منظم است و همیشه در چگونگی نمبر ها مطمأنانه بکار میبرد . نه بخاطر تمام اعداد طبیعی لیکن ازدیاد بعضی از آنها بطور مثال آغاز عدد طبیعی با بعضی اعداد طبیعی صورت میگیرد .

$n_0:x_n,\ n=n_0,n_0+1........$

و یا یک عدد جفت $n = 2,4,.......x_n$ بوجود مي آید که برای نمره گذاری نه تنها از عدد طبیعی بلکه عدد دیگر نیز بکار میرود .

بطور مثال $n = 0,1,2,3........x_n$ در این جا چگونگی یک نمبر صفر نیز افزوده شده است . در تمام این حالت میتوان سر از نو نام گذاری کرد .

در تمام این حالت ممکن است X_n را نام گذاری کرد و تنها آنها در تمام اعداد طبیعی m استفاده کرد. ازمثال اول نتیجه میشود که: $m = n - n_0 + 1$

در مثال دوم $m = \frac{n}{2}$ در مثال سوم $m = n + 1$ زیرا که در حالت مسابه چنین میگویند که X_n ترادف بمیان میآورد و در آخرین جمله نشان میدهد که n کدام قیمت را مي گیرد .

1-4. گروپ بندی عناصر ست های متناهی

هرگاه کدام ست متناهی داده شده باشد و لازم باشد که از عناصر آنها چندین گروپ به کمک این یا آن شرط تشکیل نمائیم خواص آنرا مطالعه مینمائیم .

بطور مثال ست واضیح باشد که از چندین گروپ عناصر آن تشکیل است .

که تبدیلات ، تغیرات ترکیب و ترتیب کردن آنها گروپ بندی آن نامیده میشود .

فرضاً ست داده شده که از n عناصر تشکیل شده باشد .

یعنی : $x_1, x_2, x_3, ...x_n$

و دارای بعضی از اعداد طبیعی مثبت $R \le n$ بوده که در مبدأ و انجام خط مندرج عناصر فرعی که در رابطه $(1 \cdot 8)$ نشان داده شده است میتواند متناهی مشروط ها باشد .

تعریف 5 : گروپ عناصر که از R عنصر ترکیب یافته باشد و هر کدام و یا یکی از دیگر یا بین خود عناصر یا در ترتیب شان فرق داشته باشد عبارت از ترتیب کردن n عنصر در R عنصر میباشد .

مثال : گروپ $\{1,2\}\{2,1\}\{1,3\}\{3,1\}\{2,3\}\{3,2\}$ که همه ترتیب هاي ممکن اعداد طبیعی $3,2,1$ میباشند .

تعداد تمام تبدیلات از n عنصر به R عنصر توسط :

$A_n^R \ , \ n=1,2,3,........ \quad , \quad R=1,2,.......n$ افاده میگردد .

لیما : اگر $R<n$ باشد پس $A_n^{R+1}=A_n^R\left(n\cdot R\right)..................\left(1\cdot 9\right)$

ثبوت : از هر تبدیل به R عنصر از n عنصر پس از هر گروپ مرتب از R عناصر $\left\{x_{i1},x_{i2},......x_{iR}\right\}$ یك را بالاي آن که شامل عنصر نه باشد افزود میکنیم یعني:

$x_{iR}+1$ از تمام چنین $n-k$ میتوان $\left(n-R\right)$

تبدیلات $R+1$ عنصررا بدست آورد به شکل $\left\{x_{i1},x_{i2},......,x_{iR},x_{iR+1}\right\}$ به این ترتیب طرق بدست آوردن تمام تبدیلات به $R+1$ عنصر که دقیقاً تنها یکدفعه صورت میگیرد.طوریکه:

$$A_n^R\left(n-R\right)=A_n^{(R+1)}$$

قضیه 1 : به شکل فارمول بجا خواهد بود :

$$A_n^R=n\left(n-1\right)....\left(n-R+1\right), \ R=1,2,3.....n.........\left(1\cdot 10\right)$$

ثبوت:طوریکه دیده میشود: $A_n^1 = n..........(1\cdot 11)$

همچنان: $A_n^2 \underset{(1\cdot 9)}{=} A_n^{1+1} = A_n^1(n-1) \underset{(1\cdot 11)}{=} n(n-1)..............(1\cdot 12)$

$$A_n^3 \underset{(1\cdot 9)}{=} A_n^{2+1} = A_n^2(n-2) \underset{(1\cdot 12)}{=} n(n-1)(n-2)$$

بصورت عموم اگر

$$A_n^{(b-1)} = n(n-1).....(n-R+2)..........(1\cdot 13)$$

$$A_n^R \underset{(1\cdot 9)}{=} A_n^{R-1}\left(n-(R-1)\right) \underset{(1\cdot 13)}{=} n(n-1).........(n-R+1)$$

پس به عوض فورمول $(1\cdot 10)$ ثبوت قضیه قرار معلوم به اساس میتود استقرار ریاضی صدق میکند . حقیقتاً مساوات $(1\cdot 11)$ نیز درست است و نشان میدهد که فورمول $(1\cdot 13)$ نتیجه فورمول $(1\cdot 10)$ است .

تعریف 6 : گروپ های که از یک و عین عدد و عناصر تشکیل یافته ، به یکی دیگر تنها در ردیف عناصر فرق دارد ترکیب یافته باشد بنام تبدیلات یاد میشود . به این ترتیب تبدیلات عبارت از تبدیلات از n عنصر به n عنصر که در هر کدام $n = 1,2...$ موجود باشد.

بطــور مثــال : $\{1,2,3\},\{1,3,2\},\{2,1,3\},\{2,3,1\},\{3,1,2\}$ و $\{3,2,1\}$ تمــام تبدیلات ممکنه اعداد 1،2،3 است . تعداد تمام تبدیلات n عنصر توسط P_n افاده میگردد.

فضیه 2 : به عوض فورمول : $p_n = 1,2,3...n$

از فورمول $(1\cdot 10)$ نتیجه میشود در صورتیکه $R=n$ حاصل ضرب $1,2,...n$ توسط $n!$ (فکتوریل خوانده میشود) افاده میگردد .

$$p_n = n!.........................(1\cdot 14)$$

برای اطمینان فرض میکنیم : $p_0 = 0! = 1$

تعریف 7 : گروپ هاي که از R عنصر تشکیل گردیده آخرین حد این گروپ با یکدیگر به اندازه يك عنصر فرق داشته باشد بنام ترکیب یاد میشود .

بطور مثال : گروپ هاي $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ متشکل از اعداد طبیعی 1،2،3 بوده و هر گروپ وجود میآید .

تعداد تمام ترکیب از n عناصر به R عناصر هریکی آنها توسط $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{R}$ افاده میگردد .

قضیه 3 : به عوض فورمول :

$$C_n^R = \frac{A_n^R}{p_R}............................(1\cdot 15)$$

پس:

$$C_n^R = \frac{n(n-1)....(n-R+1)}{n!}.............(1\cdot 16)$$

نیجه مساوات فوق :

$$C_n^R = \frac{n!}{R!(n-R)!}.............(1\cdot 17)$$

ثبوت : هرگاه در هر ترکیب از R عنصر به n (عنصر که بشکل) $\left(C_n^R\right)$ است تمام شرایط ممکنه تبدیلات عناصر آن (عددمساوی به p_R) شود ، پس تبدیلات از R عنصر به n عنصر صورت میگیرد به چنین طریقه تمام تبدیلات از R عنصر به n تنها یکدفعه صورت میگیرد .زیرا $C_n^R p_R = A_n^R$ از آنجا که تنیجه فورمول $(1\cdot 15)$ فورمول $(1\cdot 16)$ از

فورمول های $(1\cdot 10)$ ، $(1\cdot 14)$ ، $(1\cdot 15)$ میشود بدست میآید اگر صورت و مخرج کسر در بخش اول فارمول $(1\cdot 16)$ در $(n-R)!$ ضرب شود پس فارمول $(1\cdot 17)$ بدست میآید .

قضیه4: به شکل فورمول: $(1\cdot 18)$...... $C_n^3 = C_n^{n-R}, R = 0,1,2,....,n$

در جای $C_n^0 \overset{def}{=} 1$ ثبوت فورمول $(1\cdot 18)$ مستقیماً از تعریف ترکیب بدست میآید اگر از n عنصرکدام گروپ انتخاب شود ترکیب که از R عنصر ترتیب شده باشد پس گروپ(ترکیب) از $(n-R)$ عناصر باقی مانده میشود .به این قسم طریقه تمام ترکیب از n عنصر به R عنصر به یک بار بدست میآید . زیرا که اعداد ترکیب شده از n عنصر در R عنصر پس C_n^R مساوی است به عدد که از n عناصر ترکیب شده است .

پس C_n^{n-R} فارمول $(1\cdot 18)$ مستقیماً از مساوات $(1\cdot 17)$ نتیجه میشود طوریکه :

$$C_n^R = \frac{n!}{R!(n-R)!}, C_n^{n-R} = \frac{n!}{(n-R)!\cdot R!}$$

طوریکه

پس عدد C_n^R و C_n^{n-R} مساوی است .

قضیه 5 : به عوض فورمول : $C_{n+1}^{R+1} = C_n^R + C_n^{R+1}$.............$(1\cdot 19)$

ثبوت : فرضاً $n+1$ عنصر است که از ترکیب در $k+1$ عناصر بدست آمده است . یکی از این عناصر با آن جمع میکنیم پس عدد ترکیب شده که با آن این عنصر افزود شده مساوی است به C_n^R .

(همین قسم هرگاه آنرا در هر یکی از ین ترکیب ها طرح کنیم ، پس تمام امکانات ترکیب n عنصر آنها در R عناصر یکدفعه بدست میاید).

اما عدد ترکیب شده طوریکه در آن افزود شده مساوی است به :

C_n^{R+1} (آنها تمام ترکیب هاي ممکنه در $R+1$ عنصر و از باقیمانده n عناصر بوجود میآورد) این ثبوت فورمول $(1\cdot19)$ است .

تبصره : عدد C_n^R را میتوان توسط جدول مثلثی که بنام مثلث پاسکال[1] یاد میشود در یافت کرد . طوري که عدد اول و اخیر فرق دارد مساوی به (1) است و از سطر سوم هر عدد آغاز میشود .

فرق عدد اول و اخیر و ترکیب بزرگی این اعداد بدست میآیدتوسط سطر های قبلی بدست میآید قرار شکل ذیل :

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1.......C_n^R \qquad C_n^{R+1}.........1\\
1.................C_n^{R+1}....................1
\end{array}
$$

شکل پاسکال

از مساوات $C_n^0 = C_n^n = 1$ و از فورمول $(1\cdot19)$ نتیجه میشود که در n سطر این جدول $1, C_n^1.........,C_n^R.........,C_n^{n-1},1$ باقیمانده است .

1-5 سمبول های منطقی

در اندیشه های ریاضیکی همیشه افاده ای دیده میشود «موجودیت عناصر» که توسط بعضی از خاصیت های «کیفی عناصر » در اطراف عناصر بدست می آید که دارای بعضی خواص میباشد .

در ریاضی به عوض کلمه « موجودیت » سمبول $\exists$ مینویسند که معکوس حرف لاتین E است و به عوض کلمه « براي همه » سمبول $\forall$ معکوس حرف A نوشته میشود.

مثال: تعریف اتحادست $A\alpha$ $\alpha \overset{\cup}{\in} u$ ست $\alpha \in u$ ، $A\alpha$ توسط سمبول های منطقی طور ذیل نوشته میشود .

$$\bigcup_{\alpha \in u} A\alpha = \{\alpha : \exists \alpha \in \exists 1, \chi \in A\alpha\}$$

و تعریف قطع ست s $A\alpha$ $\alpha \overset{\cup}{\in} u$ توسط سمبول به شکل ذیل تحریر میگردد .

$$\bigcup_{\alpha \in u} A\alpha = \{x : \forall a \in u, \chi \in A\alpha\}$$

مثال 2 : فرضاً R ستی از اعداد حقیقی باشد و فرضاً تابع $f : R \to R$ داده شده باشد . هرگاه تابع درست اعداد حقیقی معین باشد و قیمت اعداد حقیقی را بخود بگیرد پس تابع f را بنام تابع جفت یاد میکنند اگر برای هر $x \in R$ مساوات $f(-x) = f(x)$ صدق نماید.

که با استفاده ازسمبول های منطقی این شرایط را قرارذیل نوشت :

$$\forall x \in R : f(-x) = f(x)$$

3: تابع $f : R \to R$ بنام تابع متناوب ، متمادی یاد میگردد هرگاه چنین عدد $T \rangle 0$ موجود باشد طوریکه $x \in R$ مساوات

$$(\exists T \rangle 0), (\forall x \in R) : f(x+T) = f(x)$$

معمولاً برای آسانی مطالعه تأئید کردن نوشته ها را توسط بعضی از سمبول هاي منطقی نشان میدهند که هر کدام آنها سمبول های جداگانه دارد . و به قوس دایروه ای آغاز میشود . همانطوري که در فورمول اخیر بکار نرفته است . دو نقطه (:) فرمول فوق دارای این مفهوم است که طوریکه :) و اکثراً افاده متذکره جهت کوتاه نمودن آن بدون قوس مینویسند و میتوان چنین پیشکش نمائیم :

طوریکه ،$\forall$ هرگاه ، $\exists$ موجودیت $\exists T \rangle 0 \ \forall \chi \in R : f\left(\chi + T\right) = f\left(x\right)$

4: تابع $f : R \to R$ جفت تیست اگر شرایط $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$ برای تمام $x \in R$ قابل اجرا نباشد . (صادق نمیباشد) (تطبیق نشود) بطور مشابه تعریف منفی آنقدر مناسب نیست وقتیکه میخواهی از آنها استفاده نماید . همین قسم استنباط کردن آن چیزیکه نیست مشکل است پس در حالت داده شده تائید کردن مساوات $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$ که برای تمام $x \in R$ صادق نیست تائید کردن معادل آن که تنها موجودیت $x \in R$ را نشان میدهد یعنی $f\left(-x\right) \neq f\left(x\right)$ و بطور سمبولیک مینویسیم :

$\exists x \in R : f\left(-x\right) \neq f\left(x\right)$

5: تابع $f : R \to R$ تابع متناوب ، متمادی نیست اگر هر عدد فرض $T \rangle 0$ دارای تناوب نباشد پس برای هر $T \rangle 0$ مساوات $f\left(x + T\right) = f\left(x\right)$ حتمی نیست که برای تمام $x \in R$ بکار برده شود .

یا در فرمول مثبت : برای هر $T \rangle 0 : \chi \in R$ دریافت میگردد :

چنانچه $f\left(\chi + T\right) = f\left(x\right)$ توسط سمبول ها قرار ذیل مینویسد :

$\forall T \rangle 0 \exists \in R : f\left(\chi + T\right) \neq f\left(x\right)$

مقایسه نوشته سمبول های منطقی توسط فرمول 2 و 3 با منفی بودن آن در فرمول شکل 4 و 5 تائید میگردد که به تشکیل سمبول های منفی موجودیت و اتحاد آن یکی با دیگر تبدیل میشود . برای اینکه در بعضی از ست ها عناصر موجود نمیباشد ، دارای چنین خواص میباشند. لازم است تمام عناصر که موجود نیستند را توسط این خاصیت استفاده گردد. پس در این حالت در سمبول های منفی موجودیت $\exists$ بکار رفته میشود . در سمبول $\forall$ اگر کدام خاصیت موجود باشد که تمام عناصر ست در آن مطالعه نمیگردد ، پس این به آن معنی است که در آن عناصر موجود است که دارای خواص نمیباشد سمبول اتحاد به سمبول موجودیت تبدیل میگردد.

سمبول $\langle=$: به معنی درنتیجه میشود (یک نظر از نظر دیگر نتیجه میشود) و سمبول $\Leftrightarrow$ به معنی مساوی بودن ، معادل بودن در مساوات یکی از دیگر بدست می آید که به طرف مخالف آن قرار میگردد .

علامه $\underline{def}$ به این معنی است که (به اساس تعریف بیان شده)

بطور مثال :

$$A \subset B \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall \chi \in A \Rightarrow \chi \in B\right)$$

$$\left(gof\right)\left(\chi\right) \overset{def}{=} g\left(f \subset \chi\right)$$

$\left(\sum\right)$ برای مجموعه از ان استفاده میگردد.افاده نمودن مجموعه میتوان به طریق ذیل نوشت:

$$\sum_{k=1}^{n} ak \overset{def}{=} a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n$$

مثل قانون جابجا نمودن نوعیت مواد در نمایش کلاس بدون سمبول های منطقی به اندازه برابر به اساس متن استفاده میگردد . این از یکطرف به خوانندگان امکان عادت استفاده آنها را میدهد .

بطور مثال در صورت اجمال مفید است اما بسیار مشکل است که هدف را توضیح بدهیم زیراکه به فهمیدن آن تفکر عمیق ضرورت است .

علامه $\square$ ثبوت شدن معنی میدهد .

2 §. اعداد حقیقی

2.1 . خواص اعداد حقیقی

در ریاضی مقدماتی اعداد حقیقی خوانده میشوند . ابتدا در عملیه شمارش بوجود آمدن و همین ردیف اعداد $1,2,3,...n$ را بنام اعداد طبیعی مینامند . در حساب عملیه جمع و ضرب بالای اعداد طبیعی صورت میگیرد . چیزیکه مربوط به عملیه تفریق و تقسیم است این است که برای همیش درست اعداد طبیعی این دوعملیه نا ممکن است. برای اینکه تمام چهار عملیه حسابی برای هر جوره اعداد(بدون عملیه تقسیم بر صفر که لازم نیست اجرا میشود) ممکن شود ایجاب میکند تا به صنف مورد مطالعه اعداد انکشاف داد شود که برای انکشاف دادن ذخایر اعداد لازم است . همین قسم تقاضای اندازه کمیات هندسی و فزیکی بمیان می آید برای این کار عدد صفر و تمام اعداد منفی به شکل $n...(-2),(-1)$ به میان می آید و بعداً کسر های ناطق (شکل $\frac{p}{q}$ ، p و q تام و $q \neq 0$) عرض اندام میکند.

همین قسم تقاضا نمودن اندازه کمیات و تطبیق چنین عملیه ها مثل کمیات جذری محاسبه لوگارتم ها ، حل معادلات الجبری ، که به انکشاف بعدی ذخیره اعداد مورد مطالعه اعداد غیر ناطق ، لایتناهی ، مختلط به میان می آید تمام کسر های ناطق و غیر ناطق تشکیل دهنده تماماً ست های اعداد حقیقی میباشد .

ست های تمام اعداد حقیقی را میتوان توسط حرف R نشان داد .

(از aT . Realus حقیقی) این ست ها به صورت کل تشکیل دهنده مشخصات عملیه متقابل جمع و ضرب و مقایسه اعداد در کمیات هرکدام ازقطارممکن در اعداد بوجود می آید که مختصراً خواص اعداد حقیقی را یاد آور میشویم:از ریاضی مقدماتی واضح است که خواص اعداد حقیقی بی نهایت زیاد است بطور نمونه ذیلاً آنرا مطالعه مینمائیم.

I **: عملیه جمع :** برای هر جوره مرتب اعداد حقیقی اختیاری a و b یگانه قاعده وجود دارد که بنام حاصل جمع اعداد یاد شده و چنین نشان داده میشود .

a + b که دارای خواص ذیل میباشد :

I_1 : برای هر عدد a و b داریم که : $a+b=b+a$

این خاصیت بنام قانون تبدیلی جمع یاد میشود .

I_2 : برا ی هر عدد a, b , c داریم که : $a+(b+c)=(a+b)+c$

این خاصیت بنام قانون اتحادي جمع یاد میشود :

I_3 : هر عدد حقیقی اگر به صفر جمع شود حاصل جمع آن خود عدد حقیقی بدست می آید .

$a+0=a$

I_4 : برای هر عدد a مقابل وجود دارد که به (a-) نشان داده شده و بنام عدد متقابل (تضاد) یاد میشود فرضاً $a+(-a)=0$ یاد میشود .

II : **عملیه ضرب :** برای هر عدد جورۀ مرتب اعداد اختیاری a و b یگانه قاعده وجود داردکه بنام ضر ب اعداد یاد شده و چنین نشان داده میشود ab و یا $a\cdot b$ و دارای خواص ذیل میباشد .

II_1: برای هر جوره اعداد a و b داریم که $a\cdot b=b\cdot a$ این خاصیت بنام قانون تبدیل ضرب یاد میشود .

II_2: برای هر عدد a, b , c داریم که $a(bc)=(ab)c$ این خاصیت بنام قانون اتحادي ضرب یاد میشود .

II_3 **:** در عملیه ضرب عددی وجود دارد که عبارت از عدد یک است و بنام عینیت عملیه ضرب یاد شده طوریکه برای هر عدد a دریم $a \cdot 1 = a$

II_4 : برای هر عدد $a \neq 0$ عددی معکوس موجود است که توسط $1/a$ نشان داده شده و معکوس a یاد میشود طوریکه $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

III : **ارتباط عملیه جمع و ضرب :**

برای هر یک ازاعداد a, b , c داریم که : $(a+b)c = ac + bc$ این خواص بنام قانون توزیعی ضرب نسبت به جمع یاد میشود .

IV : **قابلیت ترتیب (تنظیم):** برای هر عدد a یکی از نسبت های ذیل مشخص است

$a>0$ (a بزرگ از صفر است) $a = 0$ (a مساوی صفر است) ویا $a < 0$ (a کوچک از صفر است) .

طوریکه شرایط $a > 0$ معادل $-a < 0$ است (شود) در این صورت اگر $a > 0$ و $b > 0$ باشد پس غیر مساوات ذیل صدق میکنند :

$$a + b > 0 .... IV_1$$

$$ab > 0 ... IV_2$$

خاصیت چهارم امکان میدهد تا مفهوم مقایسه یا طوریکه همیشه گفته میشود مقایسه به کمیات برای هر دو عدد اختیاری a و b عبارت از عددی است که از a بزرگ است چنین مینویسند . $b > a$ و یا به همین طور عدد a کوچک از عدد b است و چنین مینویسند $a < b$.موجودیت مقایسه بزرگ و یا کوچک برای هر جوره مرتب اعداد حقیقی بنام خواص قابلیت ترتیب جوره مرتب تمام ست های اعداد حقیقی یاد میشود.اعداد حقیقی همینطور دارای خواص نا مساوات نیز میباشند.

V : خواص نامساوات :

فرضاً اگر یک ست $A \subset R$ و $B \subset R$ غیرخالی داشته باشیم طوریکه برای هر دو عنصر اختیاری $a \in A$ و $b \in B$ نامساوات $a \le b$ صادق باشد و چنان عدد a موجود باشد که برای $a \in A$ دارای نسبت $a \le \alpha \le b$ مطابق شکل (2) بجا خواهد بود. خواص نامساوات اعداد حقیقی مربوط است به استفاده ساده تراز ریاضی در پراکتیک ،اندازه نمودن کمیات فزیکی و یا کمیات طبیعی دیگر که در اندازه نمودن، چنین کمیات همیشه به دقیقیت بزرگی و خوردی سروکار داریم ،طوریکه آنها بین خود بسیار نزدیک به هم دیگر باشد اگر در نتیجه اندازه نمودن تجربوی کمیات متذکره در ردیف اعداد که قیمت مطلوبه را کم میدهد « آنها رول ست A را بازی کرده که در تعریف فوق خواص نامساوات قرار میگیرد» . و اگر افزون شود ست B خواص نامساوات اعداد حقیقی را قیمت مطلوبه و قابل قبول نشان دهد در آنصورت کمیات اندازه شده دارای قیمت مطلوبه مشخص میباشد و قرار دادن قیمت محاسبه شده در بین قیمت مطلوبه مربوط به کم و زیاد آن میباشد.

از خواص $1- \ V$ اعداد حقیقی خواص پولینوم ها نیز نتیجه میشود .

در اینصورت میتوان گفت که مجموع عناصر اعداد حقیقی دارای خواص $1- \ V$ بوده که تصور آن بسیار زیاد است .

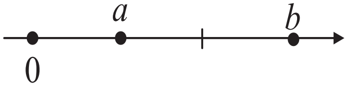
برای اینکه خواننده بداند واضیح میسازیم که در آغاز این پراگراف راجع به اعداد حقیقی و خواص آنها از کورس ابتدایی ریاضی معلومات داریم که تذکر آن لازم شمرده نمیشود .

تعریف خواص فوق اعداد حقیقی را میتوان از تعریف اول نتیجه گرفت تنها حالت ساده آن واضیح است.

بطور ساده امتحان کردن آن عده ست هاییکه تنها از یک صفر تشکیل یافته باشد تماماً خواص(V -1) بالای آنها قابل تطبیق است (درین ست ها $1=0$ است) .

ستي که تنها دارای یک عنصر باشد با صفر متفاوت بوده میتوان در اینجا بخاطر مختصر نمودن از آن نام برد . از لابلای گفتار فوق تعاریف ذیل را مینویسیم .

تعریف 1: عناصر ست های مغلق که توسط خواص $1-$ V بوجود آمده عبارت از ست های اعداد حقیقی بوده که هر عنصر این ست بنام اعداد حقیقی یاد میشود . ترتیب تیوری اعداد حقیقی که به اساس تعریف، آنها چنین است اکسیوماتیکی نامیده میشود و خواص $1-$ V اکسیوم های اعداد حقیقی میباشد . ست های هندسی اعداد حقیقی به جهت مستقیم و تنها عدد توسط نقاط روی مستقیم ترسیم میگردد به این اساس مجموع اعداد حقیقی همیشه مستقیم محورعددی بوده همین طور محور اعداد حقیقی و تنها عدد توسط نقاط آن مطابق شکل 3 ارائه میگردد .



شکل (3)

به این تعبیر اعداد حقیقی همه وقت a کوچك از b است (a بزرگ از b است) میگویند که نقطه a طرف چپ نقطه b قرار دارد . (طرف راست b قرار دارد)

در پراگراف (2.2 و 2.6) بسیار مشرح و تحلیلی خواص $1-$ V اعداد حقیقی و استخراج نمودن چندین نتیجه از آن در آینده معلومات ارائه خواهد شد به این لحاظ بعضی نقاط توسط ستاره نشانی شده است .

2.2* : خـــواص جمـــع و ضـــرب : بعضـــی از خـــواص جمـــع و ضـــرب کـــه توســـط خواص I, II, III نتیجه گیری شده مورد مطالعه قرار میدهیم . قبل از همه یاد آور میشوم که برای عملیه جمع عملیه معکوس تفریق موجود است و آنرا تعریف میکنیم :

برای هر جوره مرتب اعداد $a \in R$ و $b \in R$ عدد $a+(-b)$ عبارت از فرق عددa و b میباشد و توسط$(a-b)$ نشان داده میشود .

$$a-b \overset{def}{=} a+(-b) ...(2.1)$$

اگر

$$a+b=c...(2.1)$$

پس به هردوطرف مساوات$(-b)$را علاوه میکنیم یعنی:

$$(a+b)+(c-b)=c+(-b)$$

از اینجا مطابق قانون اتحادی I_2 جمع وتفریق داریم که :

$$a+(-b)=c-b$$

اما $b+(-b)=0$نتیجه میشود که $a=c-b...(2.3)$.

به این ترتیب بعد از علاوه نمودن عدد b به عدد a عدد a از مجموع $a+b$ درحالت تفریق از عدد b قرار میگیرد و به این سبب عملیه تفریق عبارت از عملیه معکوس عملیه جمع میباشد .

و حالا به خواص جمع و ضرب اعداد حقیقی می پردازیم :

$1°$: عددیکه توسط خواص صفری بوجود می آید یگانه عدد حقیقی است .

فرض میکنیم که دو صفر وجود دارد $\bar{0}, 0$ قرار بند I_3 داریم که : $0+\bar{0}=0$, $\bar{0}+0=\bar{0}$

مطابق قانون اتحادی I_2 ، طرف چپ مساوات بین خود مساوی است . در نتیجه طرف راست

مساوات نیز مساوی میباشد ، پس $\bar{0}=0$ ثبوت است .

$2°$: عدد مقابل (متضاد) داده شده یگانه عدد فرضاً c,b مقابل به عدد a باشد پس :

$$a+b=0$$
$$a+c=0$$

پس ازمساوات اول داریم که: $(a+b)+c=0+c$ پس $(a+b)+c=c$ است .

از اینجا $(a+b)+b=c$ و $a+c=0$ در نتیجه $b=c$ ثبوت شد .

$3°$: برای هر عدد a مساوات $a=(-a)-$ صادق است .

از مساوات $a+(-a)=0$ که توسط عناصر متضاد مشخص گردیده و به اساس قانون تبدیلی جمع حاصل میشود که $(-a)+a=0$ این به آن معنی ست که : $a=-(-a)$ ثبوت است .

$4°$: برای هر عدد aمساوات $a-a=0$ صادق است .

در واقعیت $a-a=a+(-a)=0$ ثبوت است .

$5°$: برای هر عدد a داریم که $-(a+b)=-a-a$ پس عدد متضاد حاصل جمع دو عدد مساوی است به حاصل جمع متضاد عدد های آن .

حقیقتاً $a+b+(-a-b)=(a-a)+(b-b)=0$ ثبوت است .

$6°$: معادله $a+x=b$ که دارای R حل میباشد و همینطور یگانه حل آن $x=b-a$است.

درحقیقت اگر حل دارد پس در بند فرمول(2.2)و 2.3 این ثبوت یگانه راه حل معادله

$x+a=b$ است برای حقیقت یابی امتحان حتمی است که عدد $x=b-a$ حل نامیده میشود . این حقیقت قرار ذیل است :

$$a+(b-a)=a+[b+(-a)]=[a+(-a)]+b=0 \quad \square$$

برای عملیه ضرب همین قسم عملیه معکوس وجود دارد که عبارت از تقسیم میباشد که به طریقه ذیل دریافت میگردد :

برای هر جوره مرتب اعداد حقیقی a و b و $b\neq 0$ عدد $a\cdot\frac{1}{b}$ عبارت از تقسیم اعداد a بر b میباشد . و چنین نشان میدهد .

نوشته تقسیم a بر b در شکل $\frac{a}{b}$ عبارت از کسریکه دارای صورت a و مخرج b میباشد .

این خواص بطور مشابه خواص 1° – 6° که برای جمع صادق است و برای عملیه ضرب نیز صادق میباشد .

7° : عددی که توسط خواص یگانه بدست می آید عدد یک یگانه عدد است .

8° : عدد معکوس عدد داده شده که از صفر متفاوت است یگانه است .

9°: برای هر عدد $a\neq 0$ مساوات $\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$ صادق است .

10° : برای هر عدد $a\neq 0$ مساوات $\frac{a}{a}=1$ صادق است .

11°: برای عر عدد $a\neq 0$ و $b\neq 0$ مساوات : $\frac{1}{a}.\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$ صادق است . پس عدد معکوس حاصل تقسیم عدد از صفر متفاوت است مساوی به معکوس حاصل تقسیم آنها است .

12° : معادله $ax = b$ ، $a \neq 0$ درست های اعداد حقیقی دار اي يك حل ميباشد .

$$x = \frac{b}{a}$$

خواص $7^\circ - 12^\circ$ بطور مشابه به خواص $1^\circ - 6^\circ$ ثبوت میشود .

13° : مساوات $d \neq 0$ ، $b \neq 0$، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ صادق است .

نتیجه : (خواص اساسی کسر ها) :

اگر کسر $\frac{a}{b}$، $b \neq 0$ و عدد $c \neq 0$ دارای مساوات $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ باشد .

حقیقتاً ضرب هر دو طرف مساوات $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ در bd و با استفاده از تعریف تقسیم دارای

مساوات معادل بوده یعنی :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}bd \Leftrightarrow$ [illegible] $b \Leftrightarrow ad = cb$ □

تماماً ملاحظات خواص $1^\circ - 13^\circ$ [illegible]

کردن آنها نشان داده شده (مراجعه نمائید به: (1.4)) در این ارتباط راجع به ست های اعداد طبیعی در مقدمه (مراجعه نمائید به : پراگراف (1.3) در مطابقت به ترتیب ست ها ، ترتیب ست های تمام اعداد حقیقی (مراجعه نمائید به : خواص IV و پراگراف 2.1) واضیح معلومات ارائه گردیده است.

به این اساس اعداد طبیعی به ترتیب بعد از n ، $n+1$ میباشد که همین طور نشان داده شده است . ست اعداد طبیعی به حرف N نشان داده میشود . بر علاوه گرچه بطور فوق ثبوت شده که واحد یکتا است . میتوان در این باره چندین مثال راجع به واحد را مطالعه نمائیم . (به صورت عمومی چندین مثال هر عنصر از بعضی ست ها) اگرچه ممکن است افاده 1+1 را بنویسیم .

اعداد 0 ، ± 1 ، ± 2 عبارت ازست اعداد تام میباشند . ست اعداد تام توسط حرف Z نشان داده میشود.(مراجعه نمائید به: خواص 8°و پراگراف 2.3) نشان داده خواهد شد. تمام یادآوری که در پراگراف 2.1 راجع به خواص اعداد حقیقی صورت گرفته نتیجه میشود که $1>0$است .

عدد شکل m/n در حالیکه n و m اعداد تام باشد و $n \neq 0$ شود بنام اعداد ناطق یاد میشود. ست تمام اعداد کسری معمولاً توسط حرف Q ارائه میشود . اعدادیکه ناطق نباشد غیر ناطق نامیده میشود و ست آنها به حرف I نشان داده میشود . حالا چندین مثال در ارتباط به خواص عملیه جمع و ضرب را ارائه مینماییم :

14° - برای هر عدد a ، b ، c مساوات ذیل موجود است :

$$a(b-c)=ab-ac$$

بصورت کل :

$$a(b-c)=a(b-c)+ac-ac=$$
$$=a(b-c+c)-ac=ab-ac\square$$

15° - برای هر عدد a مساوات ذیل موجود است که : $a.0 = 0$

حقیقتاً یک عدد b را فرض میکنیم : پس $b - b = 0$ (مراجعه نمائید به: خواص 4°) به این اساس از خواص 14° واضح است که :

$$a.0 = 0(b - b) = ab - ab = 0 \ \square$$

از خاصیت 14° نتیجه میشود که بیانیه $1 \neq 0$ به تطبیق نمودن خواص $I - II$ بطور معادل بوجود می آید که این عدد متفاوت از صفر است .

طوریکه دیده میشود میتوان به اندازه کافی نشان داد که اگر عدد $a \neq 0$ موجود شود پس$1 \neq 0$ نیز امکان پذیر است این را ثبوت میکنیم .

اگر $a \neq 0$ موجود باشد پس در اینصورت از مساوات $a \cdot 1 = a$ نتیجه میشود که$1 \neq 0$ همینطو ر در حالت بر عکس خواص 15° واضح دارای مساوات $a.0 = 0$ است .

16° - حاصل ضرب $a \cdot b = 0$ است اگر یکی از عوامل ضربی آن صفر باشد .

مثلاً اگر $a \neq 0$ باشد پس حاصل ضرب $a \cdot b = 0$ در $\frac{1}{a}$ حاصل میکنیم که :

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}.0$$

17° - برای هر عدد a و b داریم :

$$(-a)(-b) = ab$$
$$(-a)(b) = -ab$$
$$(-1)a = -a$$

بصورت کل :

$$-ab = (-a)b + ab - ab =$$
$$(-a + ab)b - ab = -ab$$

در بخش خاص تدیل ضرب (تبدیل جای a به b) داریم که : $a(-b)=-ab$

با استفاده از این مساوات خواهیم داشت :

$$(-a)(-b)=-a(-b)=(-1)\left[a(-b)\right]=(-1)(-ab)$$
$$=-(-ab)=ab\,\square$$

از خواص I ، II ، III اعداد حقیقی و محاسبه فوق آنها میتوان نتیجه قواعد حساب کسر ها را بدست آورد .

پس شکل عدد : $b\in R\ \ ,\ a\in R\ \ ,\ b\neq 0\ ,\ \frac{a}{b}$ کسر است .

18° - جمع کسر ها به اساس فرمول صورت میگیرد یعنی :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\ \ ,\ \ b\neq 0\ \ ,\ \ d\neq 0$$

این مساوات را ثبوت میکنیم بخاطر این کار از تعریف تقسیم استفاده مینمائیم . از قابلیت توزیعی جمع نسبت به ضرب و خواص اساسی کسر ها داریم که :

$$\frac{ad+bc}{bd}=(ad+bc)\frac{1}{bd}=ad\,\frac{1}{bd}+bc\,\frac{1}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$$
$$=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ \square$$

19°- ضرب کسر ها توسط فرمول ذیل صورت میگیرد:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\ \ ,\ b\neq 0\ ,\ d\neq 0$$

با استفاده از تعریف تقسیم و خواص °11 داریم که :

$$\frac{ac}{bd}=ac\,\frac{1}{bd}\underset{(11)}{=}ac\,\frac{1}{b}\,\frac{1}{d}=\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)\left(c\cdot\frac{1}{d}\right)=\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}$$

20 - عنصر معکوس کسر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $\frac{a}{b}$ باشد عبارت است از کسر :

$\frac{b}{a}$ پس $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$ است .

این عملیه از قانون ضرب کسر ها نتیجه میشود .

21 - تقسیم کسر ها به اساس قانون صورت میگیرد . یعنی :

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \text{ ، } b \neq 0 \text{ ، } c \neq 0 \text{ ، } d \neq 0$$

با استفاده از تعریف تقسیم خواص و اصول گذشته ضرب کسر ها خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\ \square$$

فرضاً عدد حقیقی a و عدد طبیعی N داده شده باشد ، عدد a ، n دفعه در نفس خود ضرب شده عبارت از n توان عدد a و چنین مینویسند : a^n به این ترتیب :

$$a^n \overset{def}{=} \underbrace{a.a.....a}_{n\ \text{دفعه}}$$

حالا از خواص فوق جمع وضرب اعداد حقیقی اصول عملیه طاقت ها را بدست می آوریم :

22 - اگر m و n اعداد تام باشد در صورتیکه 0یا $n \leq 0m$ بوده و $a \neq 0$ باشد پس

داریم که :

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$$

اگر $m=0$ یا $n=0$ باشد پس طبق فورمول طوریکه ملاحظه میگردد درین حالت وقتیکه m و n اعداد طبیعی باشد به اساس تعریف توان داریم که :

$$a^m.a^n = \underbrace{a\ldots a}_{n\ \text{دفعه}}\underbrace{a\ldots a}_{m\ \text{دفعه}} = a^{m+n}$$

اگر $m<0\,,\,n>0\,,\,a\neq 0$ باشد پس به فرض اینکه $R=-m$ و با استفاده از خواص اساسی کسر ها در صورت امکان در یک وقت تقسیم صورت و مخرج کسر بالای عین عدد مساوی که مساوی به صفر نباشد درقیمت کسر تغییر وارد نمیشود . در صورتیکه $R\leq m$ باشد خواهیم داشت :

$$a^m.a^n = a^{-R}.a^n = \frac{a^n}{a^R} = \frac{\overbrace{a\ldots a}^{n\ \text{دفعه}}}{\underbrace{a\ldots a}_{R\ \text{دفعه}}} = a^{n-R} = a^{m+n}$$

اما در صورتیکه $R>m$ باشد داریم که :

$$a^m.a^n = \frac{a^n}{a^R} = \frac{1}{a^{R-n}} = a^{n-R} = a^{m+n}$$

اگر $m<0\,,\,n<0\,,\,a\neq 0$ باشد پس به فرض اینکه $R=-m$ و $i=-n$ است به اساس خواص 11° داریم که :

$$a^m.a^n = a^{-R}.a^{\iota} = \frac{1}{a^R a^{\iota}} = \frac{1}{a^{R+\iota}} = a^{-}\left(R+\iota\right) = a^{m+n}$$

بطور مشابه بر رسی میگردد که فرمول دوم خواص 22° بطور ساده نشان میدهد که خواص $\left(I_1\,,I_2\,,II_1\,,II_2\,,\ III\right)$ توسط استقرار عدد فرض شده حدود متناهی توسعه می یابد چگونگی آنها را توسط مثال قرار ذیل ارائه میداریم :

هرگاه هر عدد $a_1\,,a_2\ldots\ldots,\left(n\geq 2\right)a_n\,,\ b$ داریم که :

$$\left(a_1+a_2+\cdots a+a_n\right)b=a_1b+a_2b+\cdots a_nb\cdots(2.4)$$

به صورت کل در صورتیکه : n=2 باشد این فرمول در مطابقت به خواص III روشن است.

حالا فرمول (2.4) در مطابقت به n=R نشان میدهد که آن در مطابقت به n=R+1 میباشد.

با استفاده از خواص I_2 حاصل جمع برای R+1 (متناسب در نظر میگیریم) حالا به اساس خواص III با استفاده از فرض استقرایی داریم که :

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_r+1\right)b=\left[\left(a_1+\cdots+a_R\right)+a_R+1\right]b$$
$$=\left(a_1+\cdots+a_R\right)b+a_R+1^b=a_1b+\cdots+a_Rb+a_R+1^b$$

از فرمول (2.4) در حالت که :

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$$
$$nb=\underbrace{b+\cdots+b}_{n\text{ دفعه}}$$

پس ضرب یک عدد در عدد طبیعی n به جمع کردن این عدد n دفعه برگردانیده میشود .

تبصره : خاطر نشان میسازیم که خواص I –III پراگراف 2.1 بصورت عموم اعداد حقیقی را تشریح نکرده است ، درین صورت ست های دیگري بوجو می آیند که بطور کل بدست آوردن آن از خواص های I –III متفاوت است . اگر در آنها در همه جا بیانیه (عدد) به بیانیه (عنصر) در ست های مورد مطالعه تبدیل نمائیم عین مفهوم را دارا میباشد . که توسط یکی از خواص I –III برآورده میشود .

بعضی مثالهای ست ها که شرایط III,II,I را مهیا میسازد عبارت از اعداد ناطق ، اعداد مختلط و مجموع توزیع ناطق میباشد شکل تابع $f(x)=\dfrac{p(x)}{Q(x)}$ درینجا $p(x)$, $Q(x)$ چند حده منفی دارد .

عناصر تمام ست های یاد شده را میتوان جمع و ضرب نمود به دلیلی که این عمل میتواند تابع شرایط III,II,I باشد ست که مهیا کننده این تقاضا بوده ولو اگر از یک عنصر ترکیب شده و خلاف صفر باشد بنام ساحه یاد میشود .

به این ترتیب اعداد ناطق ، اعداد حقیقی ، اعداد مرکب و توزیع ناطق دارای فیلد میباشد .

حالا خواص جداکننده ساحه اعداد حقیقی در اطراف ساحه دیگر انتقال میدهیم (حالا خواص که توسط ساحه اعداد حقیقی ازدیگر ساحه ها جدا میشود تحلیل مینماییم) یکی از این خواص عبارت از خواص قابلیت ترتیب عناصر آنها میباشد .

2.3:خواص قابلیت ترتیب

در اینجا بعضی نتیجه گیری هاي از خواص قابلیت ترتیب IV وخواص جمع و ضرب III,II,I را استخراج می نماییم . قبل از همه مفاهیم مساوات را توسط مقایسه کمیات یاد آور میشویم .

اگر دو عدد a , b تحت شرایط طوري داده شده باشد که عدد a که از صفر کوچک است یا مساوی به صفر است و یا بزرگ از صفر است مشخص باشد ، زیرا اعداد در یک زمان نمیتوانند که هم بزرگ و هم کوچک از صفر باشد (در این جا IV دقیق است) . فرضاً عدد b عبارت از عدد است که بزرگتر از عدد a است $a:b>a$ اگر $b-a>0$ نسبت $a<b$ ویا مقابلاً $a>b$ بنام غیر مساوات یاد میشود . (همیشه غیر مساوی است)

خاطر نشان میسازیم که نسبت $a<b$ در حالت $a=0$ ویا $b=0$ باشد به نسبت اولیه IV مطابقت میکند حقیقتاً اگر مثال $b=0$ و $a<0$ در مفهوم اول میباشد . پس مطابق به خواص IV دارای غیر مساوات $-a>0$ مگر $-a=0-a$ زیرا که $0-a>0$ به اساس تعریف در نتیجه داریم که $a<0$ است و برعکس اگر $a<0$ باشد پس به اساس تعریف ذیل

$0 - a > 0$ نتیجه میشود که $-a > 0$ بوده پس به اساس خواص IV این شرایط غیر تساوی $0 > a$ در مفهوم اول میباشد .

حالا خواص اساسی مقایسه اعداد به اساس کمیات مورد مطالعه قرار میدهیم :

1° : اگر ندپس $acb>$ $\quad a > c\ b$ است .

این خاصیت عبارت است از اتصالیت قابلیت ترتیب (مقایسه به اساس کمیات) اعداد صورت میگیرد .

اگر $b > c, a > b$ باشد پس مطابق به تعریف به این معنی است که $0 < b - c > 0 \, , a - b > 0$

این مساوات مطابق خواص IV تشکیل میشود .

در اینصورت حاصل میداریم که : $0 < \left(a - b\right) + \left(b - c\right)$ است .

پس $a - c > 0$ این به آن معنی است که $a > c$ است .

2° :اگر $a > b$ باشد پس برای هر عدد داریم که :

$a + c > b + c$ است در حقیقت غیر مساوات $a > b$ به این معنی است که $a - b > 0$ طوریکه از خواص 5° از پراگراف 2.3 واضح است .

$a - b = a + c - c - b = \left(a + c\right) - \left(b + c\right) - \left(b + c\right) > 0$ است .

نظر به $a < b$ خوانده میشود که (a کوچک از b) است .

نظر به $a = b$ خوانده می شود که (a مساوی به b) است .

نظربه $a > b$ خوانده می شود که a بزرگ از b است .

موجودیت نسبت انتقال ترتیب «بزرگ » «کوچک» بین هردو عدد عبارت از خواص معمول قابلیت ترتیب ست های اعداد حقیقی و یا نسبت ترتیب میباشد . نوشته $a \le b$ به عین مساوات $a \ge b$ اطلاق میشود و به این معنی است که یا a=b یا $a < b$ است .

مثال ممکن است نوشت که : $2 < 5$ ، 2=2

یکی از غیر مساوات $2 \leq 2$ ،$5 \leq 2$ هم حقیقت دارد و همینطور معنی میدهد که دو بزرگ از دو نیست ، در حقیقت 2 از 5 خورد است .

°3 برای هردو عدد a و b که دارای دققیقیت یکی از این 3 ترتیب $a > b$ ، $a = b$ ، $a < b$ ، موجود است .

حقیقتاً فرضاً اگر دو عدد a و b داده شده باشد برای آنها تفاوت a-b مطابق خواص IV دارای جای دقیق یکی از نسبت های $0 < a-b$,$a-b=0$, $a-b>0$ میباشد .

هرگاه $a-b>0$ باشد پس به اساس تعریف $a>b$ است و هرگاه $a-b=0$ باشد پس به اطراف مساوات عدد b را علاوه میکنیم ، درینصورت حاصل میکنیم که a=b است و بالاخره هرگاه $0 > a-b$ باشد پس در آنصورت پی هم به اطراف غیر مساوات $0 \rangle a-b$ علاوه میکنیم . عدد a– و b (در صفحه خواص بعدی) حاصل میکنیم که :

$a-b>0$ این به آن معنی است که $a>b$ است . یا همینطور $a<b$ ثبوت است .

°4 - اگر $a<b$ پس $-a>-b$ میباشد .

حقیقتاً از $a<b$ به اساس تعریف داریم که $a-b>0$ است زیرا که ;

$$-a=-a+\left(-b\right)=\left(b-a\right)+\left(-b\right)\rangle 0+\left(-b\right)=-b \square$$

°5 - اگر $a<b$ و $c \leq d$ باشد پس ممکن است حاصل جمع حدود غیر مساوات از یک علامه حاصل نمائیم در واقعیت اگر $a<b$ و $c \leq b$ پس مطابق خواص °2 این بخش $a+c<b+c$ و $c+b \leq d+c$ زیرا که در ترتیب اتصالیت داریم که :

$$a+c<b+d \quad \square$$

6° - اگر $a<b$ و $c\geq d$ باشد پس $a-c<b-d$ بوده در این صورت میتوان غیر مساوات را به اشاره متضاد افاده نمود . حقیقتاً از $c\geq d$ مطابق خواص 4° داریم که $-c\leq -d$: در جمع غیر مساوات $a\langle b$ و $-c\leq -d$ حاصل مینمائیم که:

$a-c<b-d$□

7° - اگر $a<b$ و $c>0$ باشد پس $ac>bc$ در حقیقت مطابق خواص 4° این بخش $-c<0$ زیراکه به اساس خواص IV_2 داریم که :

$$a\left(-c\right)\langle b\left(-c\right)$$

مطابق خواص 17° پراگراف 2.2 حاصل میدارم که : $-ac\langle -bc$

نتیجه (مراجعه نمایدبه خواص 4° این بخش) پس $ac>bd$ ثبوت است . از خواص نتیجه میشود که اگر $b>0$ و $d>0$ باشد پس شرایط $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ مساوی به شرایط $ad<bc$ در حقیقت غیر مساوات دوم را از حاصل ضرب غیر مساوات اول حاصل مینمائیم طوریکه هردو طرف را در bd ضرب میکنیم :

طرف اول و دوم را به bd تقسیم مینمائیم از خواص 7° (در صورتیکه $a\neq 0$) و از خواص VI_2 قانون علایم در صورت ضرب اعداد حقیقی نتیجه میشود.

حاصل ضرب دو مضرب بر عین علامه یا در یک وقت مثبت ، یا در یک وقت منفی باشد حاصل شان مثبت است . لیکن حاصل ضرب دو مضرب که مختلف العلامه باشد (یکی منفی و دیگر مثبت باشد) منفی است .

8° - در ساحه مرتب همیشه غیرمساوات $1>0$ صادق است .

در حقیقت قسمیکه روشن است (مراجعه شود به .تبصره خواص °14 پراگراف 2.2 از شرایط موجودیت عنصر $a \neq 0$ این شرایط شامل تعریف ساحه ، (مراجعه نمائید به: اخیر پراگراف 2.2) نتیجه $1 \neq 0$ نشان میدهیم که غیر مساوات $1 < 0$ ممکن نیست . فرضاً بر عکس $1 < 0$ باشد میگیریم که $a > 0$ مطابق تعریف واحد عینیت داریم :

$$a.1 = a$$

به اساس قانون،حاصل ضرب دوعدد مثبت،مثبت است و حاصل ضرب دوعدد مختلف العلامه منفی ، منفي است پس $a < 0$ که عکس شرایط ثبوت شده است .

در اینجاعدد حقیقی دوباره هدف واقعی نیست که توسط اکسیوم $I - IV$ بیان میگردد .

ست که برای این اکسیوم ها صادق است بنام ترتیب ساحه یاد میشود.مثال ترتیب ساحه متفاوت است از ساحه اعداد حقیقی که بنام ساحه اعداد ناطق یادمیشود.همین قسم ساحه اعداد مختلط ،ساحه تابع ناطق بنام ترتیب ساحه یاد نمیشود .

بصورت کل از ترتیب ساحه ممکن است مفهوم کمیات مطلقه از عناصر آن بدست آید . به اساس تعریف و مطالعه خواص آن میتوان همیشه راجع به اعداد صحبت کرد لیکن نه به عناصر ترتیب ساحه آن .

هر عدد a به عدد $|a|$ نمایش داده شده و توسط فرمول ذیل ارائه میگردد .

$$|a| = \begin{cases} a, i & \geq 0a\text{ر} \\ -a, i & \langle 0a\text{ر} \end{cases}$$

عبارت از کمیات مطلقه عدد a ویا همین قسم مودول آن میباشد .

ردیف خواص کمیات مطلقه را خاطر نشان میسازیم :

$$|a| \geq 0 ....(2.5)$$

1° برای هرعدد aنسبت های ذیل انجام می پذیرد:

$$|a| = |-a| ....(2.6)$$

$$a \leq |a|, -a \leq |a| ...(2.6)$$

غیر مساوات (2.5) را ثبوت میکنیم اگر $a \geq 0$ پس $|a| = a \geq 0$. اگر همین قسم $a < 0$ باشد پس $|a| = -a > 0$ است .

مساوات (2.6) را ثابت میکنیم اگر $a \geq 0$ باشد پس $|a| = a$ و $-a \leq 0$ است به این سبب مطابق تعریف کمیات مطلقه و خواص 3 از پراگراف 2.2 حاصل میداریم که :

$$|-a| = -(-a) = a = |a|$$

اگرهمین قسم $a < 0$ باشد پس $|a| = -a$ و $-a > 0$ این به آن معنی است که:

$$|-a| = -a$$

غیر مساوات (7-2) را ثبوت میکنیم : اگر $a \geq 0$ باشد پس $|a| = a$ و $-a \leq 0 \leq a = |a|$ پس به اساس (7-2) اجرأت صورت میگیرد .

اگر همین قسم$a \geq 0$ باشد پس $|a| = -a$ $-a < 0 < -a = |a|$ است . به اساس (7-2) همینطور صورت میگیرد .

2° - برای هر عدداختیاری a و b داریم :

$$|a+b| \leq |a| + |b| ....(2.8)$$

$$|a| - |b| \leq |a-b| + ...(2.9)$$

از غیر مساوات ذیل مطابق به (2.7) داریم که :

$$a \le |a|$$
$$-a \le |a|$$
$$b \le |b|$$
$$-b \le |b|$$

از اینجا در بند خواص 5° از پراگراف (2.3) و خواص 5° از پراگراف 2.2 داریم که :

$$a+b \le |a|+|b|$$
$$-a(a+b) \le |a|+|b|$$

یکی از اعداد a+b یا (a+b)– منفی نباشد و مطابق نتیجه $c\,|a+b|$ غیر مساوات ثابت است

همین قسم غیر مساوات (2.9) عبارت از نتیجه (2.8) بوده که در نتیجه :

$$|a|-|b| = |(a-b)+b|-|b| \le |a-b|+|b|-|b| = |a-b|$$

بطور مشابه : $|a|-|b| \le |b-a| = |a-b|$

مطابق خواص 5° پراگراف (2.2) داریم که : $|a|-|b| = (|a|-|b|)$

یکی از اعد : $|b|-|a|$ و $(|b|-|a|)$– مطابقت دارد بـه $c = ||a|-|b||$که در زمینـه غیـر مساوات (2.9) ثابت است .

3°برای هر عدد a و b مساوات ذیل صادق است : $|ab| = |a||b|$

آنـرا از تعریـف کمیـات مطلقـه مطـابق بـه خـواص 17° از پراگـراف (2.2) و اصـول علایـم ضرب نتیجه میشود .

حالا خواص غیر مساوات که ساحه اعداد حقیقی را در اطراف تمام ترتیب ساحه دیگر را جدا میسازد مورد مطالعه قرار میدهیم .

2.4 خواص غیر مساوات اعداد حقیقی

فیلدساحه مرتب که توسط خواص V بیان گردیده عبارت از فیلد مرتب غیر مساوات میباشد . فیلد مرتب اعداد ناطق غیر مساوات فیلد مرتب شمرده نمیشود.در آنها ست A و B شامل بوده برا هر عنصر $a \in A$ و $b \in B$ طوریکه در آنها غیر مساوات $a < b$ صدق نماید به عوض c در آن چنین عدد ناطق r موجود نمیباشد بخاطریکه برای تمام $b \in B$ و $a \in A$ نسبت $a \le r \le b$ صادق است این خواص دارای مثال ست B بوده که متشکل از تمام اعداد مثبت ناطق r میباشد که بیان کننده غیر مساوات $r^2 > 2$ و ستA که به هر کدام از باقیمانده اعداد ناطق رابطه کلی دارد. همین قسم نبودن اعداد ناطق که مربع آنها معادل به عدد 2 است در اصطلاح ساحه تعریف ترتیب ست اعداد حقیقی میتوان بطور ذیل تعریف نمود:

تعریف 2 : ست اعداد حقیقی عبارت از ساحه ترتیب غیر مساوات میباشد . ساحه اعداد ناطق طوریکه یاد آوری شده توسط خواص غیر مساوات بوجود نمی آید لیکن ساحه اعداد حقیقی بوجود می آید زیراکه اعداد حقیقی منبع آنها میباشد که ناطق شمرده نمیشود . پس اعداد غیر ناطق نیز موجود است.به این ترتیب ست اعداد حقیقی عبارت از انکشاف ست های اعداد ناطق بوده به این معنی که ست اعداد ناطق عبارت از خصوصیت ست فرعی (سب ست) اعداد حقیقی میباشد .

درین گسترش خواص ترتیب عملیه جمع و ضرب محفوظ است . این نشان میدهد که اعداد حقیقی در تفاوت از اعداد ناطق واقع شده است . همین قسم لازم نیست تا بزرگترین ست را گسترش داد همین طور نگهداشت مفهوم خواص (ترتیب ، عملیه جمع و ضرب) این خواص اعداد تام حقیقی نظر به ترتیب عملیه جمع و ضرب آنها یاد میشود که ثبوت آنرا در پراگراف 3.8 مطالعه خواهیم نمود .

2.5 : تقاطع در ست های اعداد حقیقی

خواص غیر مساوات اعداد حقیقی را میتوان به اصطلاحات گوناگون تعریف نمود . تعریف این خواص را در اصطلاح که بنام تقاطع اعداد حقیقی یاد میشوند مورد مطالعه قرار میدهیم . قبل از همه این مفهوم را تعریف مینمائیم :

تعریف 3: دو ست $B \subset RR \subset$ عبارت از تقاطع ست های اعداد حقیقی R میباشد اگر:

1° - اتحاد ست BA تشکیل دهنده تمام ست های اعداد حقیقی R باشد پس در اینصورت $A \bigcup B = R$ است .

2° - هیچ یکی از ست های A , B خالی نباشد $B \neq \phi , A \neq \phi$.

3°- هر عدد ست A کوچک از هر عدد کیفی ست B میباشد .

اگر $a \in A$ و $b \in B$ باشد پس $a < b$ است .

خواص 1° : به این معنی است که هر عدد حقیقی به اندازه آخرین حد در یکی از ست های BA قرار دارد.(از خواص°3 واضیحاً نتیجه میشود که ست های BA غیر متقاطع اند).

$A \bigcap B \neq \phi$ واقعاً اگر چنین عنصر دریافت گردد که $X \subset A \bigcap B$ باشد . طوریکه $x \in B , x \in A$ باشد پس به اساس خواص 3° نتیجه میشود که $X < x$ است .

تقاطع ست های اعداد حقیقی متشکل از ست BA توسط A\B نشان داده میشود . ست A بنام ست پائین و ست B صنف ست بالایی مقطع داده شده یاد میشود مثال های مختصر مقاطع را میتوان بطریقه ذیل بدست آورد . یک عدد کیفی $a \in R$ مشخص میسازیم و آنرا اولاً به ست A طوریکه تمام اعداد $x \leq \alpha$ و دیگر به ست B طوریکه تمام اعداد $y \geq \alpha$ باشد میبریم .

$$\underline{\underline{A def}}\{\chi:\chi\leq\alpha\},\underline{\underline{B def}}\{y:y>\alpha\}\cdots(2.10)$$

همین قسم تعریف ست های BA مقطع بوجود می آورد که بر قرار شدن آن مستقیماً به شرایط 1° ، 2° ، 3° و تعریف 3 می انجامند .

و یا میتوان به عباره دیگر بیان کرد : بردن به ست A تمام اعداد $\chi<\alpha$ و به ست B تمام اعداد $y\geq\alpha$.

$$A=\{x:x<\alpha\},B=\{y:y\geq\alpha\}\cdots(2.11)$$

که دوباره ست های BA در هردو حالت (2.10 و 2.11) تشکیل مقطع مینماید.

میگویند که مقطع در عدد α صورت میگیرد چنین مینویسند : $\alpha=A/B$ دو خاصیت متقاطع که توسط چند عدد تشکیل میشود را یاد آور میشویم :

1° - در حالت(2.10) در کلاس A بزرگترین عدد وجود دارد که عبارت از عدد α و در کلاس B کوچکترین عدد وجود ندارد .

در حالت (2.11) در کلاس A کوچکترین عدد نیست و در کلاس B عدد بزرگتر وجود دارد که بنام α یاد میشود .

مثا ل حالت اول(2.10) ر ا مطالعه میکنم طوریکه α کوچکترین عدد در کلاس A نامیده میشود .

از فرمول اول 2.10 واضیح است که دوباره ست A را میدهد .

نشان میدهیم که در ست B عدد کوچکتر وجود ندارد بر عکس فرض میکنیم فرضاً در ست B عدد کوچکترین شامل است و آنرا به حرف β نشان میدهیم از شرط $\beta\in B$ به علت فرمول دوم 2.10 که به غیر مساوات $\alpha<\beta$ مطابقت داردنتیجه میشود که :

$$\alpha+\alpha<\alpha+\beta \quad \text{پس} \quad \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$$

از اینجا در مورد بند دوم فرمول 2.10 حاصل میداریم که : $\frac{\alpha+\beta}{2}\in B$

بطـور مشــابه $\alpha>\beta$ داریــم کــه : $\alpha+\beta<\beta+\beta$ پــس $\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ و همــین قســم β کوچکترین عدد در کلاس B میباشد .

پس $\frac{\alpha+\beta}{2}\in A$ که این نتیجه خلاف ادعا است .

2° - فقط عددی است که مقطع را حاصل میکند در حقیقت فرض میکنیم کـه مقطـع توسـط دو عدد مختلف تعیین میگـردد یعنـی : $\alpha=A/B$ و $\beta=A/B$ یـا فرض مثـال $\alpha<\beta$ باشـد در آنصورت طوریکه اثبات قبلی در مطابقت بـه غیـر مسـاوات $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ نشـان داده شده است ازغیر مساوات $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$ نتیجه میشود طوریکه در حالت (2.10) همینطـور در حالت (2.11) به عوض شرایط $\frac{\alpha+\beta}{2}\in B$ تذکر رفته است .

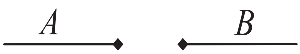
بطور مشابه از غیـر مسـاوات $\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ نتیجـه میشـود کـه $\frac{\alpha+\beta}{2}\in A$ ایـن اختلافـات بخاطر که ست BA را قطع نمیکند .

خواص غیر مساوات اعداد حقیقی که در بعضـی مقاطع دیگر تشـکیل شـده و ذریعـه یـک تعـداد اعداد دیگر حاصل میشود آنقدر اساسی نمیباشد .

یا به عباره دیگر غیر مساوات اعداد حقیقی را میتوان بطریقه ذیل نوشت :

VI_1 برای هر مقطع A/B ست اعداد حقیقی عدد α موجود است که این مقطع را حاصل میکند طوریکه $\alpha = A/B$ این عدد مطابق به ثبوت قبلی در بزرگترین کلاس پائین بوده پس در کلاس بالا عدد کوچکتر موجود نیست یا کوچکتر در کلاس بالایی است . در آنصورت در پائین عدد بزرگتر موجود نیست به این ترتیب اگر A/B از مقطع سا اعداد حقیقی باشد پس مطابق به خواص غیر مساوی که آنها در شکل V فرمول بندی شده است نمیتواند واقع شود مثل که در کلاس A عدد بزرگتر باشد و همزمان در کلاس B عدد کوچکتر باشد که هیمن قسم نمیتواند باشد زیرا که در کلاس A عدد بزرگ نبوده و همزمان در کلاس B عدد کوچکتر وجود ندارد .شکل ها را مطالعه نماید.

شکل (4 ، a)



شکل (4 ، b)

به این ترتیب میگویند که غیر مساوات اعداد حقیقی نشان میدهد که در ست های متذکره تغییرات فوری و کمی وجود ندارد.خلاصه اینکه هیچ خالیگاه ندارد مقطع A/B مفهوم هندسی آن تقسیمات مستقیم بروی محور عددی بالای دو شعاع که دارای مبدا و انجام مخالف الجهت بوده طوریکه یکی از آن ها مبدا شعاع بسته و دیگر آن انجام شعاع باز است .

در فرمول بندی خواص غیر مساوات اعداد حقیقی V همین قسم برابر به خواص VI_1 بنام پرنسیب غیر مساوات اعداد حقیقی دیدیکند[1] یاد میشود .

---

[1] (دیدیکند 1831-1961) ریاضیدان آلماني)

]

در آینـده مـا مفـاهیم اولیـه دیگـر راجـع بـه سـت هـای غیـر مسـاوات اعـداد حقیقـی (مراجعه نمائید به : پرگراف 3.7) خواهیم دید .

نشان میدهیم که خواص VI_1 مساوی به خواص V است .

فرضـاً ، اول خـواص V را تطبیـق مینمـاییم . فرضـاً مقطـع داده شـده A/B در خاصـیت 3° تعریف گردیده است . برای هر مقطع $a \in A$ و $b \in B$ غیر مساوات $a \langle b$ صدق میکند.

برای اینکه جوره ست BA شرایط فرمول بندی شده V را مهیا سازد باید چنین عدد α موجـود باشـد کـه بـرای تمـام $a \in A$ و $b \in B$ نسبت $a \le \alpha \le b$ صـدق نمایـد . عـدد α مطابق به خواص اول مقطع که در یکی از کلاس های A یا B قرار دارد :

هرگـاه $a \in A$ باشـد پـس بـرای تمـام $a \in A$ و $b \in B$ غیـر مسـاوات $a \le \alpha \le b$ صـادق است.

پس عدد α مقطع A/B را حاصل مینماید که عبارت از بزرگترین عدد در کلاس پائین است بطـور مشـابه هرگـاه $\alpha \in B$ باشـد پـس عـدد α همینطـور مقطـع A/B حاصـل مینمایـد کـه عبارت از کوچکترین عدددر کلاس بالای B است .

فرضاً حالا بر عکس شرایط VI_1 قابل تطبیق است و دو ست غیر خالی $b \subset R, a \subset A$ داده شده است که برای هر $a \in A$ و $b \in R$ غیر مساوات $a \le b$ قابل تطبیق است و به حرف B نشان داده میدهیم .

چنین ست عداد کـه $b \in B$ باشد برای هر $a \in A$ غیر مساوات $a \le b$ قابل تطبیق است (عدد b که توسط این خواص به وجود می آید عبارت از عددی است که ست A را از طرف بالا محدود ساخته است) طوریکه دیده میشود .

(2.12)......$b \subset B$ و توسط حرف A تماماً اعداد حقیقی باقیمانده نشان داده میشود.

طوریکه A= A/B حالا نشان میدهیم که ست   و   مقطع ها را در ست اعداد حقیقی تشکیل میدهد . و عدد α این مقطع را حاصل میکند که تأمین کننده شرایط متذکره که در فرمول بندی خواص V برای ست های A و B داده شده است . قبل از همه بررسی مینمائیم که ست های و تأمین کننده تماماً شرایط که باید حتماً ست ها آنرا تأمین کنندکه مقطع را تشکیل دهند .

حقیقتاً تماماً اعداد ست A^* با ست B مطابقت نمیکند زیرا که اتحاد آنها $A^* \cup B^* = R^*$ عبارت از تمام اعداد حقیقی R است طوریکه :

$$A^* \cup B^* = R \,..........(2\cdot 13)$$

2.6 : طاقت های ناطق اعداد حقیقی :

عدد b طوریکه $b^n = a$ (اگر واقعاً آنها موجود باشند) جذر n ام عدد a طاقت نامیده میشود

و چنین افاده میشود : $a^{1/n}$ or $\sqrt[n]{a}$

پس به اسا س تعریف داریم که : $\sqrt[n]{a} = a$

خاطر نشان میسازیم که در ست های اعداد حقیقی برای هر عدد $a \geq 0$ و برای هر عدد طبیعی n عدد $b \geq 0$ موجود باشد جذر n عدد a طاقت نامیده شده پس داریم که $\sqrt[n]{a}$

ما نمیخواهیم فعلاً راجع به ثبوت این مفهوم بسیار مهم بپردازیم گرچه میتوان آنرا در اینجا صرف یاد آوری کنیم که در پراگراف 7.2 یا آوری خواهد شد .

در بعضی حالت برای $a\rangle 0$ میتوان جذور داشته باشد .

بطور مثال : $\sqrt[3]{-8} = -2$

مگر جذور $\sqrt{-4}$ موجود نیست زیراکه عدد حقیقی $b = \sqrt{-4}$ وجود ندارد .

همین طور در حالت بر عکس مطابق مساوات $b^2 = -4$ که مخالف نظریه اصول علایم در ضرب میباشد .

هرگاه : $a \geq 0$ و $b = \sqrt[n]{4}$ و $b \geq 0$ باشد عدد 5 به مفهوم حسابی جذر n ام عدد a طاقت نامیده میشود . در آینده اعداد حقیقی مثبت تحت جذر میتواند با مفهوم حسابی آنرا دانست اگر اشتباه نکرده باشیم خواص جذور را فرمول بندی مینمائیم : فرضاً n و m اعداد طبیعی باشد و $a \geq 0$ و $b \geq 0$ باشند در آنصورت فرمول های ذیل صادق است .

$1^\circ\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

$2^\circ\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a}$

$3^\circ\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$4^\circ\ \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

$5^\circ\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

همه ء این مطالب بطور مشابه ثبوت میشود.بطورمثال فرمول اول راثبوت میکنیم :

فرضاً $b = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ مطابق تعریف جذر و خواص 22° از پراگراف 2.2 این به آن معنی است که $b^n = \sqrt[m]{a}$ که $b^{m.n} = a$ از این جا توسط هیمن تعریف جذر نتیجه میشود که $b = \sqrt[m.n]{a}$ به این ترتیب داریم که:ثبوت شد $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = b = \sqrt[m.n]{a}$

هرگاه : $a < 0$ باشد و تمام جذور شامل در یکی از فرمول $1^\circ - 5^\circ$ سرچشمه گیرد ، پس آنها مطابق به مفهوم انتخاب درست اند .

به موجودیت مفهوم طاقت اعداد تام و جذور آن مفهوم طاقت ناطق را مشخص میسازیم .

فرضاً $a>0$ و $r \in Q$ باشد پس داریم که : $r=\frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0$

$6^{\circ}\ a^{-r}=\frac{1}{n^{r}}$

$7^{\circ}\ a^{r_1} . a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$

درآنصورت:

$8^{\circ}\ \left(a^{r_1}\right)^{r_2}=a^{r_1 r_2}$

$9^{\circ}\ (ab)^{r}=a^{r} b^{r}$

خاصیت 6° را ثبوت میکنیم : اگر $r=\frac{m}{n}$ باشد و n, m عدد تام باشند و $n \neq 0$ باشد پس :

$$a^{-r}=a^{\frac{-m}{n}}=\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}}=\frac{1}{\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{r}} \quad \square$$

ثبوت شد .

از فرمول های 8° 7° و 9° صرف فرمول 7° را ثبوت میکنیم (باقیمانده بطور مشابه ثبوت میشود) .

اگر: $r_1=\frac{p}{q}$ ، $r_2=\frac{m}{n}$ باشد طوریکه :

$$p, q, m, n \in Z \quad n \neq 0 \quad ، q \neq 0$$

پس با استفاده از تعریف طاقت ناطق خواص جذور $2^{\circ}, 3^{\circ}$ و خاصیت 22° از پراگراف 2.2 حاصل میداریم که :

$$a^{r_1}.a^{r_2}=a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[q]{a^p}\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n.q]{a^{n.p}}\sqrt[n.q]{a^{m.p}}$$

$$=\sqrt[n.q]{a^{n.p+m.q}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}=a^{r_1+r_2}\square$$

از خاصیت 9° نتیجه میشود که:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$$

همینطور :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\left(ab^{-1}\right)^r=a^r\,b^{-r}=\frac{a^r}{b^r}\square$$

مسئله : توسط مقطع ثبوت نماید که برای هر عدد $a>0$ و هر عدد طبیعی n جذر $\sqrt[n]{a}$ موجود است .

2.7 : فارمول بینوم نیوتن

پولینوم که حاصل جمع دو عامل جمع شونده را بین خود نشان میدهد بنام دو حده یا بینوم نیوتن یاد میشود .

فارمول برای طاقت n ام حد بینوم $x+a$ را استخراج مینمایم که بنام فارمول بینوم نیوتن[1] یاد میشود.یعنی:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} a^{n-1} + a^n ...(2\cdot17)$$

توسط سمبول $\sum$ فورمول $(2\cdot17)$ را به شکل ذیل مینویسیم .

$$(x+a)^n = \sum_{R=0}^{n} C_n^R x^{n-R} a^R ....(2\cdot18)$$

دو شکل ثبوت این فارمول را مطالعه مینمایم :

اول : یورستکی (خیالی): دراین حالت باید از فارمول $(2\cdot11)$ استفاده میشود .

دوم : بطور مختصر بررسی فارمول $(2\cdot18)$ میباشد .

ثبوت اول: محاسبه کردن حاصل ضرب n بینوم در حد دوم که به حرف a با اندکس های مختلف نشان داده شده است :

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)...(x+a_n)...............(2\cdot19)$$

طوریکه واضیع است در ضرب پولینوم ها، درجه n ام نظر به x از حاصل ضرب پولینوم ها با محاسبه پی هم بدست میآید،ضرایب درجه های مختلف x ازبزرگترین طاقت آغاز میشود درحاصل ضرب $(x+a_1)(x+a_2).....(x+a_n)$، x^n حد میتوانیم تنهادر نتیجه ضرب x ام حد از هر قوس بدست آوریم زیرا ضریب x^n حد برابر به یک است :

---

(1) ی نیوتن (1643- 1727) فزیکدان ،میخانیک ،ریاضیدان انگلیسی

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)...(x+a_n)=x^n+.....$$

(x^{n-1}) حد در صورت محاسبه حاصل ضرب $(2\cdot19)$ میتوان تنها در آن حالت بدست آورد ، وقتیکه به تمام قوسها به غیر از یک انتخاب x از باقیمانده حدود اختیارنمود که میتواند a_n,a_2,a_1 باشد زیرا که ضریب در حاصل ضرب $(2\cdot19)$ در صورتیکه x^{n-1} برابر $a_1+a_2+a_n$ یعنی :

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3).....(x+a_n)=x^n+x^{n-1}(a_1+a_2+..a_n)$$

حد x^{n-2} را میتوان از تمام عوامل ضربی حاصل ضرب $(2\cdot19)$ به غیر از انتخاب دو حد x ازباقیمانده دو حد اختیاری بدست آورد .

زیرا که x^{n-2} از حاصل ضرب $(2\cdot19)$ عبارت از حاصل جمع تمام عوامل ضربی مختلف ممکنه a_{i2},a_{i1} که a_{i2},a_{i1} همیشه میتوان به افزایش اندکس در ردیف ها تنظیم نمود .

درین صورت داریم که : $l_1<i_1,i_2,i_3=1,2.........,n$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3).....(x+a_n)=x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i+x^{n-2}$$

$$\sum_{\substack{i_1i_2=1\\ i_1<i_2}}^{n}a_{i1}a_{i2}$$

عدد جمع شونده در حاصل جمع $\sum_{\substack{i_1i_2=1\\ i_1<i_2}}^{n}a_{i1}a_{i2}$ برابر به عددی است که به تمام امکانات جوره حدود مختلف از $a_n.......a_2,a_1$ انتخاب شده است پس در آن صورت داریم که عدد حساب شده C_n^2 میباشد .

بصورت کل حدی $k=1,2,....,n-1, x^{n-k}$ میتوان تنها اگر از تمام عوامل ضربی حاصل ضرب $(2\cdot19)$ به غیر از k حد انتخاب شود تا x حد را حاصل نمود و در باقیمانده حدود k اختیاری است زیرا که ضرایب در x^{n-k} در حاصل ضرب $(2\cdot19)$ عبارت از حاصل جمع a_{ij} بوده و حاصل ضرب تمام عوامل ضربي $a_{i1}, a_{i2}.....a_{ik}$ و عوامل ضربی a_{ij} ممکن است . درین حاصل ضرب افزایش اندکس ها را میتوان در ردیف ها تنظیم نمود .

پس داریم که :

$$i_1 < i_2 .... < i_R , i_j \in \{1,2,3,....n\}$$
$$j = 1,2,.........R$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3).....(x+a_n) = x^n + x^{n-1}\sum_{R=1}^{n} a_i + x^{n-2}$$
$$\sum_{i_1 i_2 = 1}^{n} a_{i1} a_{i2} + ... + x^{n-R} \qquad \sum_{\substack{i_1, i_2 \to i_R = 1 \\ i_1 < i_2 \to < i_R}}^{n} a_{i1}, a_{i2} ......a_{iR}$$

عوامل جمعی در حاصل جمع عبارت از ضرایب در x^{n-k} که مساوی به عدد n عنصر در R میباشد که مساوی به C_n^R است بلاخره حد اختیاری حاصل ضرب مطابق $(2\cdot19)$ دراین حالت به اندازه حاصل میشود وقتیکه عوامل ضربی حدود اختیاری در هر یکی از قوسها ضرب شود پس حدود اختیاری عوامل ضربی مطابق به$(2\cdot19)$برابر به $a_1, a_2 ... a_n$ است

پس :

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3).....(x+a_n) = x^n + x^{n-1}\sum_{R=1}^{n} a_i + x^{n-2}\sum_{\substack{i_1 i_2 = 1 \\ i_1 < i_2}}^{n} a_{i1} a_{i2}$$

$$+...+ x^{n-R} \sum_{\substack{i_1, i_2 \to i_R = 1 \\ i_1 < i_2 \to < i_R}}^{n} a_{i1}, a_{i2} ... a_{iR} + a_1 a_2 ....a_n ...(2\cdot20)$$

مجموعه عامل جمع شونده در هر مجموع به علامه $\sum$ نوشته شده که در مطابقت به $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots\ldots C_n^R \ldots\ldots C_n^{n-1}$ برای نوشتن ضریب ها لازم است که :

1- میتوان از مساوات $C_n^0 = C_n^n = 1$ استفاده نمود .

در این صورت $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = a$ از فورمول $(2\cdot 20)$ حاصل میداریم که :

$$\left(x+a\right)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^R x^{n-R} + \ldots + C_n^n a^n$$

به اساس فورمول $(2\cdot 18)$

میتود ثبوت دوم : به اساس استقراء ریاضی (به خاطر آنها باید نظریه فورمول $(2\cdot 18)$ رادرنظرداشت،پس در آنصورت مثل که ثبوت اول را دریافت نموده ام) درینصورت $n=1$ فارمول $(2\cdot 18)$ واضح است . همینطور درین حالت آن دارای شکل $x+a=a+x$ بوده فرضاً فارمول $(2\cdot 18)$ دریک تعداد $n \in N$ نیز صدق میکند .

$$\left(x+a\right)^{n+1} = \left(x+a\right)^n \left(x+a\right) \underset{(2\cdot 17)}{=}$$
$$\left(x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots C_n^R x^{n-R} a^R + C_n^{R+1} x^{n-R-1} a^{R+1} + \ldots a^n\right)\left(x+a\right)$$
$$= x^n + C_n^1 x^n a + C_n^2 x^{n-1} a^2 + \ldots\ldots + C_n^{R+1} x^{R-1} a^{R+1} + \ldots + a^n$$
$$= x^n + \left(C_n^1 + C_n^0\right) x^n a + \left(C_n^2 + C_n^1\right) x^{n-1} a^2 + \ldots + \left(C_n^{R+1} + C_n^R\right)$$
$$= x^{n-R} a^{R+1} + \ldots\ldots + a^{n+1}$$

بخاطر داریم که : (مراجعه نمائید به : ((1.19))) $C_n^R + C_n^R = C_n^{R+1} + 1$

حاصل میداریم که :

$$\Box\left(x+a\right)^n = x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n+1} a^2 + \ldots + C_{n+1}^{R+1} x^{n-R} a^{R+1} + \ldots + a^{n+1}$$

پس به اساس فورمول $(2\cdot 17)$ وقتیکه n به n+1 تغیر دهیم .

تبصره : دوخاصیت جالب ضرایب بینومیلی را در نظر میگیریم طوریکه :

$C_n^k, k = 0,1,2,3...n$

که حاصل جمع آنها برابر به 2^n در این صورت حاصل جمع ضرایب در جای مثبت قرار میگیرد که مساوی است به حاصل جمع ضرایب که در جای منفی قرار میگیرد .

همین قسم در فورمول بینوم نیوتن (2 . 18) $x = a = 1$ قرار گرفته است .

پس حاصل میداریم که : $\sum_{R=0}^{n} C_n^k = 2^n$

لیکن اگر $a = -1, x = 1$ قرار گیرد در این صورت داریم که : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)^m = m_1 + ... + mn + \sum^{n} = 0$$

تمرین 2:ثبوت نمائید که:

$$\frac{m!}{m_1! m_n!} x_1^{m1} .... x_n^{mn}$$

§3. ست های اعداد

3 . 1 گسترش اعداد روی مستقیم :

همیشه میتوان ست اعداد حقیقی Rرا با افزایش عناصر مناسب $+\infty, -\infty$ تکمیل نمود.که ذیلا نامگذاری میگردد.یعنی:

$$-\infty < +\infty$$
$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$
$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$
$$+\infty-(-\infty)=+\infty$$
$$-\infty-(+\infty)=-\infty$$
$$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$$
$$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$$

بطور مثال عملیه $(-\infty)+(+\infty)$ یا $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$ نا معین است .

علاوه بر آن برای هر $a \in R$ به اساس تعریف که توسط غیر مساوات $-\infty < a < +\infty$ فرض شده است .

$$a+(+\infty)=+\infty+a=\infty$$
$$-\infty+a=a+(-\infty)=-\infty$$
$$a(+\infty)=(+\infty)a=+\infty$$
$$a(-\infty)=(-\infty)a=-\infty$$

لایتناهی $+\infty, -\infty$ همیشه (به عدد لایتناهی) ارایه میگردد.

ست اعداد حقیقی Rراکه توسط افزایش $+\infty, -\infty$ تکمیل گردیده عبارت از گسترش ست میباشد (یا گشترس اعداد بطور مستقیم) و توسط $\bar{R}$ نشان داده میشود.

عناصر $-\infty, +\infty$ همیشته بنام گسترش اعداد بطور مستقیم یاد میشود. ازدیاد بی نهایت نقاط بنام گسترش اعداد بطور مستقیم نامیده میشود .

و جهت مخالف متناهی نقاط نیز بنام گسترش اعداد بطور مستقیم R نامیده میشود .

اگر اشتباه نکرده باشیم و غیره .

در آینده درک ما راجع به اعداد بدون قید وشرط همیشه اعداد حقیقی متناهی خواهد بود.

2 . 3 فاصله بین اعداد حقیقی .ومجاورت

در اینجا بعضی از تعریفهای اساسی ست های فرعی اعداد حقیقی که در آینده آنها را همیشه خواهیم دید بیاد می آوریم :

اگر $a \le b, a \in R, b \in R$ باشد پس ست $\{x : a \le x \le b\}$ عبارت از قطعه گسترش اعداد بطور مستقیم R بوده و $[a,b]$ نشان داده میشود .

پس در آنصورت داریم که : $[a,b] \overset{def}{=} \{x : a \le x \le b\}, a \in \bar{R}, b \in \bar{R}$

در حالت که : $a = b$ باشد قطعه $[a,b]$ از یک نقطه تشکیل یافته است اگر $a < b$ باشد پس ست $\{x : a \le x \le b\}$ بنام انتروال یاد میشود .

وتوسط(a,b)نشان داده میشود. درآنصورت داریم که: $(a,b) \overset{def}{=} \{x : a \le x \le b\}$

انتروال (a,b) بنام انتروال بسته (در داخل است) $[a,b]$ یاد میشود .

$$[a,b) \overset{def}{=} \{x : a \le x \le b\}, (a,b) \overset{def}{=} \{x : a \le x \le b\}$$

انتروال نیمه بسته:

بنام انتروال نیمه بسته یاد میشود قطعه $[a,b)$ انتروال (a,b) و انتروال نیمه بسته $[a,b)$ ،

$(a,b]$ عبارت از فاصله بین نقاط a و b میباشد طرف چپ a و طرف راست b طوریکه

$a<x<b$ آنها نقاط داخلی است که بروی قطعه خط واقع است.

اگر a و b متناهی باشد در آنصورت $b\in R$, $a\in R$ پس فاصله از انجام هاي a و b همینطور بنام فاصله متناهی یاد میشود و عدد $a-b$ طول آنها میباشد .

اگر یکی از a یا b لایتناهی باشد پس فاصله با انجا های a و b بنام لایتناهی یاد میشود .

تبصره : فاصله تمام انواع گسترش اعداد بطور مستقیم توسط خواص ذیل بوجود میآید .

اگر نقاط $\alpha\in R$ و $\alpha<\beta,\beta\in R$ به یک تعداد از فواصل با انجام های $\alpha\in R$ و $\beta\in R$ قرار داشته باشد پس تمام قطعه $[\alpha,\beta]$ بالای این فاصله واقع است که هر نوع فاصله مستقیماً از تعریف آن نتیجه میشود .مفاهیم مهم در آینده عبارت از مفاهم ε حوالی نقاط گسترش اعداد بطور مستقیم میباشد .

اگر $a\in R$ باشد در آنصورت a عدد حقیقی شمرده میشود .

ε حوالی ، $U(a,\varepsilon)$[1] ، $\varepsilon>0$ باشد عدد a انتروال $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ نامیده میشود .

به اساس تعریف داریم که : $U(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

هرگاه : $a=+\infty$ باشد پس $V\left(+\infty,\varepsilon\right)=\left[\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right]$

و اگر $a=-\infty$ باشد پس $V\left(-\infty,\varepsilon\right)=\left[-\infty,\frac{1}{2}\right]$

[1] ارائه نمودن حوالی نقاط توسط سمبول v از نقاط (vnebung) نام است گرفته شد .

به این ترتیب در تمام حالت وقتیکه a عدد حقیقی باشد یا وقتیکه a یکی از اعداد لایتناهی $+\infty, -\infty$ باشد به کوچک شدن عدد ε طبق هدایت ε حوالی $V(a,\varepsilon)$ کوچکتر میشود .

هرگاه $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ باشد . $V(a,\varepsilon_1) \subset (a,\varepsilon_2)$

مناسب خواهد بود تا همیشه یکی از لایتناهی (بدون علامه) ∞ ست اعداد حقیقی را تکمیل نماید که هر دوی آنها و ε حوالی در صورتیکه $\varepsilon > 0$ باشد طوریکه $V(\infty,\varepsilon)$ توسط مساوات ذیل دریافت میگردد ، یعنی :

$$V(\infty,\varepsilon) = \left\{ x : x \in R, |x| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}, V\{\infty\}$$

به عباره دیگر ε حوالی $V(\infty,\varepsilon)$ از انتروال لایتناهی $\left(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}\right),\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right)$ و خود عنصر ∞ تشکیل شده است .

این عنصر همیشه بنام لایتناهی دور اعداد بطور مستقیم نقاط یاد میشود .

فرق لایتناهی با $+\infty$ و $-\infty$ و لایتناهی ∞ بدون علامه در ارتباط با ردیف اعداد حقیقی متناسب نیست .

بصورت کل ε حوالی متناهی ، یا لایتناهی بوده دور شدن اعداد بطور مستقیم عبارت از نقطه حوالی آن میباشد . و همیشه بطور ساده توسط $V(a)$ ارائه میگردد .

و گاهی میتوان توسط دیگر حروف بطور مثال v و w ارائه نمود .

اکثر اوقات مناسب است نه تنها حوالی $V(a)$ نقطه متناهی را نام برد بلکه انتروال مرکزی نقطه a را و نیز تمام انتروال تشکیل دهنده آن یاد آوری نمود .

واضیح است که حوالی چنان نقطه اختیاری که تشکیل کردن ε آن در حوالی که $\varepsilon > 0$ میباشد هم ردیف تعریف فوق راجع به حوالی لایتناهی ست اعداد حقیقی تکمیل میشود . بعضی اوقات حوالی لایتناهی $+\infty$ و $-\infty$ در خود ست های اعداد حقیقی مورد مطالعه قرارمیگیرد .

$$V(\infty) \cap R$$
$$V(+\infty) \cap R$$
$$V(-\infty) \cap R$$

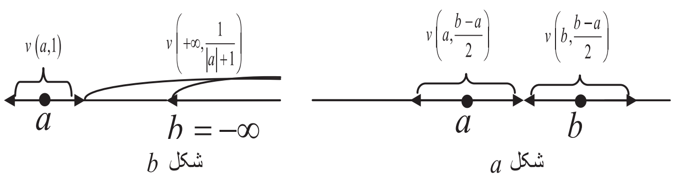
ولی خود لایتناهی ، متناهی درین حوالی بدست نمیآید .

در زمینه تعریف داده شده را تعمیم میدهیم (یاد آور میشویم که تعمیم در ثبوت لیما ذیل حقیقت است . وقتیکه راجع به حوالی لایتناهی ، حوالی ست های اعداد حقیقی معلومات را کسب مینمایم)

شکل لیما بعضی از خواص مهم حوالی را فورمول بندی مینمایم :

فرضاً در نقاط مختلف گسترش اعداد بطور مستقیم (گسترش توسط دو لایتناهی با علائیم و یا تنها توسط یک لایتناهی بدون علامه) حوالی غیر متقاطع را بوجود میآورد .

ثبوت : اولاً حالت گسترش اعداد بطور مستقیم R را مورد مطالعه قرار میدهیم .



شکل اعداد حقیقی R به افزایش دو لایتناهی با علایم آن بدست میآید نشان میدهیم که برای

هر $a \in R$ و $b \in R$ و $a < b$ باشد طوریکه $\varepsilon_1 > 0$ و $\varepsilon_2 > 0$ موجود باشد .پس در

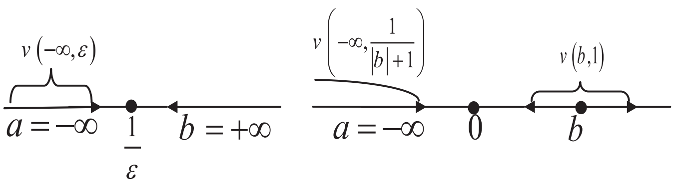
آنصورت داریم که : $V\left(a,\varepsilon_1\right) \cap V\left(b,\varepsilon_2\right) = \phi$

درحقیقت هرگاه a وbعدد حقیقی باشد پس میتوان نوشت که: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{b-a}{2}$

مطابق شکل $\left(a,b\right)$ اگر a عدد حقیقی باشد و $b = +\infty$ باشد پس در خصوص دستور

العمل $\varepsilon_1 > 0$ و $\varepsilon_2 > 0$ برابر است بطور مثال به $\varepsilon_1 = 1$ و $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{|b|+1}$ مطابق شکل

:



شکل b شکل a

هرگاه $a = -\infty$ و یک عدد حقیقی باشد پس میتوان نوشت که : $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{|b|+1}$

و $\varepsilon_2 = 1$ مطابق شکل z باالاخره هرگاه $a = -\infty$ و $b = +\infty$ باشد . پس برای هر

$\varepsilon > 0$ افاده حوالی $\left(-\infty,\varepsilon\right)V$ و $\left(+\infty,\varepsilon\right)V$ قطع میکند مطابق شکل $\left(b,Z\right)$.

هرگاه همین قسم اعداد بطور مستقیم R از یک لایتناهی اضافه شود پس کافیست حالت

$b = \infty, a \in R$ دیده شود .

(همین قسم حالت $b=+\infty, a\in R$ زیاد دیده شود)

$b=+\infty, a\in R, b\in R$ میتوان در هرکدام دو باره $\varepsilon_1=1$ و $\varepsilon_3=\dfrac{1}{|A|+1}$ گرفته

شود .

تبصره 2 : در حالیکه $b\in r, a\in R, a<b$ بوده باشد . و آنها حوالی متقاطع نباشد یعنی:

$$V\left(a,\varepsilon_1\right)\cap V\left(b,\varepsilon_2\right)=\phi$$

برای هر $y\in V\left(b,\varepsilon_2\right), x\in V\left(a,\varepsilon_1\right)$ واضح است که مساوات فوق صادق است .

صادق بودن آن مستقیماً به بررسی تمام حالات ذیل مربوط است در صورتیکه : $b=+\infty, a\in R, b\in R$ و در صورتیکه $b\in R, a=-\infty$ و در صورتیکه $b=+\infty, a=-\infty$ باشد به آسان میتوان معتقد شد که تقاطع دو نقاط حوالی (متناهی ، یا لایتناهی مخصوص) همین قسم حوالی این نقاط شمرد .

3.3 : ست های محدود و غیر محدود

در اول بدون ردیف بندی ضروری برای معلومات بیشتر بعضی از خواص ست های عددی را مطالعه مینمایم :

تعریف 1 : اگر برای ست فرعی x چنین عدد حقیقی b موجود شود، که آن از هر عدد $x\in X$ کوچک نباشد . در آنصورت برای هر $x\in X$ غیر مساوات $x\le b$ صدق مینمایند .

پس در آنصورت ست x بنام ست محدود از طرف بالا یاد میشود .

و عدد b محدود کننده بالای ست X میباشد . توسط سمبولهای منطقی تعریف ست های محدود از طرف بالا به شکل ذیل نوشته میشود .

X محدود از طرف بالا است : $\Leftrightarrow \; \exists b \in R \, \forall x \in X \; : x \leq b$ از اینجا X غیر محدود از طرف بالا است $\Leftrightarrow \; \forall b \in R \, \exists x \in X \; : x > b$ در آنصورت ست X محدود از طرف بالا نیست .

هرگاه چنان عدد b موجود باشد و چنین عدد $x \in X$ یافت شود که $x > b$ شود در آنصورت ست محدود از طرف بالا یاد نمیشود .

ست که غیر محدود از طرف بالا باشد ست نامیده میشود .

یاد آور میشوم که اگر عدد b محدود از طرف بالای ست x باشد ، در آنصورت برای تمام $x \in X$ غیر مساوات $x \leq b$ و $b < b'$ صادق است

پس برای همه $x \in X$ غیر مساوات $x \leq b'$ واضح است .

در نتیجه عدد b' همین قسم محدود از طرف بالا ست x است اگر ست x دارای عدد b باشد طوریکه از تمام اعداد دیگر x کوچک نباشد در آنصورت $b \in x$ و برای همه $x \in X$ غیر مساوات $x \leq b$ صادق است پی عدد b عبارت از بزرگترین یااعداد ست X طوریکه $x \; : b = \max X$ باشد.

واضح است که اگر در ستX یگانه عدد بزرگ موجود شود پس خود ست x در ین حالت محدود از رف بالای اعداد است .

دیگر یاد آور میشوم که اگر ست X محدود از طرف بالا نباشد پس مطابق به تعریف این معنی دارد که برای هر عدد $b \in R$ در اخرین اندازه چنین یک عنصر $x \in X$ موجود شود که $x > b$ باشد .

چیزیکه مورد توجه است آن این است که همین قسم عناصر بی نهایت زیاد است .

حقیقتاً فرض میکنم که اعداد متناهیX $\in$ $x_1,......,x_n, n \in N$ زیاد واقع شده است یا

به عباره دیگر برای تمام $x \in X, x \neq x_R$ ، $R = 1,2,.....n$ غیر مساوات $x \le b$

صادق است . در آن صورت واضح است که برای $b_0 = \{b_1 x_1,......,x_n\}$ و تمام

$x \in X$ غیر مساوات $x \le b_0$ باشد در آنصورت خلاف فرضیه ستXمحدود واقع میشود

بطور مشابه به ست های محدود ازطرف بالا ست های محدود از طرف پائین میباشد .

تعریف 2 : اگر برای ست فرعیX اعداد حقیقی چنان عدد a موجود شود که این عدد

بزرگتر از هر عدد $x \in X$ نباشد در آنصورت برای هر $x \in X$ غیر مساوات $a \le x$

صادق است پس ست x محدود از طرف پائین میباشد و عدد a محدود کننده از طرف پائین

این ست نامیده میشود .

ست که محدود از طرف پائین نباشد ، این ست بنام ست غیر محدود از طرف پائین ست یاد

میشود .

توسط سمبول های منطقی تعریف ست های محدود از طرف پائین به شکل ذیل نوشته میشود.

X محدود از طرف پائین است: $\exists a \in R \forall x \in X : x \ge a \Leftrightarrow$

اگر X غیر محدود از طرف پائین باشد : $\forall a \in R \exists x \in X : x < a \Leftrightarrow$

در آنصورت ست x غیر محدود از طرف پائین است اگر چنین عدد $a \in R$ موجود شود و

چنان عنصر $x \in x$ پیدا شود که غیر مساوات $x \rangle a$ صدق نماید .

واضح است که اگر عدد a در ست x محدود از طرف پائین باشد پس هر عدد اختیاری $\bar{a} \langle a$

همین قسم محدود کننده از طرف پائین این ست میباشد.

اگـر در سـت X عـدد a موجـود شـود طوریکـه تمـام اعـداد دیگـر از X بزرگتـر نباشـد در آنصورت $a \in x$ و برای هر $x \in x$ غیر مساوات $a \leq x$ صدق نماید پس عدد a عبارت از کوچکترین یا اعداد اصغری ست : $x : a = \min x$ نامیده میشود .

اگر در ست x عدد کوچکتر موجود باشد ، پس آن یگانـه است و خـود ست x در ین حالت محدود از طرف پائینی این اعداد است .

تعریف 3 : ستی که محدود از طرف بالا و پایین باشد. ست محدود نامیده میشود.

به عباره دیگر ست $X \subset \mathbb{R}$ محدود نامیده میشود اگر چنین اعداد a و b موجود شود کـه بـرای هر $x \in x$ غیر مساوات $a \leq x \leq b$ صدق نماید ست کـه محـدود نیست غیر محدود نامیده میشود. واضح است که ست غیر محدود میتوان غیر محدود از طرف بالا و یا از طرف پـائین و یا تنها از طرف بالا یا پائین باشد .

تمرین 1 . ثبوت نمائید کـه سـت $X \subset \mathbb{R}$ محـدود اسـت وقتیکـه تنهـا و تنهـا چنـان عـدد $a \geq 0$ موجود شود که برای هر $x \in X$ غیر مساوات $|x| \leq a$ صدق نماید .

مثال ست محدود عبارت ازانتروال $[1.2]$ و انتـروال (0.1) ست قیمت تـابع $\sin x$ میباشد .

انتروال $(-5i + \infty)$ لایتناهی ست هـای اعداد طبیعـی 1 ،2 ،3 عبـارت از سـت هـای محـدود از طرف پائین میباشد ، ولی غیر محدود از طرف پائین نیست . بالاخره ست هـای تمـام اعداد تام ، تمام اعداد ناطق ، ماهیت مسئله ست هـای غیـر محدود از طـرف بـالا و از طـرف پـائین عمومیت دادن به فرمول هـای قیمت ست هـای محـدود از طـرف بـالا بـه طـرف پـائین و بطـور خلاصـه ست هـای محـدود در سـت هـای فرعـی ، گسترش سـت هـای بـه $\overline{R}$ اعداد حقیقـی R (مراجعه نمائید به: پراگراف 2.5) .نشان داده شده است.

آوردن مطالب پر مفهوم ، همین قسم تمام ست های فرعی ، گسترش ست های اعداد حقیقی سمبول های منطقی محدود $+\infty$ و سمبول های $-\infty$ بشمارمیرود.زیراکه محدودیت ساده در $\overline{R}$ یک نوع مفاهیم بزرگتر (کوچکتر) ،عناصر ست مطالب با مفهوم است . در این حالت تعریف فرمول با تعریف موجوده برای ست های فرعی ست های غیر گسترش یافته اعداد حقیقی مطابقت میکند . متناهی و لایتناهی عدد $c \in X \subset R'$ عبارت از بزرگتر (کوچکتر) در ست $x \subset R'$ میباشد اگر برای هر $x \in X$ غیر مساوات $x \le c$ صدق ننماید.(مطابقت با $x \ge c$) است. در آینده از مفاهیم استفاده خواهیم کرد .

3.4 سرحد فوقانی و تحتانی ست های عددی :

تعریف 4 : کوچکترین وسط سرحد فوقانی ست محدود از طرف بالا ست $x \subset R$ میباشد که بنام سرحد فوقانی این ست یاد شده و توسط سمبول منطقی ذیل نشان داده میشود: $\sup X$ و

$\sup\limits_{x \in x}\{x\}$ یا .

تعریف 5 : بزرگترین وسط سرحد تحتانی ست محدود از طرف پائین ست $x \subset R$ بوده که از طرف پائین محدود است بنام سرحد تحتانی این ست یاد گردیده و آنرا توسط سمبول :

$\inf x$ یا $\inf\limits_{x \in x} x \{x\}$ نشان داده میشود .

همیشه سرحد فوقانی (تحتانی) ست سرحد دقیق فوقانی (تحتانی) این ست نامیده میشود .

خاطر نشان میسازیم که در تعریف متذکره سوال اعداد بررسی نمیشود و هدف در باره موجودیت بزرگتر(کوچکتر) محدود از طرف بالا (پائینی)ست داده شده نیست .

تعریف 4-5 را تحلیل مینمائیم فرضاً : $\beta = \sup x$ باشد .

در اول این به آن معنی است که عدد β ست x را از طرف بالا محدود مینماید در آنصورت برای هر $x \in x$ غیر مساوات $x \leq \beta$ صادق است .

در دوم : β از بزرگترین سرحد محدود از طرف بالا ست x در اطراف تمام اعداد میباشد در آنصورت چنان عدد $\beta' \langle \beta$ موجود شود که ست x را محدود از طرف بالا نباشد به این معنی که در ست x چنان عدد x پیدا میشود که $\beta' \langle x$ باشد به این ترتیب «به شکل حسابی »

تعریف '4 : عدد β سرحد فوقانی ست x نامیده میشود اگر:

$$1^{\circ}. \forall x \in X : x \leq \beta$$
$$2^{\circ}. \forall \beta' < \beta \exists x \in X : x > \beta'$$
$$2'. \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x > \beta - \varepsilon$$

تعریف: 2° میتوان به شکل ذیل نوشت :

برای اینکه به متعادل بون شرط 2° و $2'$ متیقن شویم کافیست که هردو β و β' را در رابطه $\beta' = \beta - \varepsilon$ وضع نمائیم از اینجا نتیجه میشود که شرط $\varepsilon \rangle 0$ معادل به شرط $\beta' < \beta$ است .

بطور مشابه اگر $\alpha = \inf X$ باشد پس مطابق تعریف 5 در اول عدد α محدود از طرف پائین ست x است و در دوم عدد کیفی $\alpha < \alpha'$ محدود کننده از طرف پائین این ست نیست عدد α در اطراف تمام چنین اعداد بزرگتر نامیده میشود این به آن معنی که برای هر $\alpha' > \alpha$ چنان $x \in X$ پیدا میشود که $x < \alpha'$ شود نتیجه تعریف 5 را میتوان بطریق ذیل تعمیم داد .

تعریف 5:عدد αسرحد تحتانی ست X میباشداگر:

$$1^{\circ}\ \forall x \in X : x \geq \alpha$$
$$2^{\circ}\ \forall \alpha' < \alpha\ \exists x \in X : x < \alpha'$$

شرط 2° معادل $2'$ است .

$$2' \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : x < \alpha + c$$

برای اینکه به معادل بودن شرط 2°و $2'$ متیقن شد کافیست که $\alpha' = \alpha + \varepsilon$ را گرفته شود.

چند تبصره مشخص و روشن را در زمینه یاد آور میشویم :

اگر ست غیر خالی $x \subset R$ سرحد فوقانی $\beta' \in \beta$ (سرحد تحتانی $\alpha \in R$) داشته باشیم طوریکه آن محدود از طر ف بالا(پائین) باشد (این نتیجه از شرط 1° تعریف $4'$ و تعریف 5°) است .

اگر $\beta = \sup x$ $(\alpha = \inf x)$ و عدد b (عددa) محدود کننده بالای (پائین) ست x باشد پس $\beta' \leq b$ (مطابق $a \leq \alpha$) بوده از اینجا نتیجه میشود که سرحد فوقانی (تحتانی) ست عبارت از کوچکترین (بزرگترین) عدد در اطراف تمام اعداد محدود کننده فوقانی (تحتانی) ست داده شده میباشد . اگر در ست عدد کوچکتر (بزرگتر) موجود شود پس آن عبارت از سرحد فوقانی (تحتانی) این ست میباشد .

چنین معلومات در جزئیات ست های متناهی جای دارد .

ست های متناهی اعداد اختیاری کوچکتر و بزرگتر دارای اعداد سرحد فوقانی و (تحتانی) میباشد .

در پرانسیپ نه بلکه در پراکتیک اگر در ست داده شده متناهی به اساس کدام یکی از خواص های عناصر ، عناصر آنها معین باشد میتوان دریافت کرد .

ست تمام اعداد حقیقی مثبت (توسط حرف R_+ نشان میدهد) که از طرف پائین توسط عدد صفر محدود شده باشد برای هر $x \in R_+$ دارای موقعیت $x > 0$ است علاوه بر آن $\inf xR_+ = 0$ ست R_+ همینطور ست اعداد غیر محدود از طرف بالا بوده که از طرف بالا محدود کننده تمام اعداد مثبت است. اگر $x = [a,b]$ قطعه باشد پس $\sup x = b, \inf x = a$ میباشد .

اگر $x = [a,b]$ انتروال باشد پس همین قسم $\sup x = b, \inf x = a$ است اگر بالاخره ست x از دو نقطه ab طوریکه $a \le b$ تشکیل شده باشد . در آنصورت $x = \{a\} \cup \{b\}$ پس دوباره $\sup x = b, \inf x = a$ است .

این مثال نشان دهنده سرحد بالا (پائین) ست میباشد .

همینطور میتوان که ست در خود ست واقع شود ویا در آن واقع نشود .

اگر $\xi = A/B$ مقطع درناحیه اعداد حقیقی طبق (مراجعه نماید به پراگراف 2.5) باشد پس :

$$\xi \sup A = b, \inf B \text{..............}(3.1)$$

حالا سوالی را مطرح میکنیم : آیا همیشه در ست های اعداد سرحد فوقانی (تحتانی) موجود است ؟

اگر ست ها از طرف بالا (پائین) محدود نباشد ، پس عددی در آن موجود نیست که آنرا از طرف بالا و پائین محدود سازد . به دیلیلی که در مجاورت آنها عدد بزرگتر و کوچکتر

موجود نمیشود . به این ترتیب اگر ست از طرف بالا پائین محدود نباشد پس آنها سرحد بالای (پائینی) ندارد .

در این حالت جواب برای سوال مطرح شده کاملاً ساده است . اگر همین قسم ست ها از طرف بالا (پائین) محدود باشد جواب توسط قضیه ذیل داده میشود .

قضیه 1 : تمام ست های عددی غیر خالی محدود از طرف بالا دارای سرحد فوقانی است . و تمام ست های عددی غیر خالی محدود از طرف پائین دارای سرحد تحتانی است .

ثبوت : فرضاً X ست عددی غیر خالی محدود از طرف بالا ست باشد توسط Y افاده میکنیم . ست تمام اعداد محدود کننده بالای ست X ، ست X محدود از طرف بالا است به این خاطر Y غیر خالی است . هر عنصر $y \in Y$ ست X را از طرف بال محدود میسازد پس در آنصورت برای هر عنصر $x \in X$ غیر مساوات $y \in Y$ صادق است .

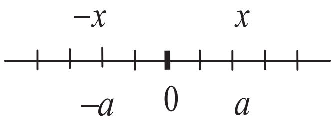
عناصر x و y عبارت از عناصر دلخواه بوده مطابق ست yوx میباشد . به این سبب در بند خواص متمادیست . اعداد حقیقی (مراحعه نمائید به :خواص V در پراگراف 2.1) چنان عدد β موجود است که برای هر $x \in x$ و $Y \in y$ غیر مساوات $x \leq \beta \leq y$ ....(2.3.) بجا خواهاد بود.

تطبیق غیر مساوات $\beta \leq x$ برای هر $x \in X$ به این معنی که عدد β ست x را از طرف بالا محدود میسازد و تطبیق غیر مساوات $\beta \leq y$ برا ی هر $y \in Y$ در آنصورت برای هر عدد که ست x را از طرف بالا محدود میسازد به این معنی که عدد β عبارت از کوچکترین وسط در مجاورت تمام چنین اعداد میباشد .

در آن صورت سرحد فوقانی ست x :

$$\beta = \sup x \text{ .....(3.3)}$$

همین قسم موجودیت سرحد فوقانی به ست غیر خالی محدود کننده فوقانی ثابت است ، حالا اگر Y ست عددی غیر خالی محدود از طرف پائین باشد پس به ست x انتقال میدهیم تمام اعداد ست xو Y را از طرف پائین محدود میسازد .



شکل (7)

بحث دیگر بطور مشابه مطالعه حالت سرحد فوقانی به سادگی متیقن میسازد که در بند خواص متمادیست اعداد حقیقی عدد α موجود میشود که برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ تطبیق غیر مساوات ذیل صادق است : $x \le \alpha \le y$ .....(3.4)

این واضح معنی میدهد که $\alpha = \inf x$ □ ثبوت است .

دیگر تائید کردن موجودیت سرحد تحتانی ست غیر خالی محدود کننده پائین میتوان از همین تائید ثبوت شونده موجودیت سرحد فوقانی ست غیر خالی محدود شده فوقانی را حاصل نمود . حقیقتاً خاطر نشان میسازیم که اگر x ست محدود از طرف پائین باشد پس $(-x)$ تمام اعداد $(-x)$ طوریکه $x \in X$ باشد .

در آنصورت ست در اعداد بطور مستقیم متناظر با ست x نظر به صفر است که عبارت از ست محدود از طرف بالا میباشد و بر عکس اگر ست x محدود از طرف بالا ست باشد پس ست $(-x)$ محدود از طرف پائین میباشد . شکل (7) . حقیقتاً اگر عدد a ست x را از طرف پائین محدود میسازد پس $(-a)$ ست $(-x)$ را از طرف بالا محدد میسازد . اگر عدد b ست

$(+x)$ را از طرف بـالا محـدود میسـازد . پـس عـدد $(-b)$ سـت $(-x)$ را از طـرف پـائین محدود میسازد .

ازینجا نتیجه میشود که :

$$\sup(-X) = -\inf X \text{ , } \inf(-X) = -\sup X \cdots (3.5)$$

از موجودیت سرحد فوقانی ست غیر خالی محدود شونده از طرف بالا و هر یکی از مساوات (3.5) موجودیت سرحد تحتانی ست غیر خالی محدود شونده از طرف پائین نتیجه میشود .

قضیه موجودیت سرحد فوقانی و تحتانی بنام قضیه مخصوص موجودیت سرحد فوقانی و تحتانی ست که بر اساس شرایط تعریف ثابت شده است ، یاد میشود .

بحث طریقه تطبیقی این قضیه راجع به وقوع سرحد ها نتیجه مناسب نمیدهد .

واضح است که ساختمان ست y توسط هدایت ثبوت قضیه طوریکه ست محدود شده فوقانی از تمام اعداد ست تشکیل یافته مورد مطالعه قرار میدهیم که سرحد فوقانی جستجو شده مساوی به اندازه β این ست میباشد در حقیقت تعیین شدن سرحد فوقانی (تحتانی) ست یکی از خواص های بسیار مشکل میباشد .

اگر ست از طرف بـالا (پـائین) محـدود نباشـد ، پـس همینطـور هـیچ یکـی از اعـداد نمیتواننـد سرحد فوقانی و تحتانی آن شود که آنرا از طرف بالا و یا پائین محدود سازد همینطور به صورت عمومی هیچ یک عدد نیست که آنرا محدود سازد . جهت معتقد شدن تعریف ذیل را مطالعه مینمائیم :

سرحد فوقانی ست عددی که از طرف بالا محدود نباشد ، بنام $-\infty$ یاد میشود ، این تعریف طبعاً همینطور راجع به استفاده از سمبول های $+\infty$ و $-\infty$ در پراگراف (2.5) ویاد آوری شد.

همینطور تعریف سرحد لایتناهی ست توسط شرایط 1°و 2° و 4 و 5 بیان گردیده است.

به آسانی ست عددی غیر خالی دارای سرحد فوقانی ست گسترش یافته متعلق به اعداد حقیقی بوده به این سبب اگر ست معین از طرف بالا محدود باشد سرحد فوقانی آن متناهی است پس بی نهایت ، مساوی است به $+\infty$ همینطور بطور مشابه برای سرحد تحتانی همین تعریف برقرار است .

*3.5 : خواص حسابی سرحد فوقانی و تحتانی :

چهار خواص سرحد فوقانی و تحتانی ست ها راجع به تعریف حسابی ست عددی را مطالعه مینمائیم :

قبل از همه چنین عملیه ها را تعریف میکنیم :

حاصل جمع حسابی :

$X_1+\cdots+X_n$ که قسمت عددی $x_1\cdots,X_n$ عبارت از ست تمام اعداد طبیعی x بوده به شکل ذیل مینویسد :

$$x=x_1+\cdots+x_n \ , x_1\in X_1\cdots,x_n\in X_n$$

تفاضل حسابی : $X-y$:ست عددی Xو Y عبارت از ست تمام اعداد z بوده و به شکل ذیل $z=x-y,x\subset X,y\subset Y$ باشد نتیجه مفهوم حاصل جمع حسابی $x_1+..+..+x_n$ و تفاضل $x-y$ از مفهوم نظریه حاصل جمع (اتحاد) ستی $x/v..v_{xn}$ و تفاضلx/y این ست متفاوت است .

حاصل ضرب λx عدد λ درست عددی عبارت از ست تمام اعداد بوده و به شکل $\lambda x/x\in X$ مینویسند .

حاصلضرب XY دو ست عددی X و Y عبارت از ست z بوده و به شکل ذیل مینویسند :

$z = xy, x \in X, y \in Y$ باشد.

خاصیت اول

$$\sup(X_1 + \cdots + X_n) = -\sup X_1 + \cdots + \sup X_n \cdots (3,6)$$
$$\inf(X_1 + \cdots + X_n) = -\inf X_1 + \cdots + \inf X_n \cdots (3,7)$$

خاصیت دو م

$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y \cdots (3,8)$$

خاصیت اول را ثبوت می نمائیم ، اگر $x_1 \in X_1 + \cdots + X_n$

درآنصورت : $x_1 \in x_1 + \cdots + x_n \quad , \quad x_1 \in X_1 + \cdots + X_n$

پس : $\chi_R \le \sup x_R \; , R = 1,2....,n$

در نتیجه :

$$x = x_1 + \cdots + x_n x_k \le \sup X_1 + \cdots + \sup X_n \cdots (3,9)$$

اگر $y < \sup X_1 + \cdots + \sup X_n \cdots (3,10)$ باشد پس برای هر $k = 1,2 \cdots, n$ چنین عدد yk پیدا میشود .

$$yk < \sup x_k \; , k = 1,2 \cdots n, y_1 + \cdots + y_n = y(3,11)$$

در حقیقت اگر تمام سرحد فوقانی $\sup X_1 + \cdots + X_n$ ست متناهی باشد .

پس $yk = \sup x_k - \cdots - \sup X_1 + \cdots + \sup X_n - y$ است .

در آنصورت $y_1 + ... + y_n = y$ است .

اگر همین اوسط سرحد فوقانی اطراف (مجاورت) $\sup X_1 + \cdots + \sup X_n$تنها دارای یک مساوات $+\infty$ میباشد .

بطور مثال$+\infty$ x_n پس در خصوصیت به $y_1 + ... + y_n - 1$ میتوان هر عدداختیاری $y_1 < \sup X_i , i = 1,2,\cdots,i$ و بعد از y_n عدد

در این حالت $y_n < +\infty = \sup X_n$

واضح است که $y_1 + ... + y_n = y$ است در آنصورت دوباره شرط (3.11) تطبیق شود.

از غیر مساوات (3.11) نتیجه میشود که موجودیت چنین $x_k \in X_k$ که $k = 1,2,\cdots,n$ ،

$yk < x_k \leq \sup X_k$ از فرضیه $x = x_1 + ... + x_n$ حاصل مینمائیم .

$$x \in X_1 + \cdots + X_n$$

$$x = x_1 + \cdots + x_n > y_1 + \cdots + y_n \geq y \cdots (3,12)$$

به این ترتیب هر دو شرایط تعریف سرحد فوقانی است (مراجعه نمائید به: فورمول های (3.9 و 3.12) صدق می نماید . در آنصورت : $\sup X_1 + \cdots + \sup X_n$حقیقتاً عبارت از سرحد فوقانی ست $X_1 + \cdots + X_n$ میباشد .

بطور مشابه فرمول (3.7) را ثبوت میشود .

خاصیت دوم را ثبوت میکنیم :

اگر $z = X - Y$ باشد .

در آنصورت $Z = \chi - y , \chi \subset X, \ y \in Y$ میباشد .

پس : $x \leq \sup X , y \geq \inf Y$ است .

در نتیجه :

$$Z = \chi - y \leq \sup X - \inf Y ....(3.14)$$

اگر $Z_1 - Z_2 > Z$ باشد چنانچه Z_1 و Z_2 در بند (3.14) موجود است در آنصورت سرحد $\sup x, \inf y$ متناهی است و همینطور اگر یکی از آنها و یا هر دو لایتناهی باشد .

مطابق به غیر مساوات (3.15) نتیجه میشود که چنین عدد دریافت میشود ، که : $y \in Y, x \in X$ شود .

در آنصورت

$$Z_1 < x \leq \sup X, Z_2 > y \geq \inf Y ....(3.16)$$

در نتیجه $x - y \in X - y$

$$x - y > Z_1 - Z_2 > Z .....(3.17)$$

است .

به این ترتیب دوباره هر دو شرایط تعریف سرحد فوقانی و تحتانی (مراجعه نمایدبه 3.13 و 3.17) قابل تطبیق است در آنصورت : $\sup X, \inf Y$ حقیقتاً عبارت از سرحد فوقانی ست $x - y$ ثبوت است .

خاصیت سوم : اگر $\lambda \geq 0$ باشد . پس :

$$\sup \lambda X = \lambda \sup X, \inf \lambda X = \lambda \inf X ....(3.18)$$

و اگر $\lambda > 0$ باشد پس :

$$\sup \lambda X = \lambda \inf X, \inf \lambda X = \lambda \sup X ....(3.19)$$

اول مساوات (3.18) را ثبوت می نمائیم :

فرضاً $\lambda > 0$ و اگر $y \in \lambda X$ شود در آنصورت $y \in \lambda X$ بوده و همه $x \in X$ میباشد .

در نتیجه : $x \leq \sup X$ بوده پس $y = \lambda x \leq \lambda \sup X$ میباشد .

اگر $y < \lambda \sup X$ باشد در آنصورت $\frac{y}{\lambda} < \lambda \sup X$ است .

پس چنانچه $x \in X$ پیدا میشود که $x > \frac{y}{\lambda}$ میشود .

در نتیجه : $\lambda x > y$ بوده درینجا $\lambda x \in \lambda X$ میباشد .

به این ترتیب $\lambda \sup X$ عبارت از سرحد فوقانی ست λX بوده در آنصورت اول مساوی (3.18) ثبوت شد .

همینطور بطور مشابه مساوات دوم (3.18) را ثبوت میشود .

حالا فرض میکنیم $0 > \lambda$ باشد .

اگر $y \in \lambda x$ شود در آنصورت $y = \lambda x$ بوده در حالیکه $x \in x$ است .

در نتیجه $x \geq \inf x$ بوده پس $\lambda x \geq \inf x$ اگر $y < \inf X$ باشد در آنصورت $\frac{y}{\lambda} > \inf X$ شود به این سبب $x < \frac{y}{\lambda}$ پیدا میشود که $x \in X$ بوده پس چنان $\lambda x > y$ بوده در حالیکه $\lambda x \in \lambda X$ باشد این به آن معنی است که $\lambda \inf X$ عبارت از سرحد فوقانی ست λX میباشد پس مساوات اول (3.19) ثبوت شد همین قسم بطور مشابه مساوات دوم (3.19) ثبوت میشود .

خاصیت چهارم : اگر تمام اعداد شامل در ست های y,x غیر منفی باشد پس :

$$\sup XY = \sup X \sup Y, \inf XY = \inf X \inf Y \ldots.(3.20)$$

ثبوت این خاصیت در همین میتود تطبیق میشود و ثبوت 3 خاصیت بعدی سرحد فوقانی و تحتانی ست به خوانندگان واگذار میشویم .

حالا نشان میدهیم موجودیت سرحد فوقانی و تحتانی ازتطبیق نتیجه میشود که دو خاصیت مهم اعداد حقیقی بنام پرانسیپ[1] ارشمد س و پرانسیپ هموار کردن قطعه خط یاد میشود .

3.6 <u>پرانسیپ ارشمدس</u>

پرانسپ ارشمدس راجع به اعداد حقیقی قرارذیل است.

قضیه 2: اگربرای عدد حقیقی a چنان عدد طبعی n پیدا شود که n>a باشد،پس درآنصورت داریم:

$\forall a \in R \exists n \in N :$ n> a ---------------------------(3.21)

ثبوت: فرض میکنم پرنسپ ارشمدس قابل تطبق نباشد این به آن معنی است که عدد a وجود داشته باشد که برای هرعدد طبعیی n غیرمساوات $n \le a$ صدق کند.

پس دراین صورت $\exists a \in R ; \forall n \in N ; n \le a$ به این معنی است که عدد a اعداد طبیعی را از طرف بالا محدود میسازد به خاطر که اعداد طبعیی هم مانند تمام ست های عددی غیرخالی که از طرف بالا محدود شده مطابق قضیه 1 پراگراف 3.4 دارای حد فوقانی متناهی بوده وتوسط β که $\beta = \sup n$ نشان مید هند.

همینطور $\beta - 1 < \beta$ پس مطابق خاصیت 2^0 ، سرحد فوقانی درتعریف 4 پراگراف 3.4 چنان عدد طبیعی n پیدا میشود که $n > \beta - 1$ است. اما دراین صورت $n + 1 > \beta$ می باشد زیرا که مطابق تعریف اعداد طبیعی $n + 1 \in N$ غیرمساوات $n + 1 > \beta$ درمغایرت به انتخاب که $\beta = \sup n$ قراردارد.

---

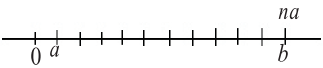
(1) ارشمیدس (212-287)ریاضیدان ومیخانیک کلاسیک میباشد.

همینطورسرحد فوقانی ست را ازطرف بالا محدود میسازد(مراجعه نمائید به: خاصیت 1^0 سرحد فوقانی که درتعریف $4'$پراگراف 3.4 تذکررفت برخلاف نشان میدهد که عدد اشاره شده a موجود نیست.بنا براین پرنسیپ ارشمدس صدق میکند□.

نتیجه:هرگاه a و b اعداد باشند طوریکه $0<a<b$ باشدعدد طبیعی n وجود داردکه

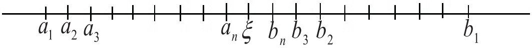
na>b ---------------------- (3.22) صدیق میکند. حقیقتاً مطابق پرنسیپ ارشمدس برای عددb/a چنان عدد طبیعی n موجود است که n>b/a صدیق می کند.همینطورغیرمساوات n>b/a رادرعدد مثبت a ضرب می نمایم. حاصل می نمایم که na>b است.این برآورد دارای تعبیرساده هندسی میباشد.

اگردوقطعه خط باطول های a وb طوریکه 0<a<b را درنظربیگریم،پس بطورمسلسل بالای قطعه بزرگ قطعه کوچک رادریکی ازانجام ها به این خط به یکطرف میگذارم.ما ازطریق اعداد متناهی درقدم بعدی این عملیه، حد بزرگ قطعه خط رادریافت میکنم.



شکل(8)

مثال:فرضاً ست x متشکیل ازاعداد به شکل 1/n،طوریکه n=1,2,… باشدsupx وinfx رادریافت میکنم.



شکل9

ست x دارای عـددبزرگتر ازیـک اسـت زیراکـه یـک سـرحد فوقـانی آن مـی باشـد.یعنـی،

$$\sup_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\}=1$$

بـرای جستجوی سـرحد تحتـانی ست x یادآورمیشـوم کـه بـرای هـر n=1,2,… غیرمساوات 1/n>0 صدق می کند دراین صورت عددصفرست x راازطرف پائین محدود می سازد.ذیلآچنین نشان میدهدکه:

فرضـاً ε>0 دراینصـورت مطـابق پرنسـیپ ارشـمدس عـددطبیعی n وجـود داردطوریکـه $n>\frac{1}{\xi_0}$.ویابـه همین قسم $\frac{1}{n}<\xi_0$ این غیرمساوات نشـان میدهد کـه هرعدد ε>0 ست x راازطـرف پـائین محـدود نمیسـازدیا $\frac{1}{n}\in X$ درصـورت کـه n=1,2,… باشـد.وهمـین قسـم

$$\inf_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\}=0$$

کـه تمـام اعـداد بـزرگ ترسـت x را ازطـرف پـائین محـدود میسـازد درایـن صورت داریم:

$$\inf\left\{\frac{1}{n}\right\}=0$$

§4. لیمت ترادف های عددی

4.1 معرفی لیمت ترادف های عددی

یکی ازمفاهم مهم انالیزریاضی عبارت ازمفهوم لیمت است ما در این مبحث مطالعه آنرا ازلیمت ترادف های اعداد حقیقی آغازمی نماییم.(تعریف ترادف ها.مراجعه نمائید به: پراگراف 1.3*)

نقطه ء بی نهایت دورمستقیم عددی میتواندیکی ازبی نهایت های ∞+و ∞-یا∞ باشد (مراجعه نمائید به : پراگراف 3.1)

تعریف 1: نقطه a (متناهی ویابی نهایت دور)مستقیم عددعبارت ازلیمت بعضی ازترادف های عددی اعداد حقیقی می باشد ، اگرهرکدام ازترادف های ماحولی نقطه a دارای تمام حدودمورد مطالعه به یک تعداد نمبرهاآغازیابد،دراینصورت نمبرمتذکره به انتخاب حولی نقطه a مربوط میشود.باشرایط فورمول بندی شده مناسب که دربعضی حولی نقطه a درست های متناهی ترادف ها به اساس خصوصیت های آنهابه اندازه کم وا قع میشود.(درآن صورت ست خالی ، ست متناهی شمرده می شود). به یادمی آوریم که ماحولی نقطه متناهی وبی نهایت دورمسقیم عدد توسط بعضی اعدادداده شده$0<\varepsilon$ است تعین می نماید.**(مراجعه نماید به پراگراف 3.2).**

تعریف لیمت ترادف اعداد حقیقی را میتوان به طریقه ذیل تعمیم داد: نقطه a (متناهی ویابی نهایت دور)مستقیم عددی به نا م لیمت ترادف $\{x_n\}$اعداد حقیقی یاد می گردد اگربرای هر $\varepsilon>0$چنان عدد n_ε موجودشودکه برای تمام$x_\varepsilon > N$حد$\{x_n\}$درحولی U(a,ε) وجودداشته باشد،یعنی $x_n \in U(a,\varepsilon)$اگراین شرایط صادق باشد ، پس مینویسند:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

ویا $x_n \to a$ دراین صورت $n \to \infty$ ومیگویند که حدودترادف $\{x_n\}$ به a تقرب نموده است.موجودیت واتحادتمام تعریف ها لیمت راتوسط سمبول های منطقی به شکل زیر می نویسند.

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : x_n \in U(a, \varepsilon)$$

درآینده حرف n به شکل اندکس عدد طبعی افاده می گردد اگر کدام شرایط خاص دیگرنباشد اندکس ε درعدد n_ε نشان میدهدکه این عدد به صورت عمومی مربوط به انتخاب $\varepsilon > 0$ می باشد.این ارتباط نیز درخود فورمول بندی تعریف به صورت بی نهایت انعکاس یافته است زیراکه ممکن است درنوشته انعکاس نکند(جهت پیشبرد بهترکار).حقیقتآ،همیشه به عوض n_ε می نویسند $n_0 \in N$ یا $N \in N$ اگرلیمت ترادف اعداد حقیقی.بی نهایت مستقیم عددی باشد ، پس دراین صورت گفته می شود که ترادف دارای لیمت نهای می باشد.

تعریف2:اگرترادف عددی دارای لیمت بی نهایت باشد ، پس آنرابه نام متقارب می نامند.اگرازسمبولهای منطقی استفاده نمایم،پس این تعریف را می توان به طریق ذیل نوشت:

$\exists a \in R \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N \forall n > n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon$ ترادف که متقارب نیست ترادف متباعد نامیده می شود.

تعریف1 رامیتوان برای حالت لیمت بی نهایت تعمیم بخشید.عددa به نام لیمت ترادف $\{x_n\}$ اعدادحقیقي یادمیگردد.اگربرای هر $\varepsilon > 0$ چنین عدد n_εموجودشودکه برای هرعدد $n > n_\varepsilon$ غیرمساوات ذیل صدق نماید:

$$|x_n - a| < \varepsilon \cdots (4.1)$$

باستفاده ازسمبول های منطقی این تعریف را به طریق ذیل می نویسند:

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon$$

واضیح است که غیرمساوات (4.1) معادل به غیرمساوات ذیل می باشد $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ اگر $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ و $x_n < a$ $(x_n > 0)$ برای هر n=1,2,... باشد،پس می گویند که ترادف $\{x_n\}$به طرف عددa تقرب می کند (مطابق به طرف راست) وهمیشه به عوض $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ به این شکل می نویسند. $\lim_{n \to \infty} x_n = a - 0$ (مطابق به $\lim_{n \to \infty} x_n = a + 0$)دراین حالت وقتکه a=0 شود به عوض 0-0 و0+0 بطورساده چنین می نویسند: 0+ و0- . بافورمول بندی تعریف ε لیمت ترادف عددی لیمت نامیده می شود ، که نقطه بی نهایت دورباشد.(یاطوریکه میگویند مساوی به بی نهایت شود) بطورمثال ∞عبارت ازلیمت ترادف $\{x_n\}$ می باشد. اگربرای هر $\varepsilon > 0$ چنان عدد n_ε موجودشودکه برای تمام $n > n_\varepsilon$باشد این افاده $x_n \in U(\infty, \varepsilon)$ویاهمین

قسم که خودغیرمساوات $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ صادق باشد.این رابطه بااستفاده ازسمبول های منطقی به شکل زیرمینویسند.

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

بطورمشابه،تعریف لیمت ترادف برای حالتي که این لیمت مساوی به علامه مشخص به بی نهایت شود تعمیم میبابد ، برای مختصرنمودن تعریف آنرامحدود ساخته وتوسط سمبول های منطقی قرارذیل می نویسیم.

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |x_n| < -\frac{1}{\varepsilon}$$

واضح است که اگر $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$ ویا $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$ باشد.پس $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ است.

تعریف3:لیمت ترادف که بی نهایت باشد به نام بی نهایت بزرگ یاد می شود.مفهوم لیمت ترادف بی نهایت مربوط به اهداف مشخص بوده که درپراکتیک به آن مواجه می شوند.بعضی ازاین اهداف حاصله براي ما جالب میباشند. مانند $\varepsilon > 0$ که همیشه داده می شود. یا $\{x_n\}$ که ترادف متقارب معنا میدهد ، به همین ترتیب کمیت مورد مطالعه را می توان درنتیجه تطبیق کدام تجربه ویا بامحاسبه تکراری فورمول ها ویا بخاطرکدام هدف

دیگرحاصل نمود. این مسأله را میتوان بطورواضح حل نمود.اگر n_ε پیداشودکه معنای کل آن $\{x_n\}$باشد،پس می توان آنرااز مفهوم واضح درموردمطالعه کمیات درلیمت داده شده دقیقاً انحراف دادواقعاً اگر n_ε برای یکی از $0<\varepsilon$ داده شده موجود شود،اگرکم باشدویاهیچ موجودنشود.ترادف $\{x_n\}$مشابه به تعریف لیمت ترادف مقتضي می باشد وعدد n_ε میتوان برای هر $0<\varepsilon$ انتخاب نمود.درآینده میتوان ترادف فرعی لیمت را به مفهوم لیمت بی نهایت یاد نمود، اگربا چنین عددواقعاً روبروشویم.

مثالها1:ترادف 1/n متقارب است ولیمت آن صفراست. درحقیقت هر $\varepsilon>0$مطابق به پرنسیپ ارشمدس(مراجعه نمائید به :پراگراف 3.6)اگرچنین عدد طبیعی n_εموجود مشودکه n>1/ ε پس برای هر $n>n_\varepsilon$ غیرمساوات $\varepsilon>\frac{1}{n_\varepsilon}>\frac{1}{n}>0$صادق است این به آن معنی است که ترادف $\left\{\frac{1}{n}\right\}$متقارب به صفر طرف راست میباشد.

مثال2: ترادف $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ متباعد شمرده میشود درحقیقت،اگرهر عددa ماحول ε، طوریکه 0<ε<1 باشد ، ترادف متذکره متباعد است واگرحدودترادف داده شده بی نهایت باشدبه این معنی که لیمت آنها شمارنمیشود.

مثـــال3:تـــرادف $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$متقـــارب اســـت یعنـــی $\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n=0\right\}$ زیراکـــه

$\left\{\left|\frac{1}{n}\right|\sin\frac{\pi}{2}n\le\frac{1}{n}\right\}$ ویا $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ترادف متقارب $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ترادف متقارب به لیمت راست ویا چپ یادنمیشود.

مثال4: ترادف {n}متباعداست.واقعاً اگرکدام عددa برای هر0<ε باالخصوص برای ε=1 مطابق به پرنسیپ ارشمدس چنان عددطبیعی n_0که$n_0>a+1$ پیداشود، پس نتیجه میشود که برای تمام اعداد طبیعی $n>n_0$داریم $n>a+1$ زیراکه عددa نمیتواندلیمت ترادف{n} محسوب شود. درمثال2و4 صورت ثبوت متباعدبودن ترادف ازمتن تعریف استفاده شده که درآن چنین تذکربه عمل آمده است ، که بعضی ازاعدادa ترادف داده شده لیمت محسوب نمیشوند.

تعریف4:نقطه a متناهی ویابی نهایت دورمستقیم عددی R میباشد. اگرچنان ε >0پیداشودکه برای تمام اعدادطبیعی n عددطبیعیm>n موجودشودکه $x_m\notin U(a,\varepsilon)$ پس $x_n\in R$ ، n=1,2,… لیمت ترادف محسوب نمیشود. این تعریف را با استفاده ازسمبول های منطقی به شـکل زیرمـی نویسـند: $\lim x_n\ne a\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0\forall n\in N\,\exists m>n:x_m\notin U(a,\varepsilon)$ بـه یادمی اوریم که صورت فورمول بندی تائیدنشده موجودیت(∃) سمبولهای منطقی واتحاد عمومی ∀جای خود را تغییرمیدهند که عیناً درحالت فرض شده تذکررفته بود. دراینجا بطورمختصرمیتوان گفت که نوشته فورمول 1و4 که بااستفاده ازسمبول های منطقی تحریرگردیده است ، نشان میدهدکه تعریف 4 تعریف مستقیل نیست بلکه نتیجه منطقی تعریف 1 میباشد.

تمرین1:تعریف ترادف متباعدراواضح سازید.

تمرین2:ثابت نمایدکه اگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ باشد پس $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ است .

مثال2: ثابت نمایدکه ترادف x_n متباعد است.

جهت ثبوت هدایت ذیل موجوداست:

تنهاوتنها وقتیکه عدد0<ε موجودباشدوعددحقیقی a راداشته باشیم ونیزعددn وجودداشته باشدوعددی دیگری پیداشودکه m>n باشد وغیرمساوات $|x_m - a| \geq \varepsilon$ امکان پذیر است.

هدایت دیگر: به مطالعه مثالهای بالاموجودیت ویا موجودنبودن لیمت ترادف داده شده رامعلوم نمایید وتعریف مقدماتی لیمت ترادف راکاملاً واضیع سازید. ونیزلیمت ترادف رادرمثال بسیارمشکل جستجونموده واوسط حسابی حدود ترادف متقارب رامطالعه نماید.

مثال 5:اگرترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد، پس ترادف اوسط حدودحسابی آن مساوی است به $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ ، n=1,2,… که مستقماً متقارب به همین لیمت است که خودش ترادف $\{x_n\}$است.فرضاً $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ قبل از همه یاد آورمیشوم که برای هرعدد طبیعی n_0 و $n > n_0$ داری مساوات ذیل است.

$$y_n - a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a$$

$$= \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(x_{n_0} + 1 - a) + \ldots + (x_n - a)}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4.2)$$

حال اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد پس مطابق تعریف لیمت چنین عدد n پیدا میشود که برای هر

$n>n_0$ مساوات ذیل صدق می نماید. یعنی ، $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ ....(4.3) اگر عدد

$x_1+...+x_{n_0}-n_0a$ معین باشددراینصورت $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=a$ زیراکه

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_{n_0}-n_0a}{n}=0$ درنتیجه چنان عدد m_0 پیدا میشود که برای هر $n>m_0$

مساوات ذیل صادق است:

$$\left|\frac{x_1+...+x_{n_0}-n_0a}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}......................(4.4)$$

فرضاً $n_\varepsilon=\max(n_0:m_o)$ بنابراین، برای تمام اعداد $n>n_\varepsilon$ به اساس فورمول

(4.2)و(4.4)داریم:

$$|y_n-a|\le\left|\frac{x_1+...+x_{n_o}-n_0a}{n}\right|+\frac{|x_{n_o}+1-a|+...+|x_n-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-n_o}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

این به آن معنی است که $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

تمرین 4: ثبوت نماید که حذف نمودن ویا تغییر عددمتناهی،عناصر ترادف متقارب به آن محسوب نمیشود همینطورثابت نماید که درحالت متقارب بودن کمیت لیمت ترادف نمیباشد.

2: اگر $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ و $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ باشد و $Z_n=\begin{cases}x_R & n=2R-1\\ y_R & n=2R, R=1,2,...\end{cases}$ پس درآنصورت

ثابت نمایدکه $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ میشود.

هدایت: درردیف ترادف عددی این کورس،ترادف گسترش مستقیم عددی نقاط رامطالعه نماید،که دراین حالت نامگذاری ترادف اعدادطبیعی به طورعموم $\{x_n\}$می باشد وبخاطرست های گسترش اعداد حقیقی به R'نشان داده میشود.(مراجعه نمائید به: پراگراف 3.1) وبه همین ترتیب عناصراین ترادف درردیف اعدادحقیقی میتواندنقاط بی نهایت دور∞+ و ∞- قبول نمود.همینطوربرای چنین ترادف ممکن است مفهوم لیمت رادریافت نمود. بطورمشابه لیمت ترادف عددی مثل خوددارای حالت مخصوص میباشد.

تعریف5:نقطه a گسترش مستقیم عددی R'بنام لیمت ترادف نقاط این مستقیم یادمیشود اگر چنین حولی نقطه a یافت شود که آن دارای تمام حدود ترادف باشد و با بعضی نمبرها آغازشود. تفاوت حالت بالا به حالت موجود درآنست که دراینجا حدود ترادف رامیتوان واقعاً ممکن است که مفهوم لیمت ترادف نقاط مستقیم عددی تنها توسط یک نقطه بی نهایت دوربه بی نهایت بدون علامه گسترش داد.

تبصره:برای مجاورت U(a،ε) طوریکه ε>0 یا عدد $R \in a$ باشد یا یکی ازبی نهایت ∞- ،∞+ویا∞،چنان عددطبیعیn موجودشود که افاده $U(a,\frac{1}{n}) \subset U(a,\varepsilon)$صدق نماید.

برای اینکه ترادف $x_n \in R$ طوریکه $n = 1,2...$شود.

افاده $x_n \in \mathrm{U}(a,\frac{1}{n})$صادق است(دراینجاa یاعددحقیقی یایکی ازلایتناهی∞-،∞+ویا∞) می باشد. پس $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ درحقیقت برای مجاورت $U(a)$ چنان عددطبیعی n_0 پیداشودکه $U(a,\frac{1}{n_0}) \subset (a)$ درآن صـــــورت بـــــرای هرعــــدد$n > n_0$داریــــم.

$U(a)\supset U(a,\frac{1}{n_0})\supset U(a,\frac{1}{n})\in x_n$ این بـه آن معنـی اسـت کـه $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ در آینـده

تـرادف فرعـی همیشـه بـه تـرادف عـددی یادخواهدشـد پـس درآنصـورت عناصـرترادف بنـام اعدادحقیقی یادمیشود.

تمرین 5 :ثبوت نمایید،اگر $|b_n|\geq a_n$ ، $n=1,2...$ که $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ پس $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

6: مثالهای ازترادف های غیرمحدودکه لایتناهی بزرگ شمرده نمیشودبنوسید.

7: ثبوت نمایید کـه حاصل ضـرب حدودبی نهایت بزرگ تـرادف هـا درتـرادف هـای کمیـات مطلقه تمام حدود طوریکه ازطرف پائین محدود مثبت باشد ، بنام ترادف بی نهایت بزرگ یـاد میشود.

4.2 یکتا بودن لیمت ترادف اعداد:

قبل ازهمه ، تعریف لیمت را دقیقترمیسازیم بـه این معنـی کـه اگـرچنین تعریـف دقیق موجـود شود ، پس چنین لیمت یکتا است.

قضیه 1: ترادف نقاط درامتداد مستقیم عددی میتواند روی این مستقیم تنهـا دارای یـک لیمت باشد.

نتیجه:ترادف عددی میتواند تنها دارای یک لیمت متناهی ویا دارای یک علامه مشخص باشد.

ثبوت قضیه: فرض میکنم کـه تائید کـردن قضیه منصفانه نیست.این بـه آن معنـی است کـه موجوديت تـرادف $x_n\in R$ طوریکـه $n=1,2...$ درآخـرین حد انـدازه دارای دولیمـت مختلـف $a\in R$ و $b\in R^{\backslash}$ باشد. اگر $\varepsilon_1>0$ و $\varepsilon_2>0$ راطوری انتخـاب کنیم کـه ε_1 درمجـاورت نقطـه a بـا ε_2 حولی نقطه b این کارهمیشه مطابق لیما پراگراف 3.2 (مراجعه نمائید به :.

شکل6 (6.2 ،b ،a)) ممکن است به اساس تعریف لیمت ازشرط $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ نتیجه

میشود.که چنین عدد $n\in N$ پیدا میشود که برای تمام عدد $n > n_1$ و $n\in N$ موجودیت

$x_n \in U(a,\varepsilon_1)$ درست است ازشرط $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ در نتیجه $n_2 \in N$ پیدا میشود که

برای تمام $n > n_2$ و $n\in N$ افاده $x_n \in U(b,\varepsilon_1)$ صادق است.

اگر n_0 بزرگتراز اعداد n_1 و n_2 باشد،به اساس تعریف میتوان نوشت: $n_0 \Rightarrow \max\{n_1, n_2\}$.

پس برای هر $n > n_0$ همزمان میتوان داشت: $x_n \in U(b,\varepsilon_1)$ و $x_n \in U(a,\varepsilon_1)$ درآن صورت:

$x_n \in U(a,\varepsilon_1) \cap x_n \in U(b,\varepsilon_1)$ که این خلاف فرضیه است، پس

$$U(a,\varepsilon_1) \cap U(b,\varepsilon_2) = \phi$$

نتیجه : درحقیقت مجاورت ازحالت قسماً بیان شده قضیه میباشد. برای عناصرلیمت ترادف یکنواخت بی نهایت موردنظر،موجودیت R^1 مجاورت ازمتزایدبی نهایت دارای علامه معین خودباشد ، پس همزمان لیمت آن مجاورت ازبی نهایت بدون علامه میباشد.

بطورمثال اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ پس واقعاً $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ حال چندحاصیت مختصرلیمت متناهی وبی نهایت رادرپراگراف های بعدی ثبوت می نماییم.

4.3 عبوربه لیمت درغیر مساوات :

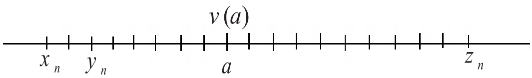
بااستفاده ازخواص لیمت ترادف نقاط گسترش یافته مستقیم عددی وارتباط آن بامساوات وغیرمساوات برای حدودترادف آنرا به سه بخش فورمولبندی وثابت می نماییم.

1: اگربرای تمامی $n=1,2...$ مساوات $x_n = a \in R^1$ راداشته باشیم (درآنصورت ترادف $\{x_n\}$ ثابت است)،پس $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ طوریکه می گویند ، لیمت ثابت مساوی به خود این ثابت است.

ثبوت: حقیقتاً دراین حالت برای هرمجاورت $U(a)$ ازنقطه a درخصوص عدد n_0 درتعریف 5 اشاره صورت گرفته است. میتوان عدد n_0 مساوی به یک گرفت. همینطور،برای تمام اعداد $n=1,2...$ فورمول $x_n = a \in U(a)$ درست است.

Π: اگر $n=1,2... \quad x_n \in R' \quad y_n \in R' \quad 2n \in R' \quad x_n \le y_n \le z_n$......(4,5)

که $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in R'$..........(4,6) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$........(1,7) پس



شکل-10

ثبوت: مجاورت اختیاری $v(a)$ نقطه رامعین میسازیم.

به اساس شرط(4,6) عدد n_1 پیدا میشود که برای تمام اعداد $n > n_1$ رابطه ذیل صدق کنند.

$x_n = U(a)\cdots(4,8)$

وعدد n_2 که برای تمام اعداد $n > n_2$، $x_n \in U(a)$ صدق میکند.

$z_n \in U(a)\cdots(4,9)$

بخصـــوص عـــدد بزرگتـــر از n_1 و n_2 اســـت $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ را انتخـــاب مـــی نمـــاییم درآنصورت برای اعداد $n > n_0$ همزمان بندهای (8،4)و(9،4) صادق اند . بنآ به شکل(10) دربند شرط (4,5) برای تمام $y_n \in U(a)$ صادق است. به این معنی که (4،7) تائید است□.

نتیجه: اگر $x_n \in R'$ $y_n \in R'$ $z_n \subseteq y_n$ طوریکه $n = 1,2...$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty ....(4,10)$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty ....(4,11)$$

اما $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$

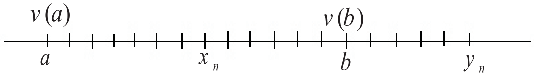
ثبوت: فرضآ مطابق شرط (4،10) ترادف فرعی $z_n = +\infty$ طوریکه $n = 1,2...$ را درنظر میگریم. درآنصورت،واضح است که ترادف های $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ مطابق شرایط(4،5) و(4،6).a=+∞. همین قسم دربند(4،7) ومساوات (4،11) آنها تائید گردیده است.

بطورمشابه به حالت $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ را نیز مطالعه می نماییم(تحت بررسی قرارمی دهیم)

III: اگر $x_n R'$ $y_n \in R'$ $n = 1,2..u$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y'_n = b \cdots (4,12)$$

طوریکه $,a \in R'$ $,b \in R'$ $a < b$ ....(4,13) پس موجودیت چنین عدد n_0 برای تمام اعداد $n > n_0$ غیرمساوات $x_n < y_n$ ....(4,14) مطابقت دارد .



شکل 11

ثبوت:فرضاً $U(a)$و $U(b)$ مجاورت نقاط a و b که متقا طع نیستند، موجود باشد.درآنصورت

مطابق شرطa< b نتیجه میشود که برای هر $y \in U, x \in U$ غیرمساوات

(4,15).........x< y صدق مینماید .به شکل 11............(15،4)

دربند شرط (4،12) چنین عدد n_0موجوداست که برای تمام اعداد $n > n_0$ ،

$x_n \in U \cdots (4,12)$ و $y_n \in U$ صادق است.

زیراکه غیرمساوات(4،15) به عوض غیرمساوات(4،14) ثبوت شد.

نتیجه1:فرضاً x_n، a و b بالای R' واقع باشد،طوریکه $n=1,2...$ اگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ و

a<b(مطابق a> b) باشد، پس چنین عدد n_0 موجود می شودکه برای تمام اعداد $n > n_0$

غیرمساوات $x_n < b$...........(4,17)صدق میکند(مطابق غیرمساوات $x_n > b$).

ثبوت:فرضاً a< bباشد.ترادف فرعی $y_n = b$ ،طوریکه $n=1,2...$رابررسی میکنیم

درآنصورت ترادف های$\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تحت شرایط (4،12)و(4،13) تطبق میشوند.

درنتیجه شرط (4،14)درحالت داده شده به غیرمساوات (4،17) تبدیل میشود ، بطورمشابه

حالت a> b بررسی میگردد.

نتیجه2:اگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad , \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \quad , y_n \in R' \quad , x_n \in R'$ بوده ، طوریکه $n=1,2...$

و $a \in R'$, $b \in R'$باشد،پس برای تمام $n=1,2...$ غیرمساوات ذیل تطبیق میشود.

$$x_n \le y_n ....(4,18)$$

بنابرین،(4,19)............. $a \le b$ صادق است.

ثبوت:فرضاً شرط(4،18)تطبق میشود.اگرموجودشودکه $a > b$ ،پس مطابق خاصیت (III)

لیمت چنین اعداد n_0یافت میشود ، که برای تمام اعداد $n > n_0$ غیرمساوات $x_n > y_n$تطبق

میشود.واین برخلاف شرط(4،18)است.درنتیجه غیرمساوات(4،19)صادق است.درنتیجه

مفصلاً چنین استنباط میشودکه اگر $x_n \le b$، $n = 1,2...$و $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ پس غیرمساوات $a \le b$

صادق است.درحقیقت اگرترادف فرعی ثابت $y_n = b$ و $n = 1,2...$درنظربگیریم پس برای

ترادف های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ میتوان شرط نتیجه 2 رابکاربرد دراینصورت داریم.

$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad , n = 1,2... \quad a \in R \,/ \quad x_n \in R'$ پس برای تمام $n = 1,2...$ غیرمساوات $x_n \le y_n = b$

مطابقت دارد. زیراکه مطابق نتیجه 2 غیرمساوات $a \le b$ صدق میکند.

نتیجه2 به این معنی که اگرترادف $\{x_n\}$و $\{y_n\}$دارای لیمت

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad , \lim_{n \to \infty} y_n = b \quad , a \in R' \quad , b \in R'$$

پس غیرمساوات $x_n < y_n$و $x_n \le y_n$ ممکن است برلیمت تقرب نماید ، زیراکه درحالت اول هم

ازآن یاد آوري شده بود.درنتیجه به صورت عمومی میگویندکه غیرمساوات

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\; , \; \lim_{n\to\infty} y_n = b \;\; , \; a \in R' \;\; , \; b = R'$$

دقیق است ، خاطرنشان میسازیم که اساساً به ترادف های عددی علاقمند آن میباشیم ترادف

نقاط گسترش مستقیم عددی درمقدمه قبلاًبطورفشرده بیان گردیده.

تبصره1:برای اینکه ترادف عددی $\{x_n\}$ عددa دارای لیمت خودباشد،لازم است تابرای

هردوعدد $0<\varepsilon$ و $0>c$ چنین عدد n_0 یافت شودکه برای تمام اعداد $n>n_0$ غیرمساوات

$|x_n-a|<c_\varepsilon$ صدق کند ، کافی است تاچنین عدد $0<c$ یافت گرددکه برای هر $\varepsilon>0$ چنین عدد

n_0 پیداشودکه برای تمام $n>n_0$ به همین قسم غیرمساوات $|x_n-a|<c_\varepsilon$ تطبق شود.ازاین

ادعا چنین نتیجه بدست مي آيد که مثبت بودن اختیاری $0<c$ و $0<\varepsilon$ عددحاصله c_ε نیزبنام

عدداختیاری مثبت یادمیشود.

بطورمثال اگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ پس برای هر $0<\varepsilon$ چنان عدد n_0 موجودمیشودکه برای تمام

اعداد $n>n_0$ غیرمساوات $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ صدق کند.گاهی بررسی ترادف که ازترادف های داده

شده حاصل میشود ، برای نامگذاری تمام حدود آنها ویابعضی ست های فرعی بی نهایت

ازآنها مفیدواقع میشود.درآینده برای چنین ترادف مکررآ ازلیما ذیل استفاده خواهدشد.

لیما(لیم):اگرترادف $x_n\in R$ طوریکه $n=1,2...$ باشددارای لیمت متناهی ویابی نهایت $\{x_R\}$

باشدوچنین ترادف اعدادطبعی که مساوی به

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \cdots (4,20)$$

باشد ، پس ترادف $\{x_{n_k}\}$ وترادف $\{x_n\}$ دارای عین لیمت میباشند. ارائه حد $\{x_{n_k}\}$ به ترادف

$\{x_{n_k}\}$ عدد n_k بنام عدد(قیمت)این حددرترادف $\{x_n\}$ عددk درترادف x_{n_k} قیمت آن می k_0

نامند.

ثبوت:فرضاً $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ این به آن معنی است که برای هرمجاورت $U(a)$ نقطه a چنین

عدد n_0 موجودمیشودکه برای تمام اعداد $n > n_0$ صدق نماید ، طوریکه $x_n \in U(a)$ به

علت تطبق شرط (4،20) برای عدد n_0 چنان عدد پیدامیشودکه برای تمام اعداد $k > k_0$

غیرمساوات $n_k > n_0$ صدق می کند.درنتیجه،افاده $x_{n_k} \in U(a)$ روشن است.این به آن

معنی است که:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a$$

تبصیره2:اگر $\lim_{n\to\infty} = \infty$, $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$ باشد،پس همیشه راجع به لیمت ترادف $\{x_{n_R}\}$ ممکن

است زیادگفته شود ، ولی تنهاو تنها که $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a$

وممکن است چنین واقع شودکه: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$

ویا : $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$

بطورمثال :

$$\lim_{k\to\infty}(-2k)^{2k} = +\infty \ , \ \lim_{n\to\infty}(-n)^n = \infty$$

ویا :

$$\lim_{k\to\infty}\left[-(2k-1)\right]^{2k-1} = -\infty$$

تعریف6: ترادف $\left\{x_{n_k}\right\}$ که ازحدودترادف $\{x_n\}$ تشکیل گردیده است . درچنین حدودمشابه

عناصرآنهادرمطابقت به همان ترادف تشکیل گردد ، ترادف اولی $\{x_n\}$ بنام ترادف فرعی یاد

می شود.

به این ترتیب ترادف $\{x_{n_R}\}$ عبارت ازترادف فرعی،ترادف $\{x_n\}$ میباشد.اگرشرایط $k < k'$

معادل به شرایط $nk < nk'$ ، $k' = 1.2.\cdots$ kباشد،پس $1,3,5...,2n+1...$ ترادف است

اما $2,1,3,4...n$ ترادف قطاراعداد طبیعی $1,2,3,4...n$ شمرده نمیشود.درهردوحالت

عناصرترادف(1)ست فرعی ،ست اعدادحقیقی را بوجودمی آورند.اما درحالت اول

حدودترادف درهمان ردیف مرتب قراردارندکه ردیف اعداد طبیعی قراردارند.اما درحالت

دوم این ردیف تغییردارد.

اگر $\{x_{n_R}\}$ ترادف فرعی،ترادف $\{x_n\}$باشدپس واضح است که $nk \geq k$بوده و $k = 1.2.\cdots$

میباشد.درنتیجه : $\lim_{n\to\infty} nk = +\infty$

از اینجا به اساس لیما(لیم)نتیجه میشودکه اگرترادف دارای لیمت متناهی یا بی نهایت باشد ،

پس هرترادف آن دارای چنین لیمت میباشد:

تمرین 8: فرضآ ازحدودترادف اعدادطبیعی $\{n\}$ترادف جدید $\{nk\}$تشکیل شود، طوریکه

حدودمختلف ترادف $\{n\}$ تقرب کندبه حدودمختلف ترادف جدید وهرحدترادف $\{n\}$تقرب کند به

یکتعداد حدود جدیدآن که این معادل است به آنچه که جمله داده شده $n \to nk$به خود ست

اعداد طبیعیN میباشد . ثبوت نمایدکه دراین حالت $\lim_{k\to\infty} nk = \infty$ است.

4.4:محدودیت ترادف های متقارب :

تفاوت ترادف $\{x_n\}$ست عناصر x_n وست قیمت عناصرآنها دراین است که ست اولی همیشه

بی نهایت بوده وازمجموع عناصرتشکیل یافته که اندازه آخرین حدود تعدادآن

$n = 1,2,3,4...$ متفاوت میباشد.

وست دوم ازتمام اعدادقیمت عناصرترادف داده شده تشکیل یافته ومیتوان متناهی باشد.

بطورمثال:ترادف ثابت $x_n = 1$ و $n = 1,2,3,4...$ طوریکه تمام ترادف ها ازبی نهایت عناصر اعدادتشکیل یافته است.

اماست قیمت عناصرآن ازعدد1 تشکیل یافته است.

تعریف7:ترادف ازبالا(پائین)محدوداست اگرست قیمت عناصرآنها ازبالا (پائین)محدودباشد ، تعریف عناصرترادف رامیتوان به ترتیب ذیل تعمیم داد:

تعریف$7'$: ترادف$\{x_n\}$ بنام ترادف محدود ازبالا(پائین)یادمیشود.اگرچنین عدد موجودشودکه برای تمام اعداد...$n = 1,2,3,4$ غیرمساوات $x_n \leq b$ صدق نماید.

(درمطابقت به غیرمساوات$\{x_n \geq b\}$

تعریف8: ترادف محدودازبالاوپائین بنام ترادف محدودیادمیشود. واضح است که ترادف $\{x_n\}$ محدوداست وقتیکه تنهاوتنهاچنین عددb موجودشود که برای تمام اعداد...$n = 1,2,3,4$ غیرمساوات $|x_n| \leq b$صادق باشد.

تعریف9: ترادف که ازبالا،(پائین) محدودنباشد بنام ترادف غیرمحدودازبالا،پائین یادمیشود.

بطورمثال: ترادف های$\{\frac{1}{n}\}$و $\{\sin\frac{\pi}{2}n\}$محدوداند.

ترادف$\{n\}$غیرمحدوداست.واضح است که این ترادف ازطرف پائین محدوداست ولی ازطرف بالا غیرمحدوداست وترادف $\{\sin\frac{\pi}{2}n\}$ غیرمحدود ازطرف بالاوپائین است.

قضیه2: اگرترادف عددی دارای لیمت متناهی باشددرآنصورت محدودمیباشد.

ثبوت: فرضاً ترادف متقارب $\{x_n\}$ داده شده است.

فرضاً : $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

بطورمثال: $\varepsilon = 1$ میگریم،مطابق تعریف لیمت ترادف باید چنین n_1 موجودشودکه برای هر

$n > n_1$ غیرمساوات $|x_n - a| < 1$ صدق نماید.

فرضاً : d بزرگترازعدد1 و $|x_1 - a|, \dots |x_n - a|$ باشد.

پس برای تمام $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ غیرمساوات $|x_n - a| \le d$ صادق است ، دراینصورت

برای تمامn داریم که: $a - d \le x_n \le a + d$ به این معنی که ترادف داده شده محدوداست.

4.5 ترادف مونوتونی (یکنواخت)

تعریف10: سرحد فوقانی(تحتانی) ست قیمت عناصرترادف $\{x_n\}$ بنام سرحدفوقانی (تحتانی)ترادف داده شده یاد میشود.

وچنین نشان میدهند $\sup\{x_n\}$ ویا $\sup_{n=1,2\dots} x_n$ (درمطابقت به $\inf\{x_n\}$ ویا $\inf_{n=1,2\dots} x_n$)

اگرسرحدفوقانی (تحتانی)یک عددباشد،پس درآنصورت این تعریف را میتوان به ترتیب ذیل فورمول بندی نمود.

تعریف11: عددa عبارت ازسرحد فوقانی(تحتانی) ترادف $\{x_n\}$ ، $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ میباشد ، اگر:

1) برای هر $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ غیرمساوات $x_n \le a$ (غیرمساوات $x_n \ge a$) صدق نماید.

2) برای هر $\varepsilon > 0$ چنین عدد n_ε موجود شودکه $x_{n\varepsilon} > a-\varepsilon$ (درمطابقت به $x_{n\varepsilon} < a+\varepsilon$) شود.

تعریف12: ترادف $\{x_n\}$ بنام ترادف متزاید(متناقص) یاد میشود ، اگربرای هر $n = 1,2,3,4...$ غیرمساوات $x_n \le x_n + 1$ (درمطابقت به غیرمساوات[1] $x_n \ge x_n + 1$) صدق نماید.

ترادف متزاید ومتناقص بنام یکنواخت یاد میشود.

بطورمثال ترادف $\{\frac{1}{n}\}$ متناقص است ، ترادف $\{n\}$ متزاید است وترادف $\{\sin\frac{\pi}{2}n\}$ مونوتونی محسوب نمیشود.

قضیه 3:(ویراشتراس)[2]: تمام ترادف های عددی متزاید $\{x_n\}$ دارای لیمت متناهی است ، اگرآنها محدود ازطرف بالا وبی نهایت باشد.

که برابربه $+\infty$ است.

اگرآنهاغیرمحدود ازطرف بالا باشدچنانچه:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}..............................(4,21)$$

باشد ، بطورمشابه به تمام ترادف های عددی متناهی $\{x_n\}$ دارای لیمت متناهی میباشد.اگراین ترادف محدودپائین وبی نهایت باشد ، برابربه $(-\infty)$ است.

واگرآن غیرمحدودپائین باشد درآنصورت برابراست به:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}..............................(4,22)$$

ثبوت: فرضاً ترادف $\{x_n\}$ متزایداست. مساوات (4.21) را ثبوت می نماییم.

ازادعائی باقیمانده قضیه برای ترادف متزاید به نتیجه ذیل میرسیم.

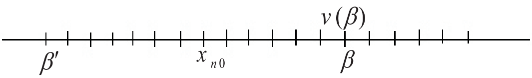
---

(1) ترادف متزاید (متناقص) همینطوربنام غیرمتناقص (غیرمتزاید) یاد میشود.

(2) ک ویراشتراس (1815-1897) ریاضیدان المانی

فرضاً : $\beta = \sup\{x_n\}$ (قیمت β میتوان متناهی،ویابی نهایت که برابربه $+\infty$) باشد ومجاورت اختیاری $V(\beta)$ رادرنظرمیگیریم.

نقطه β را به β' نشان میدهیم انجام طرف چپ آن به β' مطابق شکل 12 است.



شکل 14

واضح است که $\beta' < \beta$ میباشد مطابق به تعریف سرحد فوقانی داریم که:

1) برای هرعدد $n \in N$ غیرمساوات زیررا داریم.

$$x_n \le \beta \text{....................}(4,23)$$

2) موجودیت چنین عدد n_0 که. $x_{n0} > \beta' \text{....................}(4,24)$

بــه علــت تزایــد تــرادف $\{x_n\}$ از (4.23) و (4.24) نتیجــه میشــود کــه بــرای تمــام اعــداد n_0 غیرمساوات:

$$\underset{(4,24)}{\beta' < x_{n0}} \le \underset{(4,23)}{x_n \le \beta} \text{.............................}(4,25)$$

به این معنی که β عبارت ازلیمت ترادف $\{x_n\}$ میباشد. بطورمشابه حالت ترادف متناقص بررسی میگردد□.

تبصـره:1: بـه ایـن ترتیـب تمـام تـرادف هـای مونوتـونی(یکنواخـت)اگرمتنـاهی باشـد، پـس محدوداست واگربی نهایت باشدپس غیرمحدوداست ودارای لیمت بوده که لیمت آن برابربه $+\infty$ است.

اگرترادف یکنواخت باشد ،پس غیرمحدودفوقانی است واگرترادف غیرمحدود تحتانی باشد برابربه $-\infty$ است. ترادف فرعی یکنواخت نیزترادف یکنواخت میباشد.همینطورآن به نوبت خودهمیشـه دارای لیمـت متنـاهی یـا بـی نهایـت بـوده کـه یقینـآ بالیمـت تـرادف هـا مطابقـت

(2) ک.ویرشتراس.(1815-1897) ریاضیدان آلمانی.

دارد(مراجعه نمایئد به : لیما درپراگراف 4.3) درفوق اشاره شده بودکه اگرترادف متقارب باشد ، پس آن محدوداست.

قضیه2: ازاینجا به عنوان نتیجه گیری که اگرترادف متزایدشونده متقارب باشد، پس این ترادف ازبالامحدوداست. ازطرف دیگراگرترادف متزایدشونده ازبالا محدودباشد، پس این ترادف متقارب است.(قضیه3).

به این ترتیب ادعائی ذیل صدق می نماید.

نتیجه:برای اینکه ترادف متزایدشونده متقارب شودلازم وکافی است ، تااین ترادف ازبالامحدودباشد.بطورمشابه برای ترادف متباعد شونده این ادعا صادق است.

تبصره2: اگر $\{[a_n, b_n]\}$سیستم داخل قطعه ها به طوریکه به صفرمتقرب میشوند داشته باشم و ξنقطه باشدکه متعلق به تمام قطعه های سیستم داده شده باشد، پس :

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{b\to\infty} b_n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,26)$$

این حقیقت درپراگراف (3.7) اشاره شده که $\xi = \sup\{a_n\} = nif\ \{b_n\}$ ازطرف دیگرترادف $\{a_n\}$درمطابقت به $\{b_n\}$متزاید(متناقص)می باشد ازاینجا به اساس مساوات(4.21)و(4.22)ومساوات(4.26) به نتیجه میرسیم.

مثال:عددe: فرضاً $x_n = (1+\frac{1}{n})$ داشته باشیم طوریکه $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ باشد.نشان میدهدکه این ترادف مشابه با تطبیق فورمول بینوم نیوتن بدست می آید.

یعنی:

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+...+\frac{n(n-1)...(n-R+1)}{1\cdot 2\cdot R}\cdot\frac{1}{n^R}+$$

$$...+\frac{n(n-1)...1}{1\cdot 2\quad n}\cdot\frac{1}{n^2}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+...+\frac{1}{R!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{R-1}{n})+$$

$$...+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{n-1}{n})..(4,27)$$

انتقال ازn به n+1 درحاصل جمع بخش اول مساوات (4.27)جای میگرد.عددجمع شونده طوریکه باهم مثبت باشد اضافه میشود.به غیرازآن هریک ازجمع شونده ها با سومی علاوه میشـــــود ، طوریکـــــه: $1-\frac{s}{n}<1-\frac{s}{n+1}$, $s=1,2,...,n-1$, $n=1,2,3...$طوریکـــــه $n=1,2,3...,x_n<x_n+1$ باشد.

تبصره دیگرکه در(4.27) تذکررفته که هریکی ازقوس های شکل $1-\frac{s}{n}$ازیک کمتراست.و $n!=1.2.3...n\geq 1.2.3......2=2^{n-1}$ درنتیجه $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ برای تمام$n=1,2,3...$ داریم.

$$x_n\leq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\leq 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}............(4.28)$$

حاصل جمع: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$ (طوریکه میتوان به فورمول ابتدائی ریاضی برای حاصل جمع پولینوم (حدود) تصاعد هندسی به آسانی برحسب معلوم محاسبه کرد واین برابربه $1-\frac{1}{2^{n-1}}$طوریکه $n=1,2,3...$ بطورخلاصه حاصل میداریم که:

$2 \le x_n < x_n + 1 < 3$............(4.29) وهمینطورترادف $\{x_n\}$ بر اساس قضیه 3 متزایدمحدودبالایي ودارای لیمت میباشد.این لیمت به حرف e نشان داده میشود.به گرفتن لیمت به اساس(4.29) حاصل میداریم که $2 < e \le 3$ است.ارقام بسیاردقیق میتوان حاصل نمود که نزدیک به مساوات $e \approx 2.718281828459045$ است.همینطورثبوت میشودکه عددe ناطق است (مراجعه شود به پراگراف 34.14) علاوه برآن غیرالجبری بوده وبه غیرازیک عده معادلات الجبری با ضرایب تام حساب نمیشود،عددe درانالیزریاضی رول خاصي رابازی میکند.وبه تفصیل دراساسات لوگارتم طبیعی محاسبه میشود.

4.6 قضیه بلزانو[1] – ویرشتراس

درپراگراف 4.4 ثبوت شد که تمام ترادف های متقارب محدوداند.درحقیقت عکس این ادعا درست نیست.بطورمثال ترادف $x_n = (-1)^n$ طوریکه $n = 1,2,3...$ محدودغیرمتقارب است. همین قسم نشان داده میشودکه تمام ترادف های محدوددارای ترادف های متقارب فرعی اند.این ادعا بنام قضیه بلزان-ویرشتراس یاد می گردد. یا خواص فشرده ترادف های محدودمی باشد.

قضیه4: ازهرترادف محدودمیتوان ترادف متقارب جدا ساخت وازهرترادف غیرمحدودوترادف بی نهایت بزرگ،که دارای لیمت بی نهایت خودبا علامه مشخص میباشد.

ثبوت: فرضاًترادف $\{x_n\}$ محدود باشد ، پس درآنصورت چنین قطعه خط $[a,b]$ موجودمیشود،که $a \le x_n \le b$ طوریکه $n = 1,2,3...$ باشد قطعه $[a,b]$ رابادوقطعه برابرتقسیم میکنیم اگربرحسب اندازه آخرین حدودیکی ازقطعه بدست آمده دارای عناصر بی نهایت زیاد ترادف داده شده میباشد.وچنین نشان داده میشود $[a_1,b_1]$ فرضاً $\{x_{n_1}\}$ ازچنین حدودترادف داده شده که بالای قطعه $[a_1,b_1]$ واقع شده ، قطعه $[a_1,b_1]$ بالای دوقطعه برابرتقسیم می نماییم.

---

(1) بلزان-(1781-1848) ریاضیدان چکی.

اگریکی ازقطعه حاصل شده دارای بی نهایت حدودازترادف اولی باشد ، پس آنها را دوباره تقسیم می نمایم وبه $[a_2, b_2]$نشان میدهیم . به علت اینکه درقطعه$[a_2, b_2]$بازهم بی نهایت حدودترادف موجوداست بنابرین میتوان چنین نوشت: $\{x_{n_2}\}$ که $b_{n_2} \in [\ _2,\ a_2]$ $n_2 > n_1$

این پروسه ادامه می یابد.قطعه های $[a_k, b_k]$ترادف راحاصل میداریم که هرحد آخری(بعدی) عبارت ازنیمه قبلی بوده وترادف چنین عناصر x_{n_R} ترادف $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ $k = 1, 2, \cdots \wedge nk'' = nk'$است.درصورتیکه $k'' > k'$باشد. ترادف $\{x_n\}$ به علت ساختمان ترادف فرعی،ترادف$\{x_n\}$ نامیده میشود.نشان میدهیم که این ترادف فرعی متقارب میباشد.ترادف قطعه $[a_k, b_k]$طوریکه $k = 1, 2, \cdots$بنام ترادف داخل انتروالهای قطعه برحسب طول که نزدیک به صفرمیشودیادمی نماید. طوری که

همینطور غیرمحدودبالایي است طوریکه ترادف داده شده غیرمحدودبالای $\{x_n\}$ $n = n_1 + 2...$

، $n = 1,2,3...$ حدودعددمتناهی آنرا جدامیسازیم حاصل میداریم ، چنانچه $n_2 > n_1$ ، $n_2 \in N$ باشدکه

$xn_2 > 2$ موجودشود.این پروسه راادامه میدهیم ترادف چنین اعداد n_k که

$n_1 < n_2 < \cdots n_k < \cdots$ و $x_{n_1} > 1$, $x_{n_2} > 2 \cdot x_{n_k} > k$ حاصل میداریم.ازاینجا نتیجه میشودکه

x_{n_k} ترادف فرعی $\{x_n\}$ مطابق نتیجه خواص Π پراگراف 4.3 که $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$

تبصره:ادعایي دوم قضیه4 رامیتوان تصریح کرد : درثبوت قضیه 4 نشان داده شده بودکه اگرترادف ازبالاغیرمحدودباشد،پس ترادف فرعی که تقرب به ∞+میکندموجودنیست.

بطورمشابه اگرترادف ازپائین غیرمحدودباشد،پس ترادف فرعی که تقرب به ∞- میکندموجودنیست.

تعریف13: لیمت متناهی یا بی نهایت باعلامه مشخص ترادف فرعی ترادف داده شده بنام لیمت قسمی آن یادمیشود.قضیه بلزانو-ویرشتراس(حصه اول قضیه4)وشباهت آن برای ترادف غیرمحدود(حصه دوم قضیه4) نشان میدهیدکه اجزای تمام ترادف های آن دارای لیمت متناهی یا بی نهایت باشد ، اگرترادف محدودباشدمتناهی اصلی است.به این ترتیب هرترادف عددی $\{x_n\}$ $x_n \in k$ باشددرگسترش ست اعدادحقیقی دارای لیمت قسمی میباشد ، درآنصورت ست لیمت قسمی به k' برای هرترادف همیشه غیرخالی میباشد.

تمرین9: ثابت نمایید که برای اینکه ترادف متقارب باشدلازم وکافی است تاآن محدودودارای لیمت قسمی باشد.

10: ثابت نمایدکه عنصر a (عددیایکی ازبی نهایت باعلامه ∞+و∞-) عبارت ازلیمت قسمی ترادف میباشدتنهاوتنها وقتیکه هرمجاورت آنها دارای بی نهایت پولینوم های ترادف داده شده میباشد.

4.7 معیار کوشی[1] برای تقارب ترادف ها

قبلاً ازمعیار کوشی معلومات عمومی که میتوان توسط آن ترادف داده شده متقارب تشخیص میگردیدموجودنبود.ونیزخودتعریف ترادف متقارب برای آن کافی نبوده که بتوان بوسیله قیمت آن لیمت نامعلوم را تشخیص نمود.همینطورکه معیاربرای تعین (تعریف) ترادف موجود نبود که به اساس خواص عناصر ترادف داده شده استوارباشد،که بعداً درزمینه درقضیه5 راجع به معیار کوشی بحث خواهد شد.

تعریف14: میتوان گفت که ترادف $\{x_n\}$ شرایط کوشی راصدق میکند.اگربرای هر $\varepsilon>0$ عدد n_ε موجودشودکه برای تمام اعدادn وm شرایط$n>n_\varepsilon$و $m>n_\varepsilon$ راصدق نماید،غیرمساوات

$|x_n - x_m| < \varepsilon$.................(4.30) صادق است. ترادف که معیاد کوشی راصدق می کندبنام ترادف اساسی یادمیشود. توسط سمبولهای منطقی شرایط کوشی راطورذیل مینویسند.

$$\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon \in \forall n \in N\ \forall m \in N; n>n_\varepsilon, m>n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

شرایط(4.30) رامیتوان چنین فورمول بندی نمود : برای هر $\varepsilon>0$ چنین عدد n_εموجودشودکه برای تمام اعداد$n>n_\varepsilon$وبرای تمام اعداد تام غیرمنفی p غیرمساوات،

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$...........................(4.31) صدق کند.

برای اینکه به شرایط معادل (4.30) و(4.31) نایل شویم کافیست که $p=n-m$شود.اگر $n\geq m$باشد و $p=n-m$ باشد.واگر $m>n$ شودبه اساس قضیه5(معیادکوشی)،برای اینکه ترادف متقارب باشدلازم وکافیست تاشرایط کوشی راتامین کند.

---

(1) و.کوشی (1798-1857) ریاضیدان فرانسوی.

ثبوت شرط لازمی: فرضاً ترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد، $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ اگر $\varepsilon > 0$ باشد،درآنصورت

مطابق به تعریف لیمت ترادف چنین n_ε موجودشودکه برای تمام اعداد $n > n_1$ غیرمساوات

$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ تطبق شود فرضاً $n > n_\varepsilon$ و $m > n_\varepsilon$ باشد، درآنصورت:

$$|x - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_n)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنابرین،شرایط کوشی صدق میکند.

ثبوت شرط کافی: فرضاً درترادف شرایط کوشی را صدق می کنددرآنصورت برای تمام

$\varepsilon > 0$ چنین n_ε موجودشود که $n > n_\varepsilon$ و $m > n_\varepsilon$ باشد.

پس $|x - x_m| < \varepsilon$.

بطورمثال: $\varepsilon = 1$ را در نظر میگریم دراینصورت چنین عدد n_1 موجود میشود، درصورتیکه

$n > n_1$ و $m > n_1$ باشد غیرمساوات $|x_n - x_m| < 1$ تطبیق میشود.اگر $n > n_1$ و $m = n_1 + 1$ باشد،پس

$|x_{n_1} - x_n + 1| < 1$ است. ویا $x_{n_1} + 1^{-1} < x_{n_1} + 1^{+1}$ درصورت که $n > n_1$ باشد. به این معنی

که ترادف $\{x_n\}$، $n = n_1 + 1, n_1 + 2 \ldots$ محدوداست. به اساس قضیه4 ترادف متقارب $\{x_n\}$

موجودمیشود.

فرضاً $\lim\limits_{R \to \infty} x_{nR} = a$ نشان میدهیم که تمام ترادف های داده دشده $\{x_n\}$ همین قسم متقارب

ودارای لیمت عددa است.فرض میکنیم که $\varepsilon > 0$ باشد ، درآنصورت اول برحسب تعریف

لیمت ترادف چنین k_ε موجودمیشودکه برای تمام نمبر $k > k_\varepsilon$ یا همین قسم مطابق

خودتعریف ترادف برای تمام $nk > nk_{\varepsilon}$ غیرمساوات $|x_{nR} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ تطبیق

میشود.همینطور،ترادف $\{x_n\}$ شرایط کوشی راتامین می کند.پس چنین عدد n_{ε} موجودمیشودکه

برای تمام $n > n_{\varepsilon}$ وبرای تمام $m > n_{\varepsilon}$ غیرمساوات $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ تطبیق میشود. حاصل

میداریم که $N_{\varepsilon} = \max\{n_{\varepsilon}, nR_{\varepsilon}\}$ درصورتیکه $nk > N_{\varepsilon}$ باشد ، درآنصورت برای تمام

$n > N_{\varepsilon}$ باشد.حاصل میداریم که :

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{nR}) + (x_{nR} - a)| \le |x_n - x_{nR}| + |x_{nR} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ازاینجا ثبوت شدکه : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

تمرین11: متن شرایط لازمی وکافی منفی معیارکوشی رافورمول بندی نماید طوریکه ترادف لیمت نداشته باشد.

12: ثابت نمایدبرای اینکه ترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد،لازم وکافی است تابرای هر $\varepsilon > 0$ چنین $n_{\varepsilon} \in N$ موجودشودکه برای تمام $n > n_{\varepsilon}$ غیرمساوات $|x_n - x_{n_{\varepsilon}}| < \varepsilon$ صدق نماید.

مسله3: واضح نمایدکه ترادف معمولی وغیرمتقارب $\{x_n\}$ ازشرایط کوشی که برای هرعددطبعیp لیمت $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n + p - x_n) = 0$ موجوداست.

4.8 ترادف های بی نهایت کوچک:

بالای ترادف ها میتوان عملیه های،حسابی،جمع،تفریق،ضرب وتقسیم رااجرانمود.آنها راتعریف می نماییم.

تعریف15: فرضاً ترادف عددی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ داده شده باشد،حاصل جمع،حاصل تفریق،وحاصل ضرب این ترادف هابنام مطابقت ترادف یادمیشود.

طوریکه $\{x_n+y_n\},\{x_n-y_n\},\{x_n,y_n\}$ اگر $y_n\neq 0$ و $n=1,2,3...$ باشد ، می نامند.پس

تقسیم ترادف $\{x_n\}$ بالای ترادف $\{y_n\}$ بنام ترادف $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ یاد میشود.بالاخره ضرب ترادف

$\{x_n\}$ درعدد(c) بنام ترادف $\{cx_n\}$ یاد میشود.اگرترادف $\{y_n\}$ چنان باشدکه دارای

عناصرعددی متناهی متزایدبرابربه صفرباشد،پس درآنصورت چنین عدد $n_0\in N$ که

$n\geq n_0$ و $n\in N$ موجودشودکه غیرمساوات $y_n\neq 0$ تطبیق میشود. پس درآنصورت ممکن

است ترادف $\{\frac{x_n}{y_n}\}$

هدایت:مفاهیم راجع به ترادف باعدد $n\geq n_0$ رابررسی نمایید.

تعریف16: ترادف $\{x_n\}$ رادرصورتی بنام ترادف بی نهایت کوچک یادمیشوداگر

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ شود ، درپراگراف (3.1)نیزترادف بی نهایت کوچک $\alpha_n=\frac{1}{n}$ ، $\alpha_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n$

، $n=1,2,3...$ بررسی گردیده است. چندخواص ترادف بی نهایت کوچک رایادآورمیشویم:

1) هرترکیب خطی معین،بی نهایت کوچک عبارت ازبی نهایت کوچک میباشد.

ثبوت: فرضاً ترادف عددی $\{x_n\}$ و $\{\beta_n\}$ بی نهایت کوچک است، پس درآنصورت:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{\beta\to\infty} \beta_n = 0 ....(4.32)$$

و λ و μ هرکدام باعددحقیقی نشان میدهیم که ترادف $\{\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\}$ نیزبی نهایت کوچک

است.فرضآ چنین $0<\varepsilon$ اختیاری داده شده وچنین عددc رادرنظرمیگیریم طوریکه:

$c > |\lambda| + |\mu| ....(4.33)$ درآنصورت مطابق به تعریف لیمت از (4.32) نتیجه میشودکه

چنین عدد n_0 موجود میشودکه برای تمام $n > n_0$ غیرمساوات

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{c} \quad , \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{c} ....(4.34)$$

صادق است .

به این ترتیب $|\lambda\alpha_n + \mu\beta_n| \le |\lambda(\alpha_n) + |\mu||\beta_n|| < \frac{|\lambda| + |\mu|}{c}\varepsilon < \varepsilon$ به این معنی که $(4.33), (4.34)$

$\lim_{n\to\infty}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = 0$ پس درآنصورت ترادف $(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$ بی نهایت کوچک است.درنتیجه

طبق گفتارفوق برای هرترکیب خطی بی نهایت کوچک ازمیتوداستقراریاضی استفاده میشود.

مسأله4:جمع اعدادبی نهایت راتعریف نمایید ونیزجمع اعدادترادف بی نهایت رابامثال واضح نمایدوترادف بی نهایت کوچک راتعریف نموده وجمع ترادف های که بی نهایت شمرده نمیشودبامثال واضح نماید.

Π) حاصل ضرب ترادف های بی نهایت کوچک درترادف های محدودبنام ترادف های بی نهایت کوچک یاد میشود.

ثبوت: فرضاً α_n ترادف بی نهایت کوچک است و $\{x_n\}$ ترادف محدوداست ، پس درآنصورت چنین عدد $b>0$ موجودمیشودکه برای تمام $n=1,2,3...$ غیرمساوات $|x_n|\le b$ صدق مینماید. $\varepsilon>0$ داده شده به اساس تعریف بی نهایت کوچک برحسب نتیجه چنین عدد n_ε موجودشودکه برای تمام $n>n_\varepsilon$ غیرمساوات $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{b}$ صدق نماید.پس برای تمام $n>n_\varepsilon$ داریم که:

$$|\alpha_n x_n|=|\alpha_n||x_n|<\frac{\varepsilon}{b}\cdot b=\varepsilon$$

به این معنی که ترادف $\{\alpha_n x_n\}$ بی نهایت کوچک است□.

نتیجه: حاصل ضرب عدد مشخص ترادف بی نهایت کوچک ترادف بی نهایت میباشد. درنتیجه برحسب استقرای ریاضی خواص Π یادآورمیشویم که ترادف بی نهایت کوچک مانند تمام ترادف ها که دارای لیمت میباشد، محدوداند.(مراجعه نمائید به: قضیه2.پراگراف4.4)

مسله5: مفاهم ذیل راتعریف وبامثالها واضح نماید:

حاصل ضرب عددبی نهایت به اساس تعدادمضرب ها(مفاهم عمومی حاصل ضرب متناهی مضرب ها) حاصل ضرب ترادف عددبی نهایت، ضرب عددبی نهایت کوچک،وحاصل ضرب ترادف های بی نهایت کوچک.

تمرین13: ثابت نمایید که ترادف $x_n\neq 0$ طوریکه $n=1,2,3...$ بی نهایت کوچک است شرط لازمی وکافی برای اینکه ترادف $\frac{1}{n}$، $n=1,2,3...$ بی نهایت بزرگ باشدبنویسید.

4.9 خواص لیمت هاراجع به عملیه های حسابی بالای ترادف ها:

لیما(لیم): برای اینکه عددa لیمت ترادف عدد $\{x_n\}$شودلازم وکافیست تاحدود $\{x_n\}$دارای شکل $x_n = a + a_n$ ، $n = 1,2,3...$باشد.درحقیقت $\{x_n\}$ترادف بی نهایت کوچک است فرضاً ترادف $\{x_n\}$ وعددa داده شده باشند،پس درآنصورت حاصل میداریم که $a_n \overset{def}{\Leftrightarrow} x_n - a$

درآنصورت شرط $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ طبق تعریف لیمت ترادف مساوی است به: برای هر $\varepsilon > 0$

چنین عدد $n_0 \in N$ موجودشود که برای تمام $n > n_0$ غیرمساوات $|x_n - a| < \varepsilon$ صادق باشد

پس درآنصورت غیرمساوات $|\alpha_n| < \varepsilon$ صادق بوده ومعادل به آنکه $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.□

لیماي فوق درارائه وخواندن لیمت ترادف های بی نهایت رول خاصی رابازی میکند.همینطورتوسط لیماي متذکره لیمت ترادف فوق به صفرمساوی گردیده است.که درمطالعه خواص ردیف ترادف های متقارب بسیاروسیع استفاده میشوند.خواص لیمت ترادف راجع به یک عددعملیات بالای حدودترادف های عددی راثابت می نماید.

1^0) اگرترادف $\{x_n\}$متقارب باشد،پس متقارب به ترادف $\{|x_n|\}$است.درصورتیکه اگر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ باشد،پس $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ میباشد.

ثبوت: اگر $\lim |x_n| = |a|$ ،پس برای هر $\varepsilon > 0$ چنین عدد n_ε موجودشودکه برای تمام اعداد $n > n_\varepsilon$ غیرمساوات $|x_n - a| < \varepsilon$صادق باشد.و $||x_n| - |a|| < |x_n - a|$همین قسم برای تمام

اعداد $n > n_\varepsilon$ بجا خواهدبودکه میتوان غیرمساوات $\left\| x_n \right| - \left| a \right\| < \varepsilon$ رانوشت این به آن معنی

است که $\lim\limits_{n \to \infty} \left| x_n \right| = \left| a \right|$.□

2^0) ترکیب خطی متناهی ترادف متقارب عبارت ازترادف متقارب است، که لیمت آن برابربه همین ترکیب خطی لیمت های ترادف داده شده میباشد.

ثبوت: فرضاً $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in R, \lim\limits_{n \to \infty} y_n = b \in R$..............(4.35) درآنصورت به علت

شرایط لازمی لیما برای موجودیت لیمت متناهی حدود ترادف $\{x_n\}$و $\{y_n\}$ممکن است به این شکل نوشت $n = 1,2..., x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$..........(4.36)، $\{\alpha_n\}$و $\{\beta_n\}$ بی نهایت کوچک.

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0 \text{............................(4.37)}$$

فرضاً حال λو μ اعداداست ، پس درآنصورت حدودترادف $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ به شکل:

$n = 1,2..., \lambda x_n + \mu y_n = (\lambda a + \mu b) + (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n)$...........(4.38)به جای ترادف

$\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ به علت که ترادف $\{\alpha_n\}$و $\{\beta_n\}$ بی نهایت کوچک است.همینطوربی نهایت کوچک است(مراجعه نمائید به : خواص 1^0ترادف بی نهایت کوچک درپراگراف4.8).

$$\lim(\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) \underset{(4.36)}{=} 0 \text{............(4.39)}$$

به اساس شرایط لیما برای موجودیت لیمت متناهی ازمساوات (4.38) نتیجه میشودکه ترادف{

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n+\mu y_n)=\lambda a+\mu b$$

$\lambda\alpha_n+\mu\beta_n$ } دارای لیمت برابربه $\lambda a+\mu b$ بوده پس به اساس

(مراجعه نمائید به 4.35) داریم.

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n+\mu y_n)=\lambda\lim_{n\to\infty}x_n+\mu\lim_{n\to\infty}y_n$$

طبق معلومات قبلی اگربرای هرترادف متقارب ازمیتوداستقرائی ریاضی استفاده شود، پس درنتیجه ترکیب خطی متناهی بدست می آید.

3^0: اگرترادف $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متقارب باشد ، پس حاصل ضرب آنها $\{x_ny_n\}$ همین قسم متقارب است ومینویسند.

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}y_n$$

پس داریم که لیمت حاصل ضرب ترادف متقارب موجوداست وبرابربه حاصل ضرب لیمت ترادف داده شده میباشد.

ثبوت:فرضاً $\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b$ درآنصورت داریم که: $y_n=b+\beta_n,x_n=a+\alpha_n$

طوریکه:$n=1,2,3...$ و $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$

زیراکه: $x_ny_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+(\alpha_nb+\beta_na+\alpha_n\beta_n)$ به علت خواص I و II ترادف بی نهایت کوچک (مراجعه شودبه پراگراف 4.8)

پس:

$$x_n y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$$

نتیجه1: اگرترادف $\{x_n\}$ متقارب باشد، پس برای هرعددc ترادف $\{cx_n\}$نیزمتقارب میباشد.

$$\lim_{n\to\infty} c\alpha_n = c\lim_{n\to\infty} x_n$$

پس درآنصورت عددثابت رامیتوان به عقب علامه لیمت نوشته ، این

ادعا مستقیماً ازخواص 3^0نتیجه میشود . وقتیکه ترادف $\{y_n\}$ ثابت باشد $y_n = c$ و $n=1,2,3...$

(وهمین طورازخواص 2^0 وقیتکه $y_n = 0$ باشدو $n=1,2,3...$) باشد به نتیجه میرسد.

نتیجه2: اگر $\{x_n\}$ ترادف متقارب وk عددطبیعی باشد ، پس داریم.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k$$

این ادعا برحسب استقرائی ریاضی خواص 3^0به نتیجه میرسد.

4^0): اگرترادف های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متقارب باشدو $y_n \neq 0$طوریکه $n=1,2,3...$ و $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$

شودپس ترادف $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$متقارب است وداریم که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$$

پس درآنصورت لیمت قسمی ترادف متقارب فرض شده موجوداست وبرابربه لیمت قسمی ترادف های داده شده میباشد.

ثبـــوت III :فرضـــآ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ باشـــد بـــرای تعریـــف $b>0$داریـــم کـــه

$x_n = a+\alpha_n$, $y_n = b+\beta_n$ طوریکه $n=1,2,3...$ که $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ومطابق نتیجه(1)

ازخواص لیمت ترادف درپراگراف 4.3 چنین عدد n_0 موجودشودکه برای تمام اعداد $n>n_0$

غیرمساوات $\frac{b}{2} = y_n$صدق می نماید.

(واقعآ $b < \frac{b}{2}$ است ، دراینجا ازفرضیه$b>0$استفاده شده) زیرا درصورتیکه$n>n_0$باشدداریم

$\frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$ ($y_n \neq 0$ زیرابه آن میتوان تقسیم کرد)

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a)..................(4.40)$$

ازاینجـــا $\frac{2}{b^2} < \frac{1}{by_n} = \frac{1}{b(b+\beta_n)} < 0$ پـــس درآنصـــورت تـــرادف $\frac{1}{b(b+\beta_n)}$ کـــه

$n=n_0+1, n=n_0+2$ محدوداست(ازاینجا بدون شک نتیجه میشودکه این ترادف محدود

است ونزدیک به هر...$n=1,2,3$)است.مطابق خواص ترادف بی نهایت کوچک،ترادف

$(\alpha_n b - \beta_n a)$ عبـــارت ازبـــی نهایـــت کوچـــک میباشدبرحســـب آنهـــا تـــرادف

$\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a)\}$ به اساس مساوات(4.40)به نتیجه میرسم که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

در این حالت به طورمشابه وقتیکه $b<0$ میگردد.

تبصره: درحالتي که ترادف دارای لیمت بی نهایت باشد ،ادعا بطورمشابه مطابق به خواص $2^0, 4^0$بوده بصورت عموم بجا خواهدبود.بطورمثال :

فرضاً $x_n=n+1$, $y_n=n$: و...$n=1,2,3$ باشد، پس :

درآنصورت $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ و $\lim(x_n-y_n)=1$ است.

اگر $x_n=2n$, $y_n=n$ و...$n=1,2,3$ باشد،پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=+\infty$$

هرگاه $x_n=n+\sin\frac{\pi n}{2}$, $y_n=n$ و ...$n=1,2,3$ باشد،پس داریم.

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=+\infty$$

وترادف $x_n - y_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ طوریکه$n = 1,2,3...$،دارای هیچ نوع لیمت متناهی ویابی نهایت نمیباشد.این مثال نشان میدهدکه یک نوع فرضیه راجع به ترادف های$\{x_n\}$و $\{y_n\}$ که دارای لیمت بی نهایت میباشدوجوددارد.برای ترادف $\{x_n - y_n\}$میتوان حالت های مختلف راملاحظه کرد. که این حالت به صورت عمومی درخواص 4^0-2^0 راجع به لیمت ترادف های بی نهایت برای تمام آنها بجا خواهدبود. بطورمثال: اگر

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ یا($\lim\limits_{n\to\infty} y_n$) متناهی باشد ، پس درآنصورت

$\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} = +\infty$ شود.پس درانصورت : یا اگر $\alpha > 0$ باشدو $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

تبصره2: اگرتفاوت$\{x_n - y_n\}$ازترادف$\{x_n\}$و $\{y_n\}$ بی نهایت کوچک باشدکه آنها همزمان لیمت متناهی داشته باشند ویا نداشته باشندبه دلیلي كه اگراین لیمت ها موجودیت داشته باشد،پس آنها بین خوددرحقیقت برابرمی باشند.

فرضاً: $\{x_n - y_n\} = \alpha_n$ ، $n = 1,2,3...$ که دراینجا $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ اگرلیمت متناهی داشته باشد

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ پس لیمت متناهی است: $\lim\limits_{n\to\infty} y = (\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \alpha_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$

ترادف های$\{x_n\}$و $\{y_n\}$ طرف به طرف بین خودبرابراند.پس ادعا ثبوت شد.

تمرین14: ثبوت نمایدکه اگرتفاوت $\{x_n - y_n\}$ ازترادف $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ بی نهایت کوچک باشد،پس آنها همزمان لیمت بی نهایت دارند.ویاندارند بدليلي که اگراین لیمت ها موجودباشند، پس آنها برابراند.

15) ثبوت نمایدکه اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ باشدوترادف $\{y_n\}$ محدود باشد ، پس $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$ است.

مثال: فرضآ $x_0 > 0$ و $a > 0$ ، $x_n = \frac{1}{2}(x_n - 1 + \frac{a}{x_n - 1}$..............(4.41) طوریکه...$n = 1,2,3$ باشند.ثبوت می نمایم که $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$ برحسب استقرأ ریاضی مستقیمآ فهمیده میشودکه $x_n > 0$ برای تمام...$n = 1,2,3$ صادق است.برعلاوه نشان میدهیم درحالیکه $t > 0$ باشد، غیرمساوات $t + \frac{1}{t} \geq 2$ به نتیجه میرسد،ازغیرمساوات $t = \frac{x_n}{\sqrt{2}}$ استفاده می کنیم.به اساس(4.41)حاصل میداریم که :

$$x_n + 1 = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{\sqrt{a}}{2}(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}) \geq \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a}$$

و ...$n = 0,1,2,3$،حال نشان میدهیم که ترادف x_n...,$n = 1,2,3$ متناقص است ، به اساس غیرمساوات(4.42)حاصل میداریم که $x_n + 1 = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{x_n}{2}(1 + \frac{a}{2}x_n) \leq \frac{x_n}{2} \cdot 2 = x_n$ ، و همینطور: $n = 1,2,3$......(4.43)

$x_1 \le ... \le x_n \le x_n + 1 \le ... \le \sqrt{a}$ درجاییکه ترتیب وتنظیم زیاداست وبه صفرتقرب میکند.

$x_0 > 0$ پس درآنصورت ترادف $\{x_n\}$ محدودپائین مونوتونی(یکنواخت متناقص)بوده وبه اساس قضیه3 دارای لیمت میباشد.

فرضاً $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ به لیمت درمساوات(4.41) تقرب می نماید ، درآنصورت $n \to \infty$ تقرب میکند.مساوات $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{n})$حاصل میداریم ازآنجاکه $a = x^2$ وهمینطور $x_n \ge 0$ پس $x > 0$ زیراکه $x = \sqrt{a}$است.به اساس فورمول(4.41) میتواندراجع به بررسی محاسبه قیمت به جذرمربع عددکمک نمودکه این حقیقت رادقیق وبه اساس همین مقصددرپراکتیک مورداستفاده قرارمیدهد.پس درآنصورت حد x_nقیمت جذر $\sqrt{a}$ رامیدهدکه بااستفاده مکررازفورمول(4.41) داریم.

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{2x_n} \cdot (x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a) = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2$$

طوریکه $n = 1,2,3...$ بااستفاده ازفورمول غیرمساوات(4.42)راازاینجا می یابیم که $o \le x_{n+1} - \sqrt{a} \le \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2$ طوریکه $n = 1,2,3...$ ارقام بدست آمده آنقدردرپراکتیک مطمین نیست. زیراکه قیمت جذر $\sqrt{a}$ معلوم نیست

ماآنرامانند(c)جستجومیکنم که $0<c<\sqrt{a}$ میتوان $x_0>c$ انتخاب کرداز ارقام بدست آمده خواهیم

داشت. $o \le x_{n+1}-\sqrt{a} \le \frac{1}{2c}(x_n-\sqrt{a})^2$ طوریکه... $n=1,2,3$

یا: $\frac{1}{2c}(x_n+1^{-\sqrt{a}}) \le [\frac{1}{2c}(x_n-\sqrt{a})]^2$ طوریکه... $n=0,1,2,3$ ازاینجا به اساس

استقرائی ریاضی می یابیم که:

$$\frac{1}{2c}(x_n-\sqrt{a}) \le [\frac{1}{2c}(x_n-1^{-\sqrt{a}})]^2 \le [(\frac{1}{2c}(x_n-2^{-\sqrt{a}})]^2 \le [\frac{1}{2c}(x_0-\sqrt{a})]^{2^n} \quad ...(4.44)$$

اگر x_0 نزدیک به صفرانتخاب شودکه:طوریکه $q=\frac{1}{2c}\{x_0-\sqrt{a}\}<1$ به

اساس(4.44)حاصل میشودکه: $0 \le x_n-r \le 2cq^{2^n}$ طوریکه... $n=1,2,3$ پس درآنصورت

ترادف (4.41) به قیمت جذریادشده به تصاعد هندسی همراه بامخرج $0<q<1$ تقرب میکند .

برای نمایش محاسبه تقریبی جذرتوسط فورمول (4.41)جذر $\sqrt{2}$ راتوسط ماشین حساب نتیجه

$x_0=1$ راانتخاب می نماییم. یعنی:

$x_1=1,50000000...$
$x_2=1,414221...$
$x_3=1,4142135...$
$x_4=1,4142135...$
$x_5=1,4142135...$
$x_6=1,414213...$
$x_7=1,4142135...$

لیما(غیرمساوات برنولی) [1]

فرضـــــاً $\alpha > 0$ باشددرآنصـــــورت بــــــرای هرعــــــددطبیعیn غیرمســـــــاوات

$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$...(4.45)صادق است.

ثبوت: به اساس فورمول بینوم نیوتن داریم:

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+...+\alpha^2$$

تمـام عوامـل جمـع شـونده مثبـت رادرقسـمت اول مسـاوات ازآنهـا جدامیسـازیم بـه غیرازاولـی ودومــی درنتیجــه قســمت راســت میتــوان تنهــا خوردشــود، پــس ماغیرمســاوات اولــی (4.45)راحاصل میداریم□.

که آنراتوسط مثالها مورد بررسی قرارمیدهیم.

مثال2: اگر $\beta > 0$ باشدپس $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = +\infty$ واگر $0 < p < 1$ باشد ، پس $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$

فرضــاً : اول $p > 1$ باشــد ، درآنصــورت $p = 1+\alpha$ دراینجــا $\alpha > 0$ اســت. وغیرمســاوات برنولی(مراجعه نماید به: 4.19).

$p^n = (1+\alpha)^n > 1+n\alpha > n\alpha$ همینطور $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ اگر $\alpha > 0$ باشد،پس

$\lim\limits_{n\to\infty} p^n = +\infty$ اگرحال $0 < p < 1$ باشدپس $q = \frac{1}{p} > 1$است.

و $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ یابه اساس ثبوت $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

---

(1) ی. برنولی (1705-1654) ریاضیدان آلمانی .

مثال3: برای هر $a > 0$

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 ....(4.46)$$

$$\lim_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1 ......(4.47)$$

فرضاً : اول $a > 1$ باشد ، درآنصورت $b = \sqrt[n]{a} > 1$ درحقیقت طبق تعریف جذور $b^n = a$.

اگر $b \leq 1$ باشدپس این غیرمساوات را n دفعه ضرب می نماییم.حاصل میداریم که

$a = b^n \leq 1$ مگراین خلاف شرط $a > 1$ است.

$x_n = \sqrt[n]{a} - 1 ....(4.48)$ مطابق گفتارکه $x_n > 0$ از(4.48) نتیجه میشودکه

$a = (1 + x_n)^n$ است بااستفاده ازغیرمساوات برنولی داریم.

$a = (1 + x_n)^n > 1 + n \cdot x_n > nx_n$ همین قسم $0 < x_n < \frac{a}{n}$ زیراکه $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

مطابق(4.48) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ اگر $0 < a < 1$ باشد،پس $b = \frac{1}{a} > 1$ وهمینطوربه علت ثبوت:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{b} = 1$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=1$$

اگر $a=1$ باشد،پس $\sqrt[n]{a}=1$ طوریکه $n=1,2,3...$ و همین قسم نیز $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ است، به این

ترتیب در(4.46)به هر $a>0$ ثابت شد.از اینجا به اساس (4.47) مستقیماً به نتیجه میرسم که:

$$\lim a^{-\frac{1}{n}}=\lim\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim a^{\frac{1}{n}}}=1 \square$$

مثال 4:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0, a>0..............(4.49)$$

حقیقتاً ، فرضاً $n_0\in N$ باشد ، طوریکه $\frac{a}{n_0}<\frac{1}{2}$ است ، درآنصورت به همه $n>n_0$

غیرمساوات $\frac{a}{n}<\frac{1}{2}$ صادق است.

طوریکه: $$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n_0}a.a}{n_0!.n_0+1n_0+2}......\frac{a}{n}<\frac{a^{n_0}}{n_0!}(\frac{1}{2})^{n-n_0}$$

خاطرنشان میسازیم که:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n_0}}{n_0!}(\frac{1}{2})^{n-n_0} = \frac{2^{n_0} a^{n_0}}{n_0!} \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n_0}}{n_0!} = 0$$

مساوات (4.49) را میتوان ثابت نمود.

اگرترادف $x_n = \frac{a^n}{n!}$ رابررسی کنیم ، درانصورت $x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1}$ وبه $n+1 > 0$

غیرمساوات $X_{n+1} < X_n$ قابل تطبیق است.

پس درانصورت آغاز ترادف $\{X_n\}$ به بعضی نمبرها متناقص میشود ، به غیر آن تمام

$n \in N$ غیرمساوات $X_n > 0$ صادق است.

زیراکه این ترادف محدود پائین است وبه همین قسم دارای لیمت متناهی میباشد.

فرضاً $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ درصورتیکه لیمت تقرب کند به لایتناهی $n \to \infty$ مساوات

$X_{n+1} = X_n \frac{a}{n+1}$ حاصل میداریم که :

$$X = \lim_{n\to\infty} X_{n+1} = \lim_{n\to\infty} X_n \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = x.0 = 0$$

درآنصورت دوباره (4.49) دریافت میکنیم.

مثال 5: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.......(4.50) به هر a>0 مساوات (4.49) بجا خواهد

بود ، زیراکه برای هر a>0 چنین $n_0 \in N$ پیداشود که برای تمام $n>n_0$ غیرمساوات

$\frac{a^n}{n!} < 1$ قابل تطبیق شود ، درآنصورت بـه $n>n_0$ بجاخواهد بود $\sqrt[n]{n!} > 0$ وهمین طـور a>0 اختیاری است به این معنی که مساوات (4.50) صادق است.

مثال 6:

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+........+\frac{1}{n!}=e.......(4.51)$$

بیادمی آوریم (مراجعه شودبه) پراگراف 4.5 که عدد e عبارت ازلیمت ترادف است.

$$n=1,2.....,X_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

درآنصورت :

$$\lim_{n\to\infty} X_n = e..........(4.52)$$

به اساس تزاید دقیق ترادف $\{X_n\}$ غیرمساوات: $X_n < e..........(4.53)$ بجاخواهد بود و

$$S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!}$$

در (مراجعه نمایدبه 4.28) نشان داده شده است که :

$$X_n < S_n, n=1,2.......(4.54)$$

ازطرف دیگردرفرمول (4.27) $k \geq 1$ معین بوده و $n > k$ را اختیاری انتخاب نموده ازقسمت اول تمـام عامـل جمعـی آغـاز $(k+2)$ بـه اسـاس مسـاوات (4.27) جـدا میسـازیم درنتیجـه غیرمساوات ذیل بدست میآید:

$$x_n > 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{k-1}{n})$$

انتقال به این غیرمساوات بـه لیمـت در $n \to \infty$ وبـه معین بـودن R یادآورمیشـویم کـه قسمت راست دارای لیمت خود(Sk) بوده به اساس (4.52) غیرمساوات بدست می آید.

$$k = 1, 2, \cdots, e \geq s_k \cdots (4.55)$$

با اتحاد غیرمساوات (4.54)(4.55) حاصل میداریم که:

$$n = 1,2......., X_n \geq S_n \leq e$$

ازینجا مستقیماً مطابق (4.52) به نتیجه میرسیم که:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2e$$

درآنصورت مساوات (4.51) صحت است.

تبصره: برای محاسبه تقریبی عدد e فورمول $e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ مطمین نیست همینطور تقرب از n به n+1 تبدیل میشود تمام محاسبه ازنو نزدیک بـه فورمول $e \approx s$ حاصل میشود کـه بسیار مطمین به شمارش اعداد یا انتقال از n به n+1 نیزباید به مفهوم خاص S_n عدد $\frac{1}{n+1}$ علاوه نمود ، حاصل میداریم:

$$S_n + 1 = S_n + \frac{1}{n+1}$$

درآنصورت اجراکردن محاسبه بـه گذاشتن S_n قیمت مورد نظرآن کم نمیشود. بـه غیرازآن درین حالت به اساس عدد e به قیمت مجموع S_n ارقام خطـا را دریافت کرده میتـوانیم (این را درپراگراف (34.14) عملی خواهد شد)

تمـرین 16: $a_0>0$ و $b \geq 0$ $\quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, n = 1, 2, \cdots$ داده شـده کـه

:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

$$b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$n = 1, 2 \ldots$ درنظرمیگیریم ثابت نماید که ترادف $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به یک وعین لیمت a تقرب میکندکه:

$$0 \le S_n - a_n \le \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}, 0 \le a - a_n \le \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$$

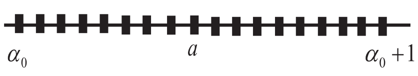
4.10: نمایش اعداد حقیقی کسرهای اعشاری بی نهایت

فرضاً چنان عدد a برای تعیین $a \ge 0$ داده شده است.

طبق پرانسیپ ارشمدس عددتام $n_0 > a$ موجود است ، دراطراف عدد $n = 1,2,\ldots,n_0$ را کوچکترین انتخاب میکنیم که توسط خواص n>a بوجود می آید وآنرا به $\alpha_0 + 1$ نشان میدهیم ، درآنصورت $\alpha_0 \le a < \alpha_0 + 1$ قطعه $I_0 = [\alpha_0; \alpha_0 + 1]$ را به ده حصه مساوی جدامیسازیم.

درآنصورت قطعه خط $\left[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right]$ را بررسی می نماییم.

α_1, α_0 : کسراعشاراست که α_1 نمبرردیف که ازعدد تشکیل گردیده که به ترتیب نمبرهاازطرف چپ به راست اعداد $0,1,2,\ldots\ldots,9$ ترتیب شده



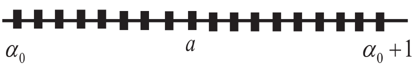
شکل(13)

نظربه خصوصیت علامه مقسوم بین انجام های این قطعه خط میتوانیم درینجا اول نه به 5 مثل همیش به a نقطه 5 تقسیم نمود با تفاوت علامه 5 دوحالت ممکن است: یا اینکه نقطه a

بیکی ازنقاط تقسیم شده مطابقت ندارد. شکل(13) یا اینکه نقطه a بیکی ازنقطـه ازنقطـه تقسیم شده مطابقت دارد ، اشکال (14-15) که قطعه متذکره I_0 به ده حصه برابربدست می آید.

نظربه خصوصیت علامه مقسوم بین انجام های آن میتوانیم درینجا اول نه به 5 مثل همیش بـه a نقطه 5 تقسیم نمود باتفاوت علامه از 5 درکسر دوحالت ممکن است: یـا اینکـه نقطـه a بیکـی ازنقاط تقسیم شـده مطابقت نـدارد. (شـکل 13) یـا اینکـه نقطـه a بیـک نقطـه ازنقطـه تقسیم شـده مطابقت دارد ، اشکال (15-14) که قطعه متذکره I_0 به ده حصه برابربدست میآید.

شکل 14



شکل 15

درحالت اول نقطه a تنها دریکی ازین قطعه ها واقع است.

وبـه I_n نشـان میدهـد، پـس درآنصـورت $I_1 = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}]$ درحالـت دوم نقطـه a میتوان با دوحصه همسایه قطعه خط مطابق شـکل (15) واقع باشد همین قسم نشـان میدهیم اینکه نقطه a درطرف انجام چپ میباشد.

درهردوحالـت $a \in I_1$ قطعـه خط موردنظر I_1 رابـه نوبـت خـود بـاده حصـه برابرقطعـه خط توسط $I_2 = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}]$ نشان میدهد قطعـه خط هـای حاصلـه کـه مرکـب ازa

است برای اینکه نقطه a درطرف راست انجام نمیشود این پروسه را ادامه میدهیم تاکه سیستم داخل کرده شده نقاط را حاصل نماییم طوریکه:

$$I_2 = [\underline{a_n}, \overline{a_n}], n = 0,1,2,......$$

در اینجا $a_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2....., \alpha_n = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2,...., \alpha_n + \frac{1}{10^n}$

در اینجا α_n یکی از ارقام 9.....0,1,2,3 هریکی ازقطعه های I_n مرکب از a است، زیراکه a انجام راست آن نمی باشد ,.....$a \in I_n, a \neq \overline{a_n}, n = 0,1,2$ طول قطعه I_n برابر 10^{-n} و همین قسم به صفرتقرب میکند، طوریکه $n \to \infty$ کسرهای اعشاری متناهی $\underline{a_n}$ $\overline{a_n}$ درصورتیکه بعدد a تقرب نماید بنام کسرهای اعشارنامیده میشوند.

دقیقترعدد $\underline{a_n}$ بنام متقارب پائینی اعشاری درردیف n وعدد $\overline{a_n}$ متقارب بالائی اعشاری درعین ردیف عدد a نامیده میشوند، آنها دارای خواص ذیل بوده ومستقیماً ازتعریف نتیجه میشود.

$$\underline{a_n} \leq a < \overline{a_n} ....(4.56)$$

$$\underline{a_n} \leq \underline{a_n} + 1, \overline{a_n} + 1 \leq \overline{a_n} ....(4.57)$$

$$\overline{a_n} - \underline{a_n} = 10^{-n} ....(4.58)$$

درین حالت اگر a<0 وفرضاً b=-a باشد ، دریافت میکنیم که:

$$\underline{a_n = -\overline{b_n}, \overline{a_n} = -\underline{b_n}}$$

درین صورت خواص (4.56) و(4.58) واضح است ودرغیرمساوات (4.56) علامه > و $\leq$جای خود را تبدیل میکنند.

خاصیت (4.57) معنی میدهد که قطعه $\left[\underline{a_n}, \overline{a_n}\right]$ سیستم قطعه های داخل کرده شده را تشکیل میدهد. ازخاصیت (4.58) نتیجه میشود که طول قطعه ها $\left[\underline{a_n}, \overline{a_n}\right]$به صفرتقرب میکند بلاخره (4.56) معنی میدهد که نقطه a بالای تمام این قطعه ها واقع اند. زیراکه تبصره 2 پراگراف 4.5 درزمینه روشن است آنرا لیمت انجام های a_n و a_n میباشد وهمچنان راجع به دقیق بودن آن لیمت ذیل ثبوت شده است.

لیما1: موجودیت چنان عددa ترادف $\{a_n\}$ را متزاید ، وترادف $\{a_n\}$ متناقص میسازندکه:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = a$$

نتیجه: هرعدد حقیقی عبارت ازلیمت های ترادف های اعداد ناطق میباشند ، نتیجه لیما منتج برآن میشودکه: $\left[\underline{a_n}, \overline{a_n}\right]$ اثر(نشان) عددناطق است.

فرضاً حال ازنو a≥0 و $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ درمطابقت به عدد a کسرهای اعشار بی نهایت $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ میگذاریم. خاطرنشان میسازیم که درینجا α_0 عددتام غیرمنفی میباشد و α_n که ……n=1,2, یکی ازارقام 0 ,1 ,2,……..,9 بوده عدد a عبارت ازیگانه عدد است که بالای قطعه I_n ، …n=1, 2 قراردارد.

زیراکه اعداد مختلف اشاره شده به کسرهای اعشارمختلف مطابقت میکند پس درآن صورت فرق آن $a_k(k = 0,1,2,3......)$ میباشد. دیگرخاطرنشان میسازیم که چنین ساختمان نمیتوان کسررا باتناوب که ازیک رقم 9 تشکیل شده باشد حاصل نمود.

واقعاً اگرعدد a به کسرذیل $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n0}, 9...9$ مطابقت کند ، درین حالت $n \neq 0$ بوده که غیرمساوات $\alpha_n \neq a$ تطبق میشود.

درآنصورت طبق ساختمان (ترتیب)

$$a \in \left[\alpha_0, \alpha_1, \ldots.., \alpha_{n0}, 9, \ldots.., 9, \alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots\ldots., \alpha_{n0}\right]$$

بـــرای تمـــام $n>n_0$ درینجـــا n عـــدد علامـــه اعشـــاری بعـــداز رقـــم پـــنج درکســـر $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_{n0}, 9 \ldots 9$ است ازینجا نتیجه میشود که a انجام اولی تمام قطعه I_n ، $n>n_0$ میباشد که خلاف $k>1$ انتخاب این قطعه ها است به این ترتیب قراردادن هرعدد حقیقی مطابق به $a \geq 0$ به بعضی ازکسرهای اعشاری بی نهایت مطابقت میکند. نداشتن تناوب متشکیل ازیک رقم 9 چنین کسراعشار رابنام کسر تقریبی می نامند.

بالاخره هرکسراعشار تقریبی بی نهایت $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_n$ است درنتیجه نقطه به محیط واقع شده است درمطابقت به بعضی اعداد a بنام عدد یکتاب (وابسته) طوریکه بالای تمام قطعه منطبق باشد.یادمیشود.

$$\left[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_0, \alpha_1, \ldots., \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right], n = 1,2, \ldots.$$

به این انطباق میتوان به اعداد منفی گسترش داد. اگرعدد $a>0$ به کسر $\alpha_0, \alpha_1, \ldots.., \alpha_n, \ldots..$ مطابقت کند، پس عدد a به کسر $-\alpha_0, \alpha_1, \ldots..\alpha_n$ نیزمطابقت میکند که چنین عدد را نیزمیتوان تقریبی نامید.

نتیجه بدست آمده را میتوان بشکل قضیه ذیل فورمولبندی نمود.

قضیه 6: بین ست های تمام اعداد حقیقی وست های کسراعشار تقریبی موجودیت یک قیمت متقابل مطابقت دارد. زیرا اگربه آن عدد a مطابقت کندبه کسر $\pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2, \ldots\ldots.\alpha_n$

نیزمطابقـــت میکنـــد پـــس $\lim_{n\to\infty} \pm\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,......., \alpha_n = a$ کسراعشـــاربی نهایـــت

$\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2,.......\alpha_n$ درمطابقت به عدد a آنرابنام اعشارمینویسند واستفاده میکند برای افاده کردن آنرا چنین مینویسند:

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2,.......\alpha_n.....$$

اگرکسراعشـــاربی نهایـــت دارای تنـــاوب باشـــد تنهـــا ازصفرمتشـــکیل اســـت $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2,.......\alpha_n,0,0...0......0.$ اگر $\alpha_n \neq 0$ باشد پس میگویند که این کسردارای n رقم قیمت بعدازرقم پنج میباشد به این ترتیب معمولاً صفردرتناوب نوشته نمیشود.

پس درآنصورت عدد متذکره کسراعشاری متناهی نوشته میشود.

$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_n$ ازنام چنین نوشته زیاد بکارمیبرند.

تبصره: کسراعشاری بی نهایت اختیاری $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_n$ حتمی نیست تقربی باشد. ممکن است همین قسم بشکل طبیعی درمطابقت به یک عدد طبیعی که به تمام قطعه ها واقع شده انتخاب نمود.

$$\left[\alpha 0,\alpha 1,......, \alpha n,\alpha 0\alpha 1,....., \alpha n+\frac{1}{10^n}\right]$$

که یکی هم درین مطابقت یک قیمت متقابل ندارند دارای کسرهای اعشاری بی نهایت میباشد که بیک عدد حقیقی مطابقت میکند.

بنـام کسـرهای شـکل: $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n,99....9$ و $(\alpha_n \neq 9)$ $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,.....(\alpha_n+1)00....$

که بیک وعین عدد مطابقت میکند درمطابقت به ساختمان وبزرگی اعداد حقیقی وکسرهای اعشـاری بـی نهایـت مـا حاصـل نمـودیم کـه نـه تنهـا کسـرهای اعشـاری تقریبـی صـرف

نظر از شرایط وضع شده که تکرار صورت گیرد چنین قطعه I_n را مد نظر میگیریم که عدد a انجام اولیه آن نباشد با استفاده ازیادداشت اعداد حقیقی برای کسر های اعشاری بی نهایت ممکن است قاعده را برای آنها که برابر (معادل) برحسب کمیت وقاعده عملیه های حسابی بالای آنها باشد حاصل نمود.

این ودیگرقوانین درشباهت به عملیه کسر های اعشاری تقریبی مطابقت میکند ومیتوانیم تشکل لیمت آنها را فورمولبندی نمود ونتیجه آنها را بشکل لیما ذیل مطالعه نمود.

لیما2: فرضاً a و b اعداد حقیقی باشد و$a<b$ باشند ، درین حالت تنها چنین عدد طبیعی n_0 موجود شود که برای تمام $n>n_0$ غیرمساوات $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ صدق نماید.

ثبوت: فرضاً $a<b$ باشد از $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{b}_n = b, \lim\limits_{n\to\infty} \underline{a}_n = a$ مطابق خواص III لیمت ترادف(مراجعه نمایدبه) پراگراف 4.3 که مستقیماً موجودیت نمبرخواسته شده n_0 از آن نتیجه میشود ، پس درآنصورت چنین است که برای تمام نمبر $n>n_0$ غیرمساوات $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ مطابقت دارد .

برخلاف: اگرنمبرمتذکره n_0 موجود شود ، پس حالت $a>b$ به علت که تنها ثبوت ممکن نیست وحالت $a=b$ به علت یک قیمته بودن عدد نوشته شده نیزممکن نیست.و کسراعشارتقریبی همینطور برای تمام .....,n=1,2 غیرمساوات $\underline{a}_n = \underline{b}_n$ بجا خواهد بود ، درنتیجه $a<b$ است.

لیما3: فرضاً a و b دوعدد حقیقی باشد پس درآنصورت :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\underline{a_n} + \underline{b_n}\right) = a + b$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\underline{a_n} - \underline{b_n}\right) = a - b$$
$$1.\lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\underline{b_n} = ab$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underline{a_n}}{\underline{b_n}} = \frac{a}{b}$$

اگر $b \neq 0$ باشد ، پس تمام تا مبدای این لیما مستقیماً درلیما1 وخواص لیمت درارتباط به عملیه های حسابی راجع به ترادف ها (مراجعه نمائید به : پراگراف 4.9)نتیجه میشود.

تبصره2 : ازلیما 3 نتیجه میشود که برای اینکه طاقت های داده شده دقیق درهرعملیه حسابی بالای اعداد که بشکل کسراعشاری تقریبی نوشته شده باشد اجراشود ، لازم است با دقت کامل کسرهای اعشار تقریبی متناهی را انتخاب وعملیه مناسب بالای آن تطبیق گردد. درینجا جمع ، تفریق وضرب درنتیجه کسراعشاری متناهی ازنو حاصل شود. درحالت تقسیم به حصه دوکسراعشاری متناهی حاصل میشود. میتوان بطور عمومی گفت که کسرهای اعشاری بی نهایت چنانچه ازریاضی ابتدائی معلوم میشود که متناوب است ، دریکی ازین حالت ممکن است باهرطاقت با دقت کامل نتیجه افاده کسراعشاری متناهی را حاصل نمود.

بطورمثال: اگر $\left(\frac{\underline{a_n}}{\underline{b_n}}\right)n$ ردیف n کسراعشار متناهی پائین باشد ، برای تقسیم $\left(\frac{\underline{a_n}}{\underline{b_n}}\right)$ پس:

$$\lim\left(\frac{\underline{a_n}}{\underline{b_n}}\right)n = \frac{a}{b}..........(4.59)$$

وهمینطور تقسیم a/b ، $b \neq 0$ باشد ممکن است باهرطاقت دقیق کسرهای اعشا متناهی را

بشکل $\left(\dfrac{\underline{\underline{a_n}}}{\underline{b_n}}\right)n$ انتخاب نمود.

برای ثبوت مساوات (4.59) مینویسیم که:

$$\alpha_n = \frac{\underline{\underline{a_n}}}{\underline{b_n}} - \frac{a}{b}$$

به علت لیما 3 (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.9) داریم که $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ حاصل با استفاده

از(4.56) و (4.58) حاصل مینماییم که:

$$\left(\frac{\underline{\underline{a_n}}}{\underline{b_n}}\right)n - \frac{a}{b} = \left[\left(\frac{\underline{\underline{a_n}}}{\underline{b_n}}\right)n - \frac{\underline{\underline{a_n}}}{\underline{b_n}}\right] + \left(\frac{\underline{\underline{a_n}}}{\underline{b_n}} - \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{10^n} + \alpha_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^n} + \alpha_n\right) = 0$$

ویا به حساب مساوات (4.59) ثبوت شد.

تبصره3: درنتیجه متذکره برای محاسبه فوق n ردیف کسراعشارتقریبی پائین حالات ذیل

موجود است:

درحالت عملیه جمع $\underline{a_n} + \underline{b_n}$

درحالت عملیه تفریق $\underline{a_n} - \underline{b_n}$

درحالت عملیه تقسیم $\left(\underline{a_n} / \underline{b_n}\right)$

ما از نو کسر های اعشاری متناهی را که از n زیاد نباشد ، حاصل میکنیم ، قیمت ارقام بعداز رقم پنجم درحالت ضرب چنین است $\underline{a_n}\,\underline{b_n}$.بطور عمومی میگویند که قیمت ارقام کسر اعشاری بعداز رقم پنجم بدست می آید.

اگر $\left(\underline{a_n}.\underline{b_n}\right)$ عبارت ازحاصل ضرب کسراعشاری پائین $\underline{a_n}\,\underline{b_n}$ باشد ، پس مشابه به (4.59) میشودکه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underline{a_n}.\underline{b_n}\right)n = a.b$$

به این ترتیب محاسبه تقریبی حاصل جمع a+ b ، حاصل تفریق a-b حاصل ضرب وحاصل تقسیم a/b ، درمطابقت به فورمول های ذیل چنین است:

$$\underline{a_n} + \underline{b_n}$$

$$\underline{a_n} - \underline{b_n}$$

$$(\underline{a_n}\,\underline{b_n})n$$

$$(\underline{a_n} / \underline{b_n})n$$

درنتیجه عملیه های متذکره بالای کسر های اعشاری متناهی $\underline{a_n},\underline{b_n}$ قیمت ارقام اضافه از n تعداد نیست وبعدازرقم پنجم که دوباره کسراعشار حاصل میشود.اضافه از n نیست حاصل شدن قیمت ارقام بعداز رقم پنجم به این نتیجه میرسد که قیمت ارقام که برحسب هرطاقت داده شده دقیقاً حاصل میشود . به این ترتیب معمولا به عنوان عملیه های بالای اعداد درپراکتیک صورت میگیرد(تطبق شود).

تبصره: خاطرنشان میسازم که درساختمان طریقه نوشتن پی درپی ارقام اعداد حقیقی بعداز نوعدد (10) را انتخاب میکنیم. (قطعه خط پی هم به ده حصه برابرتقسیم میکنیم) به عوض

عدد 10 ممکن است هر عدد طبیعی n را انتخاب نمود. با استفاده ازماشین هاي سریع عملیات محاسبه که همیشه استعمال میشود عیناً بنام سیستم دوگانه نوشتن اعداد درمطابقت به حالت n=2 یاد میشود.

درنوشتن اعداد به سیستم دوگانه تنها دوعدد 0 و 1 سهیم است.

بطورمثال: عدد 14،625 درسیستم دوگانه دارای شکل 1110،101 میباشد.

عملاً نشان میدهیم که:

$14=2^3+2^3$

$0,5=2^{-1}$

$0,125=2^{-3}$

دارم که : $$14.625=1.2^3+1.2^2+1.2^1+0.2^0+1.2^{-1}+0.2^{-2}+1.2^{-3}$$

ارقام واعداد نوشته شده درسیستم دوگانه درمطابقت به تجزیه به مضروبات آن برحسب طاقت عدد 2 است. بطورمشابه قضیه 6 ثابت میشود که بین تمام اعداد حقیقی وتمام کسرهای دوگانه بی نهایت تناوب موجود نمیباشد ، زیراکه تنها تشکیل ازیک واحد بوده ودارای یک قیمت متقابل متناسب میباشد.

جهت ثبوت پی هم قطع $[n,n+1]$ $n=0,\pm1,\pm2,$ را تقسیم کرد. نه به ده حصه تقسیم کرد، بلکه ما آنرا درثبوت قضیه 6 به دوحصه برابر تقسیم نمودیم.

تبصره 5: با تیوری غیرکاذبانه اعداد حقیقی ممکن است متیقین شد وبرخلاف ردیف عدد حقیقی آنرا تعریف کرد مانند کسرهای اعشاری تقریبی بی نهایت ازین نوشته استفاده کرد ودرآنها به ترتیب مناسب نظربه ردیف بندی وعملیات حسابی داخل کرد. طریقه دیگری ازساختمان اعداد حقیقی که به استناد ازاهداف مستحکم استوار است وتمام آنها به مجموعه

عناصر بستگی دارد موجود است که توسط خواص $\overline{V}$– I درپراگراف 1-2 تذکربه عمل آمده..J

به یاد می آوریم مراجعه نمایدبه پراگراف (*3.8) که خواص $\overline{V}$– I یکسان مجموع عناصر را مشخص میسازد. که توسط این خواص بوجود آمده به این مفهوم که هردومجموع برای عناصرچنانچه شرایط $\overline{V}$– I ریزد مورفینی نظربه عملیه جمع ، ضرب ترتیب وخواص یکسان میباشد . ما درینجا با خصوصیت ممیزه میتود حسابی برمیخوریم به آنچه که واقعاً بدون شک اختلاف عناصرطبیعی بسیار مهم "ارتباطات مقداری" بین آنها موجود است ودرحالت داده شده به خواص $\overline{V}$– I نشان داده شده "برمیخوریم".

4.11. ست های قابل شمارش وغیرشمارش :

طبعاً سوال بوجودمی آید که آیا تماما ست های بی نهایت ازعناصریکسان ازاعدادتشکیل شده ویااینکه ست ها ی بی نهایت مختلف بوده می توانند ؟

درقدم اول فهمیده نمی شود که بصورت عموم درعناصریکسان اعدادی برای ست های بی نهایت درلغت چه معنی دارد. مقایسه ست های بی نهایت برحسب مقدارعناصرتشکیل شده است ویا بر حسب توان انها که توسط مفاهیم مطابقت یک به یک بین عناصرست های موجود است صورت می گیرد. ("مراجعه نمایید به: پاراگراف 1.2^x")

تعریف 17. دوست زمانی متساوالتوان نامیده می شودهرگاه اگربین عناصراین ست ها مطابقت یک به یک وجود داشته باشد اعدا دطبیعی 1، 2...........n ....ست های متساوی التوان را تشکیل می دهد.

وست های قابل شمارش2،.,4.........2n ...وغیره می باشد .

گرچه درجمله اول نظربه جمله دوم دوبارکوچک معلوم می شود ولی مطابقت یک به یک بدست می آید اگرعدد طبیعی n در2n طوریکه .....n=1,2,3 قراردارده شود عدد قابل شمارش حصه ست اعداد طبیعی را می سازد که یکی ازست های متساوالتوان می باشد .همین طور درحالت نامتناهی بدون ست های فرعی بی نهایت بین خود به گمان کامل می تواند مساوی باشد .

تعریف 18:ست که متساوالتوان به ست تمام اعداد طبیعی باشد بنام ست قابل شمارش یاد می شود .به این ترتیب اگر x ست قابل شمارش باشد پس بین ست های x وست های اعداد طبیعی می توان مطابقت یک به یک برقرار شود یا چنین می گوید : می توانند عناصرxرانمره گزای نمود.وهرعنصرنمره گذاری شده شناخته شود طوریکه $x \in X$. که برحسب نشانه نمره اعداد طبیعی به آن مطابقت داشته باشد ست های قابل شمارش به اساس تعریف عبارت ازست های متناهی ساده می باشد طبق لیماذیل:

لیما 1: ست اختیارنامتناهی متشکل ازست فرعی قابل شمارش می باشد .

ثبوت: فرضا xنامتناهی باشد یکی ازعناصراختیاری انراانتخاب می کنیم وآنرابه x_1 فرق داشته با شد وچنین عنصرررابه حرف x_2 فرضا درست x عناصر $x_1 , x_2 ....x_n$ انتخاب گردیده اند پس ست x متناهی است ودرآن عناصر دیگر نیزموجود است ازعناصرباقی مانده یک را انتخاب می کنیم وآنرا چنین نشان می دهیم . X_{n+1} درنتجه ما عناصر $n=1,2.........x_n \in X$ باشد را حاصل نمو دیم که ست های قابل شمارش فرعی ست x را تشکیل می دهد.

لیما 2: ست فرعی اختیاری قابل شمارش ، ست قابل شمارش است .

ثبوت : فرضا x ست قابل شمارش است که عناصر آن $X = a_1 , a_2 ,.........a_n$ می تواند نمره گذاری شود فرضا y ست متناهی ست x باشد وآنرا به b_1نشان می دهیم .

درقدم اول درردیف $a_1 , a_2 ,.........a_n$ عناصرست y دیده می شود . پس درین صورت درین جا عنا صر $a_n \in X$می باشد وبعدا b_2را ازعناصر a_n نشان می دهیم که درست y قرار دارد . ودارای کوچکترین نمره متوسط $n > n_0$ وغیره می باشد هرعنصرy ترادف $a_1 , a_2 ,.........a_n$ را دارد .از این جا فاصله بین هر عدد متناهی را می توان به b_mنشان داد .وهمین طور ست y می تواند بی نهایت اندکس m یعنی .....1,2,...3 را به خود بگیرد به این ترتیب تمام عناصر ست y اعداد طبیعی که m نمره گذاری می شود نشان دهیم ......m=1,2,3, به این معنی که ست y عبارت از ست قابل شمارش است درقضیه ذیل مثال های جالبی راجع به ست های قابل شمارش ارائه می گردد .

قضیه 7: ست های تمام اعداد ناطق قابل شمارش است .

ثبوت : اعداد ناطق را به طریقه ذیل درجدول فرض می کنیم .

درمرحله اول تما م اعدا تام را به ترتیب تزاید قیمت مطلقه آنها جابجام می سازیم وهمین طور به هر عدد طبیعی عدد متقابل مخالف را قرار می دهیم یعنی :

$n \in N, 0, 1, -1, 2, -2.........\ ....\ ....n - n$

درمرحله دوم تما م کسرهای غیر اختصار شده ناطق به مخرج 2 به ترتیب کمیت مطلقه جابجا می سازیم ودوباره به هرعدد مثبت عدد مخالف یعنی منفی را جابجا می سازیم یعنی :

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}..........$

به صورت عمو م درمرحله nام تمام کسرهای غیر قابل اختصار شده یا اختصار نا پذیر با مخرج n به ترتیب کمیت مطلقه آنها را جابجا می سازیم وهمین طور به هر عدد مثبت عدد مخالف قرارمی گیرد درنتجه جدول اعداد بی نهایت را به طور ستونی حاصل می نمائیم

$, 0, 1, -1, 2, -2..........\ ....$

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}..........$

$\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}$

$\frac{1}{n},-\frac{1}{n}$...........................

طوریکه دیده می شود هرعددناطق درجدول یک جا یا یک محل را به خودمی گیرد.
حال ازنمره عناصرجدول ذیل را به شکل نقشه دردوایر کوچک قرار می دهیم .نمره مطابق عنصر قرار دارد وتیر یک جهت نمره را نشان می دهد .

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

درنتجه تمام اعداد ناطق به نمره نشان داده میشود پس درین صورت ست Q اعداد ناطق قابل شمارش است .
طبعا سوال مطرح می شود که آیا a ست نامتناهی را تشکیل می دهد .درصورتیکه قابل شمارش نباشد ؟
وآنها بنام ست های غیرقابل شمارش یاد می شود . مثالهای مهم ست های غیر قابل شمارش درقضیه ذیل بیان می شود .
قضیه 8: (قضیه کانتور) : ست های تمام اعداد حقیقی غیرقابل شمارش است .
ثبوت : برخلاف فرض می کنیم : فرضا داده شده که تماما اعداد حقیقی $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ را نمره گذاری نماید آنها را توسط کسر اعشار فرض می کنیم
.ومی نویسیم .

$$x_1 = a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \ldots\ldots\ldots a_m^{(1)}$$

$$x_2 = a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \ldots\ldots\ldots a_m^{(2)}$$

$$x_n = a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)} \ldots\ldots\ldots a_m^{(n)}$$

(4.60)

درین جا $a_m^{(n)} \ldots\ldots\ldots n = 1,2\ldots\ldots\ldots, m = 1,2\ldots\ldots\ldots$

یکی ازارقام 9……0,1,2,3 و $a_0^{(n)}$.........$n=1,2$ عددتام با علامه رانشان میدهد.

همین طور $a_m \neq a_n^{(n)}$ و $a_n \neq 9$ را انتخاب می کنیم . پس درین صورت کسر $0,a,a_1,a_2......a_n$ عبارت ازکسر فرض شده (مجاز) بوده مگر اعدد $a=0,a,a_1,a_2......a_n$ در اساس عدد متوسط نیست $n=1,2,........,X_n$ همین طور کسر اعشار $0,a,a_1,a_2......a_n$ که به قیمت کسر اعشار ازدیگر هرکسر اعشار تفاوت دار د (4,60) خلاف ادعای ثبوت آن می باشد .

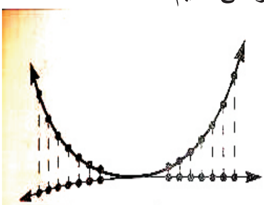
نتیجه: ست اعدادحقیقی که توسط انتروال اختیاری تشکیل گردیده غیر قابل شمارش است .

ثبوت: نشان می دهیم که ست اعداد حقیقی دارای انتروال اختیار ی متساوالتوان به ست های تمام اعداد حقیقی می باشد .

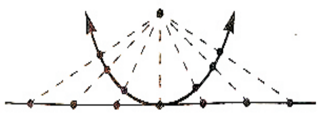
فرضا انتراوال اختیار ی متساوالتوان انتروال (-1,+1) مطابقت یک به یک در مطابقت بین انتروال (a,b) می باشد و امکان برقرارشدن انتروال (-1,+1) درآن باشد به طور مثال معادله خطی $x=\dfrac{2t-a-b}{b-a}$ اگر $a<t<b$ باشد پس -1<x<+1 انتروال (-1,+1) ومطابقت یک به یک توسط تابع $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ =t(x) ,-1<x<+1 به روی تمام محور اعداد حقیقی نقش می شود

به این ترتیب نشان می دهد که انتروال (a,b) متساوالتوان درتمام محوراعدادحقیقی بوده وهمین طور ست غیرقابل شمارش می باشد .

درقدم اول نیم دایره باز رابدون نقاط انجام های آن توسط ارتسام موازی درانتروال مطابق شکل 16 وخود آنرا دربین نقاط با مطابقت یک به یک قرار می دهیم



شکل 16



شکل 17

بعدا توسط ارتسام مرکزی ازمرکز نیم دایره مرتسم آنرا بالای مستقیم رسم می نمائیم طبق شکل 17این مرتسم همین طوربا مطابقت یک به یک قرارمی گیردولی این باربین نیم دایره وتمام مستقیم می باشد

نتیجه2: درانتراول اختیاری اعداد غیرناطق قرارمی گیرد.

ثبوت: حقیقتا اگردربعضی انتروال ها اعداد غیرناطق قرار نگیرد پس درآنصورت ست فرعی ست قابل شمارش اعداد ناطق می باشد یعنی ست متناهی یا قابل شمارش را تشکیل می دهید .(مراجعه نمائید به لیما2) که خلاف ادعانتیجه 1 می با شد .

تبصره: درپاراگراف 4.10ثابت گردید که اعداد حقیقی لیمت ترادف اعداد ناطق می باشد ازین جا نتیجه می شود که تمام انتروال های از اعداد متناهی پولینوم ها ی ناطق تشکیل می شود

فرضا انتروال (a,b) داده شده وچنین $\xi\in(a,b)$ را انتخاب می کنیم $\xi=\frac{a+b}{2}$ فرض می کنیم $\xi>0$ است . پس درآنصورت اگر ξ_n ....$a=1,2$ کسر اعشار تقریبی سرحدی باشد (مراجعه نمائید به پاراگراف 4.10 نتیجه می شود که $\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi$ انتروال (a,b) بنام حوالی نقطه انتخاب شده § می باشد به این ترتیب طبق تعریف لیمت ترادف تمام اعداد ناطق ξ_n دربرگیرنده این انتروال می باشد درین جا گفته می توانیم که چنین نمره n_0 موجود می شود که برای تمام نمره های $n> n_0$ غیرمساوات ذیل قابل تطبیق است $a<\xi_n<b$ پس درین صورت $n=n_0+1$ و $n=n_0+2$ مطلب ازاعداد ناطق می باشد .

به این ترتیب درانتروال اختیاری محور عددی قسمیکه اعداد ناطق موجود اند همین طور اعداد غیر ناطق نیز موجودمی باشند .

درین جا مختصرا چنین می گویند ((اعدادناطق وغیر ناطق ست فرعی ست اعدادحقیقی ارتباط دار د))

تمرین 17: ثابت نمائید که ست انتروال نقاط قطعه خط درانتروال نیمه[1]؛متساوالتوان می باشد میتود که برای شمارش اعداد ناطق بکار رفته امکان ثبوت گفتار ذیل را می دهد .

قضیه 9: حاصل جمع ست های متناهی یا قابل شمارش غیر خالی متناهی یا ست های قابل شمارش عبارت ازست های متناهی یا قابل شمارش میباشند .

ثبوت : نمبر ست های فرعی اعدا دناطق رابه N_n نشان می دهیم وتا nام سطر ادامه می دهیم . نمره گذاری تعداد اعداد ناطق درشکل صفحه 143 برسیم گردیده است پس

$$N=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}N_n$$

عبارت ازست مورد نظر اعداد طبیعی میباشد ؛ شکل ست مختلف اعداد قابل شمارش دوبدو باست قابل شمارش قطع نمی کند اگر X_n ,........$n=1,2$ ست متناهی یا قابل شمارش باشد ، پس درین صورت ست $Y_1=X_1$

$$Y_2=X_2\setminus X_1,........$$

$$Y_n=X_n\setminus\overset{n-1}{\underset{K=1}{\cup}}X_k.....$$

که دوبدو قطع نمی کند .

$$X\overset{def}{=}\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}X_n=N=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}Y_n$$

که هرکدام ازین ست ها متناهی یا قابل شمارش اند همین طور هر ست Y_n متناهی یاقابل شمارش است به این اساس برای هر ...n=1,2 مطابقت یک به یک قیمت بین عناصر ست Y_n وبعضی ست های فرعی $A_n\subset N_n$ موجود می شود .بنا بر علت اینکه Y_n دوبدو قطع نمی کند این مطابقت

یک به یک بین ست ها را تشکیل می دهد متقاطع نمی باشد $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}, Y_n$ $X = $ $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} = An \subset N,$ طبق لیما

2ست $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$

متناهی یا قابل شمارش مثل ست فرعی ست قابل شمارش میباشد همین طورست xمتناهی یا قابل شمارش می باشد .

قضیه 10: ست تمام ست های فرعی متناهی قابل شمارش ،ست قابل شمارش است .

نتیجه: تقسیمات ست های متناهی ممکنه با عناصر ست های قابل شمارش قابل شمارش می باشد.

ثبوت : فرضاx ست قابل شمارش می باشد و $x_1, x_2 ....x_n$ تماما عناصر این ست می باشد دیده می شود که تماما ست های فرعی این ست از یک عنصر $\{x_1\},\{x_2\},....\{x_n\}$تشکیل شده عبارت ازست قابل شمارش می باشد .حال ثبوت شد که ست تمام ست های فرعی ست x که ازmعنصر تشکیل شده $m \geq 1$ قابل شمارش است این ست فرعی را به $X_n^{(m)} ......n = 1,2$نشان میدهیم.

اگربرای هر......n=1,2 باشد وبه ست $X_n^{(m)}$ به نوبت یک را افزود نمائیم طوریکه در عناصر ست x واقع نباشد ،پس درین صورت ست قابل شمارش حاصل می شود واین ست را چنین نشان می دهیم ,...k=1,2 $X_n^{(m)} ......n = 1,2$ با شد هر گاه مجموع تمام ست ها $X_{n,k}^{(m)}$ K=1,2..., مجموع تمام ست ها فرعی ست x ر اتشکیل می دهد که از m+1 عنص تشکیل یافته است .این ست ها با معلوم بودن ..n=1,2 ست های قابل شمارش می باشند (اندکس kدارای قیمت ...,1,2,3) می باشد . همین طور تمام ست های قابل شمارش مختلط ست های قابل شمارش است طبق قضیه 9 ست های فرعی تمام ست های x که ازmعنصرتشکیل شده قابل شمارش است طبق قضیه 9 وتمام ست ها متناهی ست فرعی ست x قابل شمارش است .

ثبوت : به خاطر بدست اوردن تقسیما ت ممکنه ست های داده شده به عناصر متناهی لازم است تا تمام ست ها ی فرعی متناهی آنر ا به عناصر ممکنه ست فرعی متناهی به ست فرعی متناهی تبدیل نمود . اگر ست x اول قابل شمارش باشد پس درآن صورت طبق قضیه 10 ست تما ست های فرعی متناهی آن قابل شمارش است . به این اساس تمام ست های متناهی تقسیم شده به عناصر x عبار ت از حاصل جمع ست های متناهی قابل شمار ش می باشد که در تنیجه می تواند قابل شمارش باشد . توسط قضیه 10 به اسانی می تواند شمارش تما ست های اعداد الجبری را انجام داد پس درآن صورت اعداد حقیقی عبارت ازجذرپولینوم با ضریب تام می باشد .

قضیه 11: (قضیه کانتور): تمام ست های اعداد الجبری قابل شمارش است . ثبوت : هرپولینوم با ضرایب تام توسط ضرایب ست خود بیان می شود پس درآن صورت درحالیکه ست متناهی اعداد طبیعی داده شده باشد آنرا به ترتیب معلوم می گیریم درین جا تقسیمات اعداد طبیعی متناهی به صورت ست های متناهی درین پولینوم ها کم است . ولی هر ست متناهی چنین پولینوم ها دارای جذر حقیقی میباشد واعدا آنها درجه پولینوم را بالا نمی برد . همین طور ست های جذری بسیار زیاد است درست ها جذری پولینوم های مختلف است ومی تواند دارای مقطع وغیر خالی باشد .به این اساس لازم نیست تا بیان دیگرازجذرست های قابل شمارش را داشته باشیم. همین قدر کافی است .

(4.12*)لیمت های فوقانی وتحتانی ترادف ها

درپراگراف (4.6) نشان داده شد که هرترادف عددی همیشه برحسب آخرین اندازه خود دارای لیمت قسمی متناهی یا بی نهایت میباشد.

کوچکترین وبزرگترین ازآنها (کم میتوان نشان داد که آنها همیشه موجود است).

درتیوری ترادف ها رول خاص را بازی میکند.

ماراجع به مفهوم "بزرگتر" و"کوچکتر" درمفاهیم گسترش ست های اعداد حقیقی R مراجعه نماید به پراگراف (3.1) معلومات کافی دارد.

پس درآنصورت درقسمت (جزئیات) بزرگتر"کوچکتر" عناصر ست $x \subset \overline{R}$ میتوان $(+\infty)$ (درمطابقت به $(-\infty)$) قرارگیرد بجا خواهند بود ، وقتیکه $x \in +\infty\,(x \in -\infty)$باشد.

حالت متذکره چنین معنی میدهد که بی نهایت مطابق به علامه عبارت ازلیمت قسمی ترادف مورد نظرمیباشد.

بعضی ست ها درگسترش مستقیم عددی عناصر بزرگتر(کوچکتر) ندارند. اگریکی ازین ست ها عبارت ازست لیمت قسمی بعضی ازترادف ها باشد ، پس همیشه مثال که داده شد درآنها عناصرکوچکتروبزرگترزیاد موجود است.

تعریف19: بزرگترین لیمت قسمی ترادف $\{x_n\}$ بنام لیمت بالای آن یاد میشود وچنین نشان داده میشود: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \; x_n$ وکوچکترین لیمت قسمی ترادف $\{x_n\}$ بنام لیمت پائینی آن یاد میشود وچنین نشان داده میشود. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \; x_n$

قضیه 13: درهرترادف $\{x_n\}$ لیمت قسمی مانند بزرگترویا کوچکتر موجود است.

ثبوت: موجودیت لیمت قسمی بزرگتررا ثبوت مینمایم. برای ترادف داده شده $\{x_n\}$ دوحالت ممکن است:

یا آن محدود بالای است یا محدود بالای نیست اگرآن محدود بالایی نباشد ، پس بی نهایت مثبت $(+\infty)$ عبارت ازلیمت قسمی آن بوده که بدون شک بزرگتراست ، پس داریم که:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ اگرعین ترادف $\{x_n\}$ محدود بالايي باشد ، پس ازنودوحالت ممکن است:

ست خالی ویا غیرخالی A دارای لیمت متناهی میباشد. درقدم اول حالت اول را بررسی می نماییم ازمحدویت بالايي ترادف داده شده $\{x_n\}$ نتیجه میشود که محدویت بالايي ست غیرخالی A لیمت قسمی متناهی دارد. به این علت ست A دارای سرحد فوقانی متناهی میباشد.

نشان میدهیم که b=supA عبارت ازلیمت قسمی بوده، پس داریم که $b \in A$ است. واقعاً اگر $b \notin A$ باشد پس موجودیت چنین $0 < \delta$ که درانتروال $[b-\delta, b+\delta]$ دارای حدود متناهی متزاید ترادف عددی $\{x_n\}$ بوده قسماً بایکی ازآن وبخاطریکه (چرا) که درین انتروال یک عنصرست A که خلاف ادعا شرط b=supA باشد موجودنیست.

به این ترتیب $b \in A$ بوده وهمین قسم بزرگترین عنصر A محسوب میشوند. زیراکه $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ بوده به گذاشتن این حالت

وقسمت که ترادف $\{x_n\}$ محدود بالای ولیمت قسمی متناهی آن ست خالی A باشد پس $\lim\limits_{n\to\infty} = -\infty$ آنرا ثبوت مینمایم

درین حالت داریم که لیمت قسمی این ست ازیک عنصر ∞ تشکیل یافته که خودش بزرگتردرین ست محسوب میشوند.

پس درینجا داریم که:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

بطورمشابه برای هرترادف موجودیت بزرگتر(متناهی یا بی نهایت) لیمت قسمی ثبوت میشوند.

تمرین18: فرضاً :

$$x = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

$$\inf\{x_n\}, \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n, \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

n= 1, 2… داده شده باشد.و sup $\{x_n\}$ را دریافت نمایید.

قضیه14: برای اینکه عدد a لیمت بالای ترادف $\{x_n\}$ باشد لازم وکافی است تابرای هرعدد $\delta > 0$ به صورت کل دوحالت ذیل تطبیق شود:

1. موجودیت نمبر n_δ طوریکه برای تمام نمبرها $n > n_\delta$ غیرمساوات $x_n < a+\delta$ صدق نماید.

2. برای هرنمبر n_0 موجودیت نمبر $\bar{n}$ (مربوط به n_0, δ باشد) طوریکه $\bar{n} > n_0$ و $x_{\bar{n}} > a-\delta$ باشد.

شرط 1 معنی میدهد که درتعیین هر $\delta > 0$ به ترادف $\{x_n\}$ چنین حدود عدد متناهی که $x_n > a+\delta$ شود کم موجود است (نمبرهای آن اضافه از n_δ نیست.

شرط 2 عین معنی میدهد که درتعیین هر $\delta > 0$ به ترادف $\{x_n\}$ چنین حدود بی نهایت $x_n > a-\delta$ زیاد موجوداست.

ثبوت لازمی: فرضا $\delta > 0, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ معین باشد اگر درانتروال نیمه بسته $[a+\delta,\infty)$ ترادف

پولینومی بی نهایت $\{x_n\}$ نشان داده شده باشد پس برای چنین ترادف عناصر $\{x_n\}$ عناصر پیدامیشود که بالای انتروال نیمه بسته قراردارد ودارای لیمت متناهی ویا بی نهایت باشد که توسط حرف b آنرا نشان میدهد . بدون شک $b \geq a+\delta > a$ که برخلاف آنچه که a بزرگترلیمت قسمی ترادف است میباشد که درزمینه شرط (1) ثبوت شد.

برعلاوه لیمت بالای عبارت ازلیمت قسمی میباشد ، همین قسم دارای ترادف $\{x_n\}$ میباشد ، طوریکه $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nR} = a$ تقریباً تمام حدود ترادف $\{x_n\}$ اضافه از $a-\delta$ میباشد همین قسم ترادف X_n دارای بی نهایت پولینوم ها میباشد که اضافه از $a-\delta$ بوده درزمینه شرط 2 ثبوت شد.

ثبوت کافی: فرضاً عددa شرایط 1 و 2 را تأمین میکند نشان میدهیم که درآنصورت a عبارت ازلیمت قسمی میباشد $k = 1.2.3.\cdots \delta = \frac{1}{k}$ را میگیریم برای هرعدد طبیعی k چنین نمبر n_k موجود میشود که $x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$ (طبق شرط2) و $x_{n_k} < a + \frac{1}{k}$ (طبق شرط1) همینطور برای هر R ست عناصر X_n ست داده شده بی نهایت برای اینکه غیرمساوات $a - \frac{1}{k} < x_n < a+1$ تطبق شود ، پس نمبر n_R ممکن است پی هم (k=1,2…..) آنرا انتخاب کرد ، طوریکه $n_{k_1} < n_{k_2}$ درصورتیکه $k_1<k_2$ باشد ، درنتیجه ما ترادف $\{x_{nk}\}$ ازترادف داده شده $\{x_n\}$ را حاصل نمودیم.

ازغیرمساوات $|a - x_{nk}| < \frac{1}{k}$ نتیجه میشود که :

$$\lim_{n\to\infty} x_{nk} + a$$

پس داریم که a عبارت ازلیمت قسمی ترادف $\{x_n\}$ میباشد.

حالا نشان میدهیم که عدد a عبارت ازبزرگترین لیمت قسمی میباشد.

اگر حقیقتاً b لیمت قسمی ترادف $\{x_n\}$ یافت شود، طوریکه b>a باشد، پس انتخاب $\delta > 0$

طوریکه $a+\delta < b$ باشد حاصل میداریم که درفاصله $(a+\delta,+\infty)$ میتوانند بی نهایت

پولینوم های ترادف $\{x_n\}$ تشکیل گردد، ترادف a>b تقریباً به تمام حدود ترادف فرعی تقرب

میکند.

این خلاف شرط 1 میباشد که ثبوت شد.

تمرین 19: شاید ثبوت برای اینکه ترادف لیمت داشته باشیم (متناهی ، یا بی نهایت برابر به

یکی ازسمبول های $(-\infty,+\infty)$ لازم وکافی است تا: $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ شود.

20: ثبوت نمایید که : $\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf_{n\to m>n} \{\sup x_n\} = \lim_{n\to\infty, m>n} (\sup x_n)$$

21: ثابت نمایید که: $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup_x \left\{\inf_{m>n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\inf_{m>n} x_n\right\}$

§5. لیمت ومتمادیت تابع

5.1 توابع حقیقی

مابه مطالعه پروسه های جهان حقیقی (فزیک، کیمیا، بیولوژی ، اقتصاد وممکنات دیگر) بطورمتداوم درجریان بررسی باتغییرات مشخصه کمیات روبرومیشویم.

چنانچه تغیرات یک کمیت سبب تغییرات کمیت دیگرمیشود ، یا همین قسم علاوه برآن تغیرات یک کمیت عبارت ازدلیلی است که تغیرات کمیت دیگربا تغیرات مشخصه عددی کیمت مورد بررسی رابطه مستقیم دارد.

ازینجا به مفهوم تابع ومدول ریاضیکی آن میرسم که مفهوم تابع یکی ازمفاهیم بسیارمهم درریاضی وضمایم آنها میباشد. ما فعلاً درکورس متذکره آنالیزریاضی تنها توابع حقیقی یک متحوله حقیقی را مطالعه خواهیم نمود ، پس درآنصورت داریم که تابع $f: X \to \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}\ ,\ X \neq \varnothing$ باشد.

دراین حالت متحول مستقل ومتحول غیرمستقل را بنام متحولین حقیقی (مادی) می نامند. بعداً تابع چند متحوله را یادآوری می نماییم پس درآنصورت رادریک ست ازاعداد، عناصر را که هرکدام ازآنها نشان دهنده مجموع مرتبی ازاعداد است معین میسازد.

میخواهیم همین قسم تابع درارائه قیمت مختلط ، تابع با متحول آزاد ، که عدد مختلط شمرده میشود. وتوابع دیگر که درطبیعت بسیار عمومیت دارد مطالعه خواهیم نمود. خاطر نشان میسازیم که ارائه قیمت عددی تابع (حقیقی یامختلط) بنام تابع عددی یا سکالری می نامند، بالای قیمت عددی تابع ممکن است عملیه ها مختلف حسابی اجراء گردد.

اگر دوتابع عددی f و g داده شده باشد که عین ست X و c برای بعضی اعداد یا عدد ثابت معین باشد ، پس تابع cf مثل تابع قبول شده درهرنقطه $x \in X$ قیمت cf(x) تعریف میشود.

مجموع دوتابع fو g بشکل f+g نشان میدهیم وآنرا چنین تعریف میکنیم: f(x)+g(x) مانند تابع قبول کننده درهرنقطه $x \in X$ قیمت f(x)+g(x) را تعریف میکند تفاضل دوتابع gوf را به شکل f-g نشان میدهیم وآنرا چنین تعریف میکنیم f(x)-g(x)

حاصل ضرب دوتابع f و g رابه شکل $f \cdot g$ نشان می دهیم وآنرا چنین تعریف میکنیم:

$$f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g \neq 0$$

بالاخره f/g مانند تابع درهرنقطه $x \in X$ برابر است به f(x)/g(x) واضح است که $g(x) \neq 0$ باشد.

اگرتابع عدد f درست x تعریف شده باشد بنام محدودبالای (پائین) یاد میشود، هرگاه ست قیمت آن محدود بالای (پائین) باشد یابه عباره تابع f محدود بالای (پائین) است اگرچنان نقطه ثابتM پیداشودکه برای هر $x \in X$ غیرمساوات $f(x) \leq M$ درمطابقت به $f(x) \geq M$ صدق نماید.

پس تابع f محدود ست x هم بالای وهم پائین است بنام مختصرمحدود درین ست یاد میشود.

پس واضح است که تابع f محدود درست x تنها وتنها درحالتي که اگرچنین عدد $M \geq 0$ پیدا میشود که برای هر $x \in X$ غیرمساوات $|f(x)| \in M$ صدق مینماید.

سه حد فوقانی (تحتانی) ست قیمت y_f تابع عددی y=f(x) که به ست x تعریف شده باشد، بنام سرحد فوقانی (تحتانی) تابع f یاد میشود و چنین نشان میدهیم.

$$\sup f, \sup_x f, \sup_{x \in X} f(x) | \inf f |$$

$$\inf f, \inf_{x \in X} f(x)$$

بسیار واضح معنی میدهد که مثلاً $\lambda = \sup f$ اگر دراول برای هر $x \in X$ غیرمساوات

$f(x) \le \lambda$ ودر دوم برای هر $\lambda^{-} < \lambda$ چنان $x\lambda^{-} \in X$ موجود شود که $f(x\lambda^{-}) > \lambda^{-}$ باشد

λ^{-} اندکس عناصر ست x نشان میدهد که مربوط به انتخاب عدد λ^{-} میباشد.

درتعریف ذکرشده سرحد فوقانی و(تحتانی) توابع میتواند هم متناهی وهم بی نهایت باشد مطابق نتیجه (3.4) تابع f محدود بالای (پائین) درست x است، وقتیکه تنها وتنها فقط اگردرین ست دارای سرحد متناهی بالای (پائین) میباشد.

تمرین:1: ثبوت نمایید اگرتابع f محدود بالای(پائین) درقطعه [a,b] باشد پس چنین ترادف نقاط .... n=1,2 $x_n \in [a,b]$ پیدا میشود که :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$

مطابق:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = -\infty$$

2: ثبوت باید کرداگر تابع محدود درقطعه نباشد، پس چنین نقطه این قطعه پیدا میشود که درحالت تابع محدود نیست آیا این مطابق به تائید ازانتروال است؟

3: مثال تابع تعریف شده درقطعه وغیرمحدود درآنها ترتیب دهید؟

میتوان گفت که تابع عددی f درست x درنقطه $x_0 \in X$ معین بوده قیمت بزرگتر(کوچکتر) اگر $f(x) \le f(x_0)$ درمطابقت به $f(x) \ge f(x_0)$ برای هرنقطه $x \in X$ تعریف شده است. دراین حالت میتوان نوشت که : $f(x_0) = \max f$ یا $f(x_0) = \max_x f$ مطابق به $f(x_0) = \min_x f$ یا $f(x_0) = \min f$ قیمت تابع بنام بزرگتر(کوچکتر) همین قسم بنام قیمت اعظمی (اصغری) یاد میشود. قیمت اعظمی واصغری بنام اکستریمیلی یاد میشود.

واضـح اسـت کـه اگـر تـابع f درنقطـه x_0 بـا قیمـت بزرگتـر(کـوچکتر) معیـین باشـد، پـس $f(x_0) = \sup f$ مطابق به $f(x_0) = \inf f$ است.

بازخاطرنشان میسازیم که اگرست داده شده X و Y نظربه f معین باشد درمطابقت بـه هریکـی ازعناصر ست X یگانه عنصرست Y حاصل میشود. پس این تابع f درست X وبا ست قیمت با موجودیت درست Y کـاملاً ویـا قسماً تعریف شـده است مستقیماً بـدون اختلاف توسط کـدام حـرف متحـول (ارگومنـت) وبکدام قیمت تـابع نشـان میدهد بـه همین اشـاره سـاده مطـابق بـه f نوشـتـه: $u \in Y, u \in y, u = f(u), y \in Y, x \in X, y = f(x)$ یکسـان نمـایش داده میشـود، همگـــــی بطـــــور یکســـــان بســـــتگی میــــان x و y را معـــــین میکنـــــد. $x = \log_a^y, y > 0$, $y = \log_a^x$, $x > 0$ عین تابع را نشان میدهد.

بهتر روشن شدن موضوع باردیگرراجع بـه حوالی نقطـه درقطارافـاده درتـابع معیین درحـول نقطه استفاده نموده واصطلاح تابع معیین درحول نقطه به افاده مشابه کلمـه (در)و (بـالا)دارای یک مفهوم میباشد.

5.2 طریقه نمایش تابع (طریقه ارائه توابع):

درین فصل تنها توابع حقیقی یک متحوله را مطالعه می نمائیم ، پس در آنصورت تابع f را چنین ارائه می نمائیم:

$$f : X \to \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$$

ما درینجا تنها به مطالعه طریقه ارائه تابع اکتفا می نمائیم. قبل ازهمه تابع را میتواند توسط فورمولي ارائه کرد که ارائه نمودن تابع توسط فورمول به نام طریقه تحلیلی می نامند برای این کار مطالعه مخصوص ارائه تابع را توسط عملیه الجبری وگرفتن لیمت صورت میگیرد.

بطورمثال:

$$y = ax + y, y = ax^2, y = \sin x, y = \sqrt{1-x^2}, y = 1 + \sqrt{\log\cos 2\pi x}$$

درین حالت توابع فرعی توسط بعضی فارمول ها ارائه میشود که درینجا دانستن مفهوم تابع تعریف شده درست تمام اعداد حقیقی برای هرکدام اولاً توسط فورمول واضح نشان داده شده ودوم درپروسه نتیجه محاسبه برای هرعدد x تابع مورد بررسی تعریف شده است.

که عبارت ازقیمت آن درنقطه x باشد طوریکه ساحه موجودیت (معینیت) تابع $f(x) = \dfrac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ عبارت ازانتروال (1-،1) است . گرچه این تابع قیمت حقیقی بالای تمام مستقیم n<-1 را معین میسازد درتمام $x \le 0$ آن برابر به صفراست. اما در x<-1 قیمت جذر $\sqrt{1-x^2}$ عبارت ازموجودیت عدد مختلط میباشد یا دآور میشویم که درچنین تعریف تابع حقیقی f(x)=x و $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$ دارای تعریف ساحات مختلف میباشد.

تابع اول درست های تمام اعداد حقیقی وتابع دوم تنها درتمام ست نامنفی تعریف شده است.

همیشه تابع تابع توسط بعضی فارمول ها ارائه میشود ، بطورمثال:

$$f(x)=\begin{cases}2^x & \text{برای} \quad x>0\\ 0 & \text{برای} \quad x=0\\ x-1 & \text{برای} \quad x<0\end{cases}\cdots(5.1)$$

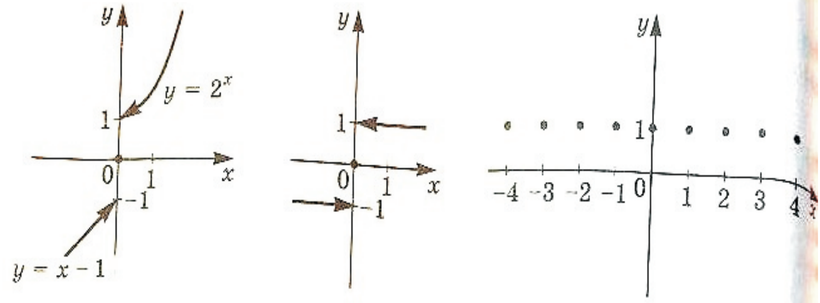
تابع را میتوان همین قسم توسط تشریح مناسب طوریکه مطابق به هرعدد $x>0$ عدد 1و 0 عدد 0 وبه هرعدد $x<0$ عدد(1-) را انتخاب میکنیم.

درنتیجه تابع را بالای تمام محور عددی تعریف شده حل میکنیم که سه قیمت را معین میسازد (-1,1,0) این تابع دارای اشاره مخصوص signx میباشد و میتوان توسط یک عدد فارمول ها آنرا نوشت طوریکه:

$$\sin g\, x=\begin{cases}1 & \text{برای} \quad x>0\\ 0 & \text{برای} \quad x=0\\ -1 & \text{برای} \quad x<0\end{cases}$$

مثال دیگر: هرعدد ناطق مطابق به عدد را(1) وهرعدد غیرناطق مطابق به صفر درنظرمیگیریم تابع بدست آمده عبارت ازتابع دریچلی[1] میباشد .خاطرنشان میسازیم که تمام فورمول ها عبارت ازنوشته سمبولیک تعریف شده بوده بالاخره درپرانسیپ بین تابع که توسط فارمول دریافت میشود وبا توسط تعریف (تشریح) دریافت میشود کدام فرق خاصی وجود ندارد . ارائه تابع توسط فارمول میتواند راه خوبی برای حل دیگرتوابع باشد که چنین ارائه تابع را بنام تحلیلی یاد می نماید اگرشخصی راجع به توابع حقیقی یک متحوله حقیقی باشد پس برای نشان دادن تعلیم بصری ارتباط تابعی توسط گراف درمستوی سیستم کمیات وضعیه تشکیل میشود ، کاردینات عبارت ازمستوی است که بشکل سیستم قایم دیکارت میباشد.

[1] 1. دریچلي (1805-1859) رياضيدان آلماني



ازتعریف عمومی گرافیکی تابع (مراجعه شود به) پراگراف *1.2 نتیجه میشود که گراف تابع (x)y=f (x وy عدد است $x \in X$) خود ست نقاط $x \in X$ (x,f(x بالای مستوی کاردینات متحولین x وy را نشان میدهد ، همین گراف تابع (5.1) شکل 18 گراف تابع signx (مراجعه شود به) فورمول (5.2) درشکل 19 وگراف تابع $y = 1 + \sqrt{\log\cos 2\Pi x}$ ازنقاط جداگانه تشکیل گردیده است درمطابقت به قیمت کامل ارگومنت (متحول) علامه تحت جذرقیمت منفی را معین میسازد . شکل 20.

ست نقاط $\{(x.y) : x \in X, y \geq f(x)\}$ عبارت ازگراف بالای تابع f است:

$\{(x.y) : x \in X, y \leq f(x)\}$ گراف تابع f است. ارائه گرافیکی تابع همین قسم میتواند برای ارائه ارتباط تابعی استفاده شود ، زیراکه حقیقت نزدیک ارائه تابع را توسط گراف درپراکتیک با درجه دقیقترمشخص سازد. مثال های گرافیکی ارائه تابع که درپراکتیک دیده میشود میتواند درارائه اسیلو گراف کمک کند.

توابع ممکن است توسط جدول نیزارائه گردد که درآنصورت برای هرقیمت متحول x نظربه قاعده معین یک قیمت y مطابقت می نماید . جدول های داده شده میتواند بطور مستقیم ازتجارب ویا همین قسم توسط محاسبه ریاضی بدست می آید.

که چنین مثالها ارائه تابع عبارت ازجدول لوگاریتم ، توابع مثلثاتی میباشد وچنین فکرکه ارائه تابع توسط جدول درنقاط متناهی ست تعریف شده است بالاخره اجرا کردن محاسبه ی عددی بالای توابع درکمپیوتر توسط پراگراف داده میشود . برای محاسبه آنها قیمت های ضروری ارگومنت یا قیمت خواسته شده تابع بشکل داده شده درحافظه کمپیوتر سپرده میشود ، بعضی طریقه ها بسیارمهم تحلیلی ومخصوص ارائه تابع رادرمورد بررسی قرارمیدهیم.

توابع غیرآشکار: فرضاً معادله به شکل (3- 5)....... F(x,y) =0 داده شده باشد دراین صورت تابع داده شده F(x, y) دومتحوله x و y برای اینکه شرط (5.3) تطبیق شود وتنها چنین جوره مرتب x و y اگر موجود باشد بررسی میگردد.

اعداد توسط y_0 نشان میدهم وآنرا مطابق به عدد $x_0 \in X$ قرارمیدهیم درنتیجه تابع f حاصل مینمایم که درست Xتعریف شده طوریکه:

$$F(x_0, f(x_0) = 0$$

برای تمام $x_0 \in X$ درین حالت میگویند که تابع توسط معادله غیرآشکار (5.3) داده شده است. بطورعموم میگویند نه یک تابع بلکه چندین ست تابع را میدهد، تابع غیراشکارکه توسط معادله (5.3) داده شده است بنام تابع غیراشکار درتفاوت به تابع متحول y که توسط فارمول داده میشود است یاد میشود درآنصورت شکل فارمول تابع y=f(x) میباشد. اصطلاح "توابع غیراشکار" استقلالیت مشخصه تابعی را منعکس نمیکند وبطریقه زیاد ارائه میگردد، یکی ازین طریقه تابع میتواند مثل آشکار ویاغیرآشکار باشد.

بطورمثال : تابع $F_2(x)=-\sqrt{1-x^2}\,,F_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ میتواند ، یا همین قسم میتواند بطریقه غیرآشکار توسط معادله $x^2+y^2-1=0$ داده شده باشد ، به این مفهوم که آنها توسط این معادلات داده شده به مجموع تابع مبدل میشوند.

توابع مرکب :

اگر توابع $Z=F(y),y=f(x)$ طوری داده شده باشند که ساحه معینیت تابع F دارای ساحه قیمت تابع F باشد و به طور عادی Z ، $y=f(x),Z=F(y)$ باشد و تابع چنین تعریف شده باشد $Z=F\left[f(x)\right]$ ، پس این تابع بنام تابع مرکب یاد میشود . یا به عباره دیگر ، تابعي از تابع را بنام تابع مرکب یاد نمایند و ترکیب تابع f و F را چنین نشان میدهند . (Fof) بنابرین داریم که :

$$(Fof)(x)\underline{\underline{def}}\;F(f(x))$$

تابع مرکب به یک قسم ارائه نمیگردد ، بلکه بطریقه های زیاد ارائه میشود .

هر نوع تابع را میتوان توسط شکل مرکب و یا به عین تابع ارائه نمود .

بطور مثال : تابع مرکب $y=\log_2\left(1+\sin^2 x\right),z=2^y$ تابع فوق که به شکل تابع لوگارتمی و یا میتوان بدون $Z=1+\sin^2 x$ آنرا ارائه نمود .

بطریقه مشابه میتوان تابع مرکب اضافه از دو تابع مورد بررسی قرار داد .

مثلاً: $W=\sin\log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ را میتوان به شکل ذیل مورد بررسی قرار داد .

$$W=\sin v,v=\lg u,u=1+z,z=\frac{1}{y},y=\sqrt{x}$$

5.3.توابع ابتدایی و تنصیف آن

بعضی از توابع ابتدایی و تنصیف آنها قرار ذیل است :

تابع ثابت ، $c, y=c$ ثابت است .

تابع طاقت دار : $y=x^n$

تابع نمایی : $y=a^x \quad ,(a>0)$

تابع لوگاریتمی : $y=\log a^x \quad , \quad (a>0, a\neq 1)$

تابع مثلثاتی : $y=\cos x,\ y=\tan x\ ,\ y=\cot anx$

تابع معکوس مثلثاتی : $y=\text{arc}\ \sin x\ ,\ y=\text{arc}\ \cos x$

$.y=\text{arc}\ \tan x\ ,\ y=arc\cot anx$

توابع فوق را توابع اساسی ابتدایی مینامند . یعنی هر تابع که بتواند بوسیله انجام دادن تعداد مشخص عملیات حسابی بالای اعداد متناهی بطریقه آشکار توسط فرمول ارائه میشود به(س. م .پراگراف 5.2) ملاحظه گردد و برای این کارمعمول است تمام اعداد حقیقی را بیاد می آوریم .

در اول فرمول که برای بررسی تابع ابتدایی داده شده است دارای قیمت میباشد . و دوم در پروسه تطبیق عملیه های حسابی لازمی بر حسب این فرمول تنها اعداد حقیقی بدست می آید .

بررسی توابعي که توسط فرمول ارائه میگردند ، قرار ذیل است:

$$y=ax+b, y=ax^2, y=\sqrt{1-x^2}, y=\frac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$|x|=\sqrt{x^2}\ ,\ y=\sin\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\ ,\ \ y=1+\sqrt{1og\cos 2\pi x}$$

تابع ابتدایی معمولاً به بخش های ذیل تقسیم بندی میشوند :

1- پولینوم ها که مربوط به تابع است و به شکل فرمول ارائه گردیده است .

یعنی:

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + ...a_n x^n \equiv \sum_{R=0}^{n} a_R x^n$$

اعداد $a_0, a_1, ...a_n$ ضرایب پولینوم $P_n(x)$ یاد میشود .

اگر $a_n \neq 0$ باشد ، پس عدد n بنام درجه پولینوم داده شده یاد میشود .

پولینوم درجه اول بنام تابع خطی نیز یاد میشود و پولینومی که تمام ضرایب آنها برابر صفر باشد بنام پولینوم صفری یاد میشود . و درجه حاصل ضرب ، در ضرب پولینوم های صفری برابر به حاصل جمع درجه های عامل ضربی میباشد . با حفظ این خاصیت ضرب پولینوم های صفری برابر به درجه پولینوم $(-\infty)$ قبول نموده است و برای هر عدد حقیقی x بر حسب تعریف (م . پراگراف 3.1) که حاصل جمع با $(-\infty)$ برابر به $(-\infty)$ است . یعنی $-\infty + x = -\infty$ زیراکه $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$. در نتیجه توافق درجه حاصل ضرب پولینوم ها که بر حسب اندازه آخرین حد یک صفر قرار میگیرد .

که در آنصورت برابر به مجموع درجه عامل ضربی میباشد .

2: توابع ناطق (کسرهای ناطق) : تابع که به شکل $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ارائه گردد مربوط به توابع ناطق میشود که در اینجا $Q(x)$, $P(x)$ توابع پولینومی اند بشرطیکه $(0 \neq Q(x))$ پولینوم غیر صفری باشد .

3: خاطر نشان میسازیم که کلاس توابع پولینوم ها. منظور از کلاس تابع ناطق میباشد .

3- توابع غیر ناطق :

تابعی که ناطق نباشد بنام تابع غیر ناطق نامیده میشود . این تابع را میتوان توسط ترکیب اعداد متناهی مثل تابع ناطق ارائه نمود . و درجه تابع با توان ناطق که چهار عملیه حسابی بالای آن قابل اجرا باشد ، عبارت از تابع غیر ناطق میباشد مانند :

$$y = \sqrt{(x-1)/\left(x^2+\sqrt{x}\right)}$$

4: توابع غیر الجبری :

توابعي که نه ناطق و نه غیر ناطق باشند ، بنام توابع غیرالجبری ابتدایی یاد میشوند . مثلاً تمام توابع مستقیم و معکوس مثلثاتی ، توابع نمایی ، توابع لوگارتمی بنام توابع غیر الجبری یاد میشوند .

چون درین کورس انالیز ، اساسات توابع حقیقی یک متحوله و چندین متحوله حقیقی مورد مطالعه قرار میگیرد ، به این خاطر به عوض « تابع حقیقی» میتوان صرف بطور مختصر «تابع » نوشت .

5.4 تعریف اول لیمت توابع :

حالا بخاطر مطالعه یکی از مفاهیم بسیار اساسی انالیز ریاضی به مفاهیم لیمت توابع برمیگردیم ، که در زمینه میتوان «نقاط» یا نقطه متناهی یا نقاط بی نهایت دور را در نظر گرفت ، که در آنصورت ، یا عدد حقیقی یا یکی از لایتناهی ∞ یا $+\infty$ یا $-\infty$ میباشد . حالا لیمت توابع را تعریف مینماییم : $x \in R \; , f : x \to R$ که این تعریف را همیشه بنام تعریف لیمت توابع به گینی[2] منسوب میشود.

---

[2] گ . گینی (1821- 1881) ریاضیدان آلمانی

تعریف 1 : نقطه a بنام لیمت تابع $f: x \to R$ در نقطه x_0 در صورتیکه $x \to x_0{}^2$ مینامند . هرگاه برای هر ترادف $x_n \in x$ ، $n = 1,2.....$ دارای لیمت در نقطه x_0 باشد ، پس در آنصورت داریم :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 ...(5.4)$$

ترادف $\{f(x_n)\}$ دارای لیمت a میباشد .

پس در آنصورت داریم که :

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a ...(5.5)$$

درین حالت وقتیکه a لیمت تابع f در نقطه x_0 باشد مینویسند :

$\lim_{x \to x_0} f(x_n) = a$ یا $f(x) \to a$ ، طوریکه $x \to x_0$ و اگر x_0 عدد باشد ، طوریکه $x_0 \in R$ پس همیشه چنین مینویسند :

$$\lim_{x \to x_0 \to 0} f(x) = a$$

به شکل سمبولیک تعریف لیمت تابع بطور ذیل:

$$\lim_{x \to \infty} f(x_n) = a \underline{\underline{def}}$$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow}\left\{\forall x_n \in x, n=1,2....,\lim_{x\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=a\right\}$$

خاطر نشان میسازیم که در تعریف $a\ ,x_0, I$ و همینطور لایتناهی∞ یا $+\infty$ یا $-\infty$ اعداد حقیقی میباشد .

اگر $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$ و a عدد حقیقی باشد ، در آنصورت میگویند که در نقطه x_0تابع دارای لیمت متناهی (برابر a) میباشد .

بنابر تعریف لیمت تابع داده شده $f: X\to R$ دارای لیمت متناهی میباشد .

تنها و تنها وقتیکه برای نقطه x_0 حقیقتاً ترادف نقاط $x_n \in x$

$n=1,2.....$ موجود شود که در نقطه x_0 دارای لیمت باشد .

(متناهی بی نهایت) یعنی :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

تعریف 2: فرضاً $X\subset R$ باشد که برای نقطه x_0 ترادف $x_n \in X$ ، $n=1,2.....$ موجود شود که در نقطه x_0 دارای لیمت باشد ، بنام نقطه مماس ست x یاد میشود .

یعنی :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0...(5.6)$$

اگر نقطه مماس x_0 ست x یکی از لایتناهی ∞ یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد واضح است که اگر $x_0=\infty$ نقطه بی نهایت دور مماسی ست x باشد ، پس محدود نیست . اگر

$x_0 = +\infty$ $(x_0 = -\infty)$ یا نقطه بی نهایت دور مماس باشد ، پس آن محدود بالای (پائین) نیست .

واضح است که هر نقطه x_0 واقع در خود ست x عبارت از نقطه مماسی آن میباشد .

همینطور ترادف ثابت $x_n = x_0 \in X$ ، $n = 1,2.....$ توسط شرایط تعریف 2 .

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ و $x_n \in X$ ، $n = 1,2.....$ تأمین میگردد .

اما بدون شرایط درست میتوانند نقاط بی نهایت مماسی موجود باشد ، که در این ست واقع نیست .

بطور مثال : نقطه $x = a$, $x = b$ عبارت از نقاط مماسی انتروال $(a_1 b)$ میباشد که در آن موجود نیست .

تمرین 4 : ثبوت نمایید که اگر نقطه x_0 نقطه مماسی ست X و $X \subset y \subset R$ باشد ، در آنصورت نقطه x_0 عبارت از نقطه مماسی Yمیباشد .

تبصره : به آسانی میتوان معتقد شد که بعضی نقاط عبارت از نقاط مماسی ست داده شده میباشد ، وقتیکه تنها و تنها هر حوالی آن با این ست تقاطع کند .

واقعاً اگر x_0 نقطه مماسی ست X باشد ، پس در آنصورت ترادف $x_n \in X$ ، $n = 1,2.....$میشود که $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ در نتیجه به هر نقطه حول x_0 دارای نقاط ست x نباشد ، پس در آنصورت برای هر عدد طبیعی n چنان نقطه غیر خالی بر حسب شرایط مقطع $x \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ انتخاب نموده و آنرا به x_n نشان میدهند ، پس داریم :

$n=1,2.....,x_n \in X \cap U\left(x_0,\frac{1}{n}\right)$ چنین ترادف $\{x_n\}$ که $x_n \to x_0$ (مراجعه نمائید

به : تبصره 1 در پراگراف 4.2) و $x_n \in x$ طوریکه $n=1,2.....$ به این معنی که x_0

عبارت از نقطه مماسی ست x میباشد .

برای هر ست غیر خالی $x \subset R$ سرحد فوقانی آن $\beta=\sup x$ و سرحد تحتانی آن $\alpha=\inf x$ عبارت از نقطه مماسی آن میباشد . (آنها میتوانند متناهی یا بی نهایت باشد) که مستقیماً به اساس لیما 1 نتیجه میشود . تعریف 4 سرحد فوقانی و تعریف 5 سرحد تحتانی ست میباشد .

همینطور درین تعریفات تقاضا به عمل آمده ، برای اینکه در هر حول مطابق سرحد ست نقطه در آن قرار داشته باشد ، از تعریف 1 لیمت توابع مستقیماً نتیجه میشود که در نقطه مماسی ست به اساس خود تعریف توابع نمیتوانند دارای دو لیمت متفاوت باشد . پس در آنصورت تعریف متذکره یک قیمت دارد .

علاوه بر آن ا تعریف لیمت توابع نتیجه میشود که قیمت تابع که ست نقاط میگرد و خارج از حو ل نقطه x_0 واقع است ، کدام تأثیر بالای موجودیت قیمت تابع در تعیین نقطه x_0 ندارد . چنانچه میگویند : موجودیت و نا موجودیت لیمت تابع در نقطه داده شده x_0 رول ندارند . و اگر فرضاً لیمت تابع در نقطه x_0 موجود باشد ، پس چنین قیمت لیمت تابع بصورت کل در مقطع خود ست $U(x_0) \cap x$ حول $U(x_0)$ بوده و دارای نقطه مماسی ست X میباشد و خود این ست رامعین میسازد .

حقیقتاً اگر حول $U(x_0)$ و ترادف $x_n \in X$ طوریکه $n=1,2.....$ موجود باشد که $\lim\limits_{n\to 0} x_n = x_0$ و عدد n_0 دریافت شود که $n > n_0 \in N$ ، پس شامل نمودن

با $f(x)_1, f(x_2)....,f(x_0)$ بجا خواهد بود . و حدود عدد متناهی $x_n \in U(x_0) \cap x$

ترادف $\{f(x_n)\}$ به موجودیت لیمت تابع و قیمت آن در صورتیکه این علت موجود باشد ، تأثیر گذار نخواهد بود .

زیرا به اساس خواص تابع که به قیمت تابع در هر حول نقاط وابستگی دارد ، به انتقال تنگاتنگ (فشرده) تابع در مقطع ست آن تغییر نمیخورد و تعیین جای هر نقطه حوالی بنام خواص مقامی تابع در نقطه داده شده یاد میشود .

از گفتار فوق نتیجه میشود که موجودیت قیمت لیمت در یک نقطه عبارت از خواص مقامی تابع در این نقطه میباشد .

مثال 1 : فرضاً : $(5.7)......f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}$ داده شده باشد .

ست X که در تعیین تابع (5.7) از ست های تمام اعداد حقیقی lR یعنی $x = lR/\{1\}$ حاصل میشود . واضح میسازیم که اگر لیمت تابع (5.7) موجود شود (نمیشود) در نقطه $x_0 = 0$ است .

اگر ترادف $x_n \in x$ ، $n=1,2.....$ را طوری در نظر بگیریم که :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

پس در آنصورت به اساس قضیه پراگراف 4.9 حاصل مینماییم :

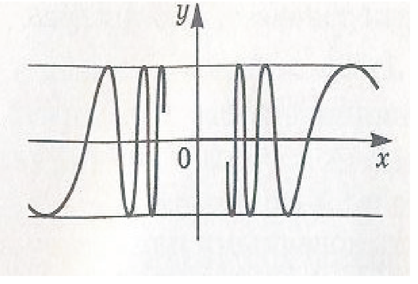
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} = \frac{2x^2+x-1}{x_n-1} = \frac{2\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1} = 1$$

بـه ایـن ترتیـب $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=1$ موجـود میشـود و همینطـور آن مربـوط بـه انتخـاب تـرادف

$x_n \in x$ ، $x_n \to 0$ ، $n=1,2.....$ باشد .

پس در آنصورت $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)=1$ موجود است .

مثال 2. شکل (21) تابع را بررسی مینماییم: $f\left(x\right)=\sin\dfrac{1}{x}......(5.8)$



شکل 21

پس تابع درست $X=R/\left\{0\right\}$ معین است . دوبـاره واضـح میسازیم کـه لیمت تـابع در نقطـه $x_0=0$ موجود نیست و یا موجود است .

دریـن حالـت دو تـرادف را در نظـر میگیـریم $x_n=\dfrac{1}{\pi n}$, $x_n=\dfrac{1}{\pi/2+2\pi n}$ طوریکـه $n=1,2.....$ باشد .

واضح است که $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0$ ، $x_n=0$, $x_n'=0$.

(شرط $x\neq 0$ در حالت معنی میدهد که $x\in X$)

$$f\left(x_n\right)=\sin \pi n=0$$

$$f\left(x_n\right)=\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi n)=1$$

$$n=1,2.......$$

پــس $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$ و ایــن معنــی میدهــد کــه لیمــت تــابع (5.8) در صورتیکه $x \to 0$ موجود نیست .

مثــال 3 : فرضــاً $f\left(x\right)=\frac{x^2+x+1}{x^2-2}$ ، لیمـت ایـن تـابع را در صـورتیکه $x \to \infty$ پیـدا میکنیم ، ساحه تعریف این تابع عبارت از ست $x=R/\left\{\sqrt{2}-\sqrt{2}\right\}$ میباشد .

بـرای ایـن کـار تـرادف $x_n \in x$ ، $n=1,2.....$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ را در نظـر میگیـریم ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+x_n+1}{x_n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n^2}}{1-\frac{2}{x_n^2}}$$

$$=\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}}{1-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{x_n^2}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-2}=1$$

تمرین 5 : ثبوت نمایید که لیمت $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ موجود نیست .

و لیمت $\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ موجود است .

تعریـــف 3 : فرضـــاً $f : X \to / R$ داده شـــده ، لیمـــت در نقطـــه x_0 فشـــرده f_E

$E \subset X$, $F_E : E \to \mathbb{R}$ باشد ، تابع f دریک نقطه از ست E مفهوم جدید نیست .

این تعریف مختصر لیمت تابع است که عبارت از فشردگی در بعضی ست های داده شده E میباشد .

اکثراً برای ارائه لیمت برحسب E به عوض $x \in E$ برای کوتاه نمودن از دیگر علایم که دارای مفهوم واضح باشد ، استفاده میشود .

بطور مثال در صورتیکه $E = x / \{x_0\}$ نوشته میشود :

$$\lim_{x\to x\neq x_0} f(x)$$

مفهوم لیمت تابع بر حسب ست در نقطه x_0 تنها برای محتوی ست E عبارت از نقطه مماس آن میباشد . (در این حالت آن عبارت از نقطه دقیق مماسي میباشد)ودرتعریف 3 ازآن استفاده میگرددبصورت خلاصه میتوان گفت که مفهوم لیمت تابع در تعریف 1 عبارت از لیمت آن در نقطه x_0 برحسب تمام ست X ها تابع f تعریف شده است .

یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in x}} f(x)$$

در این حالت اگر تابع f در بعضی فرمول ها تحت لیمت $\lim_{x\to x_0} f(x)$ داده شده باشد ، لیمت این تابع در نقطه x_0 درتمام قیمت ست X پیدا میشود ، زیراکه توسط فرمول هذاکه

بــه مفهـوم لیمــت ایــن تــابع بــوده اجــرای عملیــه هــا حســابی بــالای اعــدادحقیقی صــورت میگیرد.(مراجعه شودبه. پراگراف 5.2) .

مثال 4 : فرضاً تابع f دریچلی(مراجعه شود به . پراگراف 5.2) در آنصورت قیمت تـابع برابر به 1 است و در ست Q تمام اعداد نـاطق و صفر است . در ست I تمام اعداد غیر ناطق است و در نقطه $x_0 = 0$ که لیمت آن بر حسب ست اعداد غیر ناطق برابر به (1) است ، یعنی :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Q}} f(x) = 1$$

و بر حسب ست اعداد غیر ناطق برابر به صفر است یعنی:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x) = 0$$

بر حسب تعریف ست توابع دربچلی ، لیمت آن در نقطه $x_0 = 0$ موجود نیست .

و نیز همین قسم موجودیت و ناموجودیت لیمت ترادف $\{f(x_n)\}$ در صورتیکه $n \to \infty$ مربوط به انتخاب ترادف داده شده $\{x_n\}$ که به صفر تقرب میکند می باشد .

لیما 1 : هرگاه $f : x \to / R$ ، $E \subset x$ و x_0 نقطه مماس ست E و تـابع f در نقطـه x_0 دارای لیمت $\lim f(x)$ باشد (در اینصورت لیمت بر حسب ست x) و مفهوم هر دو لمیت برابر به :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \ldots (5.10)$$

ثبوت : اگر بـرای هر تـرادف $x_n \in x$ ، $n = 1,2.....$ باشـد ، پس $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. و تمام ترادف ها $\{f(x_n)\}$ دارای یک لمیت a میباشد . این یک حقیقت واضح است و بـرای هر

ترادف $x_n \in X$ طوریکه $n=1,2.....$ باشد $\lim\limits_{n \to x_0} x_n = x_0$ به همین قسم $E \subset x$ ثبوت شد .

تعریف 4 : حذف حول نقطه x_0 بنام ستیکه دور از حول نقطـه x_0 حاصل شود بنـام نقطـه محذوف می نامند .

$$U^{\circ}(x_0) \underline{\underline{def}} \cup(x_0) \setminus \{x_0\} ....(5.11)$$

حذف ε حول نقطه x_0 را چنین نشان میدهند : $U^{\circ}(x_0, \varepsilon)$

مثـال 5 : تـابع $f(x) = |signx|$ را مـورد بررسـی قـرار میدهیم (تعریـف تـابع $signx$. س.م. پراگراف 5.2) دیده شود . گراف این تابع در شکل 22 نمایش داده شده است .

اگر حوالی $U^{\circ}(0)$ نظر به این تـابع $(signx)$ در نقطـه $x_0 = 0$ باشد ، واضح است کـه لیمت این تابع بر حسب حذف حوال $U^{\circ}(0)$ میباشد . یعنی :

$$\lim |signx| = 1$$
$$x \to 0$$
$$x \in v(0)$$

اگر به عوض لیمت تـابع $\lim |signx|$ بر حسب تمام حوال $V(0)$ در نقطـه $x_0 = 0$ تـابع $|signx|$ لیمت ندارد .

بطور مثال : برای ترادف $= n2$ $\frac{1}{n}R$ $x_n =$ $R = 1,2..,$ داریم که $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

اگر $0 \quad R \quad 2$

در نتیجه تمام حدود این ترادف که در حوال $V\left(0\right)$ داده شده واقع شده است ، آغاز یافته است . بنابرین ترادف $|signx|$ لیمت ندارد .

مثالهای 4و 5 نشان میدهد که یک تابع میتواند در یک ست در بعضی نقاط دارای لیمت باشد و در دیگر ست ها در عین نقاط دارای لمیت نباشد . و یا شاید لیمت داشته باشد ، ولی به قسم دیگر باشد .

تبصره 2 : اگر توابع f و g در بعضی حوال $U\left(0\right)$ نقطه x_0 تعریف شده باشد ، اما در نقطه x_0 تعریف نشده باشد ، پس در اینصورت میتواند در هر x حوال محذوف $U^{\circ}\left(x_0\right)$ واقع باشد ، آنها یک قیمت مساوی به خود میگیرند .

اگر $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ پس در آنصورت وقتیکه لیمت آنها بر حسب حوال محذوف $U^{\circ}\left(x_0\right)$ همزمان موجود شود (یا نشود) . اگر لمیت داشته باشند بین خود برابر اند . یعنی :

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in V^{\circ}\left(x_0\right)}} f\left(x\right) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in V^{\circ}\left(x_0\right)}} g\left(x\right)$$

یا در تعریف آنها تنها قیمت لیمت تابع در نقطه حوال $U^{\circ}\left(x_0\right)$ محذوف شامل میباشد .

در این تبصره مختصراً اصول مبهم $\frac{0}{0}$ توسط اختصار کسر در مثال ذیل واضح میسازیم :

مثال 6 : لمیت $\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x^2+x-1\right)x}{x_n^{\,2}-x}$ را دریافت مینماییم .

بحیث تحلیل محاسبه لیمت مثال 1 را تکرار مینماییم . از اینجا به افاده به شکل $\frac{0}{0}$ غیر معین

میرسیم که درین حالت ما جواب سوال را بدست آورده نمی توانیم .

راجع به موجودیت لیمت تابع (5.12) را بررسی می نمائیم :

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$$

$$g(x)=\frac{(2x^2+x-1)(x)}{x^2-x}$$

از تابع فوق حاصل میداریم که $g(x)$ تحت علامه لیمت قرار دارد . افاده (5.12) قسمت

اول این تابع را به x اختصار مینمائیم پس توابع f و g به حوال $U^{\circ}(0,1)=(-1,1)\setminus\{x_0\}$

نقطه $x_0=0$ مطابقت میکند . به این خاطر طبق تبصره فوق همزمان درین نقطه محذوف

لیمت دارد و یا ندارد . در حالت موجودیت لمیت این لمیت ها برابر است . از مثال 1 معلوم

است که $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ و نیز در تمام ساحه مساوی میباشد .

معینیت تابع f و ست فرعی $V^{\circ}(0,1)$ این لمیت ها برابر است . یعنی :

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in V^{\circ}(0,1)}} g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in V^{\circ}(0,1)}} f(x)$$

(در مساوات اول به علت اینکه آنها به اساس خواص مقامی تابع بدست آمده صادق میباشد)

مبحث فوق اساس محاسبه بوده و در نوشته بکار برده میشود و بشکل ذیل مینویسیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2+x-1)(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=1$$

تبصره 3 : حالت خصوصی لیمت توابع (متناهی ، یا بی نهایت) عبارت از لیمت ترادف (متناهی ، یا بی نهایت) میباشد . حقیقتاً ترادف $x_n \in x$ ، $n = 1,2.....$ عبارت از تابع تعریف شده در ست اعداد طبیعی $f : N \to R$ ، طوریکه $f(n) = (x_n)$ ، $n = 1,2.....$ به اساس تعریف قبلی لیمت ترادف $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (مراجعه نمائید به : تعریف 1 در پراگراف 4.1).

و تعریف حالت خصوصی لیمت این تابع عیناً به تعریف لمیت تابع $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ یکسان است.(مراجعه نمائید به: تعریف 1 این بخش) ، زیراکه اگر ترادف $\{x_n\}$ داری لیمت (متناهی ، یا بی نهایت) باشد ، پس به اساس تعریف 1 پراگراف 4.1 انتخاب هر ترادف اعداد طبیعی $\{n_R\}$ طوریکه $\lim\limits_{n\to\infty} n_R = +\infty$ ، ترادف $\{x_{nR}\}$ دارای عینی لمیت بود ه که ترادف $\{x_n\}$ آنرا در خود دارد.(مراجعه نمائید به: لیما در پراگراف 4.3)

5.5 توابع متمادی :

در صورت مطالعه لمیت تابع $f:X\to R$ طوریکه $x_0\to x_0$ میتوانند چنین واقع شود که $x_0\in X$ (در اینصورت x_0 عبارت از عدد $x_0\in R$) .

یا برعکس ، $x_0\notin x$. حالت $x_0\in X$ بسیار جالب است ، زیراکه در نظر گرفتن آن به مفهوم بسیار مهم توابع متمادی میرسیم .

مطالعه این توابع با ثبوت لیما ذیل آغاز مینماییم .

لیما 2 : فرضا $f:X\to R$ و $x_0\in X$ باشد ، برای اینکه تابع f در نقطه x_0 دارای لیمت باشد لازم و کافی است تا $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)...\left(5.13\right)$.

ثبوت : شرایط کافی (5.13) برای موجودیت لیمت تابع f در نقطه x_0 واضح است این شرایط نه تنها موجودیت لیمت را تائید میکند ، بلکه قیمت آنرا که برابر به $f\left(x_0\right)$ است نیز دریافت میکند .

شرایط لازمی (5.13) برای موجودیت لیمت تابع f در نقطه x_0 ثبوت مینماییم فرضاً تابع f در نقطه x_0 دارای لیمت a باشد .

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=a.....\left(5.14\right).$$

طبق تعریف لیمت برای هر ترادف $x_n\in x$ ، $n=1,2.....$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ و به اساس مساوات 1 داریم :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=a........\left(5.15\right)$$

در خصوص قیمت $x_0 \in x$ این مساوات برای ترادف ثابت که متشکل از یک نقطه x_0 باشد صادق است . پس در اینصورت برای ترادف ثابت $x_n = x_0$ ، $n = 1,2.....$ حالت (5.15) دارای شکل ذیل میباشد :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_0\right) = a...(5.16)$$

از طرف دیگر چون لیمت یک تابع ثابت برابر است به خود ثابت ، پس در اینصورت :

$$\lim f\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)...(5.17)$$

به اساس مساوات (5.16) و (5.17) داریم $f\left(x_0\right) = a$. □

تعریف 5 : تابع $f : X \to R$ در نقطه $x_0 \in X$ متمادی نامیده میشود .

اگر $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)...(5.18)$ باشد .

شرط (5.18) به این معنی که حالت متمادیت تابع در نقطه x_0 به آسانی دریافت میگردد و مطابق لیما 2 ، شرط (5.18) مساوی است .

زیراکه $f : X \to R$ در نقطه x_0 دارای لیمت بوده و $x_0 \in X$ میباشد .

طبیعی است که دراین حالت وقتیکه برای تابع $f : X \to R$ لیمت $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)$ برابر به یکی از بی نهایت $\infty, +\infty, -\infty$ شود ، در اینصورت $x_0 \notin x$ میباشد . و در حالت بر عکس برای ترادف ثابت $x_n = x_0$ ، $n = 1,2.....$ بجا خواهد بود که:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)$$

همینطور بر حسب شرایط تابع f تنها قیمت عددی میگیرد که خلاف فرضیه لیمت متناهی $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)$ میباشد .

قابل تذکر است که اگر تابع در یک تعداد نقاط دارای لیمت بی نهایت باشد ، در اینصورت تابع غیر متمادی است .

در اخیر یاد آور میشویم که در تعریف 5 نقطه x_0 که درآن مفهوم متمادیت تابع تعریف شده ، حرف متعلق به مستقیم عددی R است ، بنابراین نقطه بی نهایت دور محاسبه نمیشود و برای تطبیق مفاهیم انالیز متمادیت تابع در نقطه ، و نقاط لیمتی ست تعریف جداگانه داده شده است .

تعریف 6 : نقطه $x_0 \in X$ بنام نقطه $x \subset R$ مینامند ، هرگاه در حوالی $U\left(x_0\right)$ این نقطه موجود شود و مقطع $U\left(x_0\right)\bigcap x$ با ست x تنها در یک نقطه x_0 تشکیل گردد ، یعنی:

$$U\left(x_0\right)\bigcap x=\left\{x_0\right\}...(5.19)$$

قابل تذکر است که تمام نقاط ست اعداد طبیعی N گسستی بوده ، اما ست Q تمام اعداد ناطق بصورت عموم دارای نقاط جداگانه نمیباشند .

تعریف 7: نقطه $x_0 \in R$ بنام نقطه لیمت ست $x \subset R$ یاد میشود ، هرگاه در حوالی این ست با تفاوت این نقطه ، نقطه دیگر متعلق به ست x موجود شود ، یا به عبارت دیگر نقطه x_0 بنام نقطه لیمت ست x مینامند .

اگر تمام حوال محذوف این نقطه با این ست غیر خالی تشکیل مقطع نماید ، برای هر حوال محذوف $U^{\circ}\left(x_0\right)$ شرط $U^{\circ}\left(x_0\right)\bigcap x \neq \phi$ صادق است .

قابل تذکراست که نقطه لیمتی ست میتواند در خود ست واقع باشد و یا واقع نباشد.

بطور مثال هر نقطه قطعه $\left[ai,b\right]$ عبارت از لیمت نقطه در انتروال $\left(a,b\right)$ میباشد که دراینجا نقطه a و b در انتروال متذکره واقع نیست ، اما نقاط باقیمانده درین انتروال واقع اند.

اگر نقطه متعلق به ست باشد ، پس در آنصورت به اساس تعریف 6 و 7 این نقطه عبارت از نقطه جداگانه ست میباشد .

هر نقطه مماس x_0 ست عبارت از نقطه جداگانه این ست میباشد ، یا نقطه لیمتی این ست میباشد . یا همینطور در هر حوال کیفی ست ، دارای نقطه میباشد ، که از نقطه x_0 فرق دارد. (در این صورت نقطه x_0 نقطه لیمتی است)

و یا ه حوال x_0 موجود میشود یا موجود نمیشود و یا به ست نقطه x_0 مطابقت ندارد . در نتیجه برای اینکه این حوال دارای تمام نقاط ست باشد .

پس (به همان اندازه نقطه x_0 بر حسب شرایط عبارت از نقطه مماس این ست) بوده میتواند . و این نقطه را به x_0 نشان میدهد . همینطور در اول نقطه x_0 متعلق به ست را بررررسی مینماییم و ثانیاً بطور نقطه جداگانه مورد بررسی قرار میدهیم .

لیما 3 : هر تابع متمادی در هر نقطه ست تعریف جداگانه دارد .

ثبوت : فرضاً x_0 نقطه جداگانه ست تعریف شده x تابع f باشد ، پس طبق تعریف 6 موجودیت $U(x_0)$ نقطه x_0 مقطع ست x در نقطه x_0 تشکیل مینماید که با ست x نقاط جداگانه را تشکیل میدهد ، پس در اینصورت $U(x_0)\bigcap x=\{x_0\}$ است .

اگر ترادف $x_n \in x$ ، $n=1,2.....$ و لمیت $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ موجود شود و برای حوال اشاره شده به علت تعریف لیمت ترادف چنان عدد n_0 موجود شود ، طوریکه برای تمام اعداد $n>n_0$ باشد و $x_n \in U(x_0)$ صادق باشد ، پس در نتیجه $x_n \in U(x_0)\bigcap x$ اما $U(x_0)\bigcap x=\{x_0\}$ است زیراکه برای هر $n>n_0$ داریم $x_n = x_0$ به این معنی که آغاز

بـه عـدد $n+1$ تـرادف $\{f(x_n)\}$ ثابـت بـاقی مانـده میشـود ، $f(x_n)=f(x_0)$ در صورتیکه $n>n_0$ پس در آنصورت لیمت موجود میشود یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$$

به اساس انتخاب اختیاری ترادف $x_n \in X$ ، $n=1,2.....$ لیمت $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ تطبیق شرط (5.18) ، پس در آنصورت متمادیت تابع f در نقطه x_0 ثبوت شد،متمادیت تابع در نقطه جداگانه نشان میدهد که در ریاضی نقطه عبارت از حالت خصوصی متمادیت میباشد $f(x)=1+\sqrt{\lg\cos 2\pi x}$ متمادی میباشد (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.2) تنها برای قیمت عدد تام ارگومنت x تعریف شده است .

پس در آنصورت $x=0\pm1\pm2.....$ که برابر به 1 است . (نقاط باقیمانده که افاده تحت علامه جذر منفی است به همین خاطر تابع تعریف نشده است) گراف این تابع از نقاط جداگانه تشکیل گردیده است که :

$(0,1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,1)$, $(-2,1).....$ (مراجعه نمائید به: شکل 20)

از لیما 3 نتیجه میشود که سوال راجع به لیمت تابع در نقطه جداگانه ست توسط تعریف 7 حل گردیده است و برابر به $f(x_0)$ میباشد .

زیراکه مفهوم لیمت تابع (در خصوص متمادیت تابع) برای نقاط لیمتی ست تعریف ده تابع کم میباشد .

تمرین 6 : ثابت نمایید که تابع $f: X\to R$ در نقاط لیمتی $x_0 \in X$ ست x تنها و تنها وقتی متمادی است که :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in x\bigcap U(x_0)}} f(x)=f(x_0)$$

یقیناً که لیمت تابع در هر ست مربوط به ساحه معین آن میباشد ، زیراکه متمادیت تابع بـه ست مربوط میباشد .

تعریف 8 : فرضـاً $f:X\to R$ و $x_0\in E\subset x$ باشد تـابع f بنـام تـابع متمـادی در نقطـه x_0 بر حسب E یاد میشود .

$$\lim f_E(x)=f_E(x_0)$$

بطور مثال تابع دریچلی f (مراجعه نمائید به: مثال 4 در پراگراف 5.4) در نقطـه $x_0=0$ متمادی است و نیز بر حسب Q برای تمام اعداد ناطق متمادی است . طوریکه :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in Q}} f(x)=1=f(0)$$

و در ست هـای تمـام اعداد حقیقی متمـادی نیسـت ، همینطـور لیمت در $x_0=0$ نظر بـه ست تمام اعداد حقیقی تابع دریچلی موجود نیست . زیراکـه تـابع دریچلـی در هیچ یـک نقطـه محـور عددی متمادی نمي باشد .

تابع $f:X\to R$ در نقاطه $x_0\in X$ متمادی است ، به اساس تعریف 5 میتوان گفت که تـابع در این نقطه نظر به ست x متمادی است .

5.6 شرط موجودیت لیمت تابع

بـه اسـاس تعریف لیمـت ، تـابع $f:X\to R$ در نقاطـه x_0 دارای لیمـت میباشـد . اگـر چنـین تـرادف $x_n \to x_0$, $x_n \in x$, $n=1,2....$ باشـد ، تـرادف کـه بـه قیمـت تـابع $\{f(x_n)\}$ مطابقت مینماید دارای لیمت (متنـاهی ، بـی نهایت) میباشـد . ایـن لیمت مربـوط بـه انتخـاب ترادف $\{x_n\}$ نمیباشد . بنابراین تمام ترادف هـای $\{f(x_n)\}$ عیناً یـک لمیت a دارد . یعنـی $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$ میباشـد . بـرای هـر ایـن قیمت a عبـارت از لیمـت تـابع f در نقطـه x_0 میباشـد . بـرای هـر ترادف $\{f(x_n)\}$ یکسان نتیجه میشود و تمام لیمت ها بـه خـود تـابع f مطابقت میکند . در این حالت تابع f دارای لیمت در نقطه x_0 میباشد .

لیما 4 : برای اینکه تابع $f:X\to R$ دارای لیمت متناهی یا به علامـه مشخص بـی نهایت در نقطـه x_0 کـه عبـارت از نقطـه مماسـی ست x باشد لازم و کافیسـت کـه بـرای هـر تـرادف $x_n \to x_0$ طوریکه $x_n \in X$ ، $n=1,2.....$ باشد .

تـرادف کـه بـه قیمـت تـابع $\{f(x_n)\}$ مطابقـت میکنـد دارای لیمـت متنـاهی ، یـا بـه علامـه مشخص بی نهایت میباشد .

نتیجـه : بـرای اینکـه تـابع $f:X\to R$ دارای لیمـت متنـاهی در نقطـه x_0 کـه بنـام نقطـه مماسـی ست x یـاد میشـود ، باشـد لازم و کافیسـت کـه بـرای هـر تـرادف $x_n \to x_0$ طوریکـه $x_n \in X$ ، $n=1,2.....$ باشد . ترادف کـه بـه قیمت تـابع $\{f(x_n)\}$ مطابقت میکند متباعد است ، نیز دارای لیمت (متناهی ، یا بـی نهایت) در نقطـه x_0 و $x_m \in X$ ، $m=1,2.....$

میباشـــد ، زیـــرا کـــه مطـــابق فرضـــیه دارای لیمـــت $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right)$ و $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{''}\right)$ و

$\lim_{m\to\infty} f\left(x_n\right)$ میباشد .

چنانچه ترادف $\{f\left(x_n^{'}\right)\},\{f\left(x_n^{''}\right)\}$ از ترادف های فرعی ترادف $\{f\left(x_m\right)\}$

است. یا ترادف های $\{x_n^{'}\}$, $\{x_n^{''}\}$ عبارت از ترادف های فرعی ترادف $\{x_m\}$ میباشد

.

حال به یاد می آوریم ، اگر یکتعداد ترادف ها دارای لیمت (متناهی ، یا بی نهایت) باشد ،
پـس هر تـرادف فرعـی آن دارای عینـی لیمـت اسـت . (مراجعـه نمائیـد بـه : پراگـراف 4.3)
بنابرین :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right)=\lim_{m\to\infty} f\left(x_m\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{''}\right)=\lim_{m\to\infty} f\left(x_m\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right)=\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{''}\right)$$

از اینجـا بـه ایـن ترتیـب لیمـت هـای تـرادف $\{f\left(x_n\right)\}$ طوریکـه $x_n\to x_0$ و $x_n\in x$ ،

$n=1,2.....$ بـه انتخـاب تـرادف $\{x_n\}$ مربـوط نیسـت . ارائـه نمـودن قیمـت عمـومی لیمـت

ترادف $\{f\left(x_n\right)\}$ توسط a مطابق تعریف 1 پراگراف 5.4 خواهیم داشت $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$

که مستقیماً از لیما 4 به نتیجه رسیدیم . (بـه یاد مـی آوریم کـه اصطلاح « ترادف متقارب »
تنها برای ترادف هایکه دارای لیمت متناهی باشند استعمال میشود .

5.7 تعریف دوم لیمت تابع

برای لیمت تابع ، تعریف دیگر موجود است که در مفاهیم لیمت ترادف از آن استفاده نمي شود ، که در اصطلاح حوال ، فرمول بندی گردیده و بنام تعریف لیمت تابع کوشی یاد میشود . این تعریف با تعریف 1 که در پراگراف 5.4 است میباشد .

تعریف 9 : نقطه a بنام یکسان و مشابه لیمت تابع $f:X\to R$ یاد میشود ، در صورتیکه $x\to x_0$ (یا در نقطه x_0) باشد . اگر برای هر حوال $U(a)$ نقطه a موجود شود ، چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 میباشد ، یعنی :

$$f(x)\bigcap U(x_0)\subset U(a)...(5.20)$$

لیمت تابع بر حسب کوشی همینطور توسط $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ نشان میدهیم . طبیعی است که مفهوم لیمت تابع بر حسب کوشی مثل که قبلاً در پراگراف 5.4 صورت گرفته معادل به تعریف لیمت تابع میباشد . شکل 23 نمایش تعریف 9 میباشد طوریکه x_0 و a اعداد حقیقی و ست x حذف حوال نقطه x_0 باشد .

با استفاده از سمبول های منطقی تعریف را میتوان قرار ذیل نوشت :

$$\lim f(x)=a\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\bigcup(a)\exists U(x_0):f(x\cap U(x_0))\subset U(a).$$

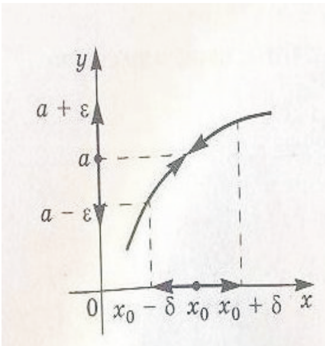
سمبول های منطقی فوق تعریف 9 مفصلاً از (5.20) نتیجه گیری شده است و تعریف 9 را میتوان به ترتیب ذیل فرمول بندی نمود .

نقطه a بنام لیمت تابع $f: X \to R$ یاد میشود درصورتیکه $x \to x_0$ طوریکه برای هر حوالی $U(a)$ نقطه a چنین $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که برای هر نقطه :

$$x \in X \cap U(x_0) \ldots (5.21)$$

از اینجا نتیجه میشود $f(x) \in U(a) \ldots (5.22)$. با استفاده از سمبول های منطقی این تعریف را میتوان چنین نوشت :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \bigcup(a) \exists U(x_0) \forall x \in x \cap U(x_0) : f(x) \in U(a) \ldots (5.23)$$



شکل 23

تعریف حوالی نقاط دور متناهی و بی نهایت را به یاد می آوریم . تعریف 9 در هر حالت تیوری غیر مساوات را تعمیم نمی بخشد . در اول به شکل ذیل تعریف لیمت متناهی در نقطه متناهی را فرمول بندی مینمائیم .

عدد a بنام لمیت تابع f در نقطه $x_0 \in R$ یاد میشود و اگر برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$[1] موجود شود که برای $x \in X$ ، $|x - x_0| < \delta$ غیر مساوات $|f(x) - a| < \varepsilon$ صدق نماید.

این تعریف را در سمبول های منطقی به ترتیب ذیل ملاحظه مینماییم :

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in x,\left|x-x_0\right|<\delta:\left|f\left(x\right)-a\right|<\varepsilon.$$

اگر تـابع f در نقطـه $x_0\in X\subset R$ و $a=f\left(x_0\right)$ متمـادی باشـد (دریـن حالـت x_0 و a عبارت از اعداد میباشد) پس تعریف متمادیت تابع به شکل سمبولیک قرار ذیل است :

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in x,\left|x-x_0\right|<\delta:\left|f\left(x\right)-a\right|<\varepsilon.$$

بطـور مثـال: تعریـف لمیـت بـی نهایـت غیـر مسـاوات را بـه یـاد مـی آوریـم و بـرای تـابع $f:X\to R$ مینویسیم : $\lim_{x\Rightarrow+\infty} f\left(x\right)=-\infty$

بـه ایـن معنـی کـه بـرای هـر $\varepsilon\rangle 0$ چنـین $\delta>0^1$ موجـود میشـود کـه بـرای هـر x شـرایط $x\in X,\ x>\delta$ تأمین گردد غیز مساوات $f\left(x\right)<-\varepsilon$ صـادق است . توسط سمبول هـای منطقی این تعریف را به ترتیب ذیل مینویسیم :

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in x,x>\delta:f\left(x\right)<-\varepsilon.$$

از رویت فوق نتیجه میشود که میتوان تـوأم (همزمـان) بـه دست یـابی بـه قیمت مختلفـه لمیت (متناهی ، یا بی نهایت) به متحول مستقل و غیر مستقل روبرو میشویم .

برای فرمول بندی تعریف لیمت تابع برای هر حالت جداگانـه از تعریف 9 استفاده میکنیم کـه در بر گیرنده ء تمام حالت دقیق و مشخص میباشد .

حال به مقایسه تعریف لمیت تابع برحسب(تعریف 1) و برحسب کوشی(تعریف 9) میپردازیم.

قضیه 1 : تعریف 1 و 9 لیمت تابع در نقطه مماس ست تعریف تابع معادل اند .

ثبوت : اول ثابت مینمائیم که اگر تابع در بعضی نقاط به اساس تعریف 1 دارای لیمت باشد ، پس این تابع نیز دارای لیمت خود درین نقطه میباشد . و به اساس تعریف 9 فرضاً $f : X \to R$ ، x_0 نقطه مماس ست x باشد . و $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ به اساس تعریف 1 نشان میدهیم که شرایط بخش اول فرمول (5.23) است .

فرض میکنیم که چنین نباشد ، پس در اینصورت داریم :

$$\exists U(a) \forall U(x_0) \exists x \in x \cap U(x_0) : f(x') \notin U(a) ......(5.24)$$

یا به عبارت دیگر چنین حوالی $U(a)$ نقطه a یافت میشود که در هر حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 دارای نقطه $x \in X$ میباشد که قیمت تابع $f(x)$ مربوط به حوال $U(a)$ نیست .

راجع به نقطه اشاره شده x برای هر حوال $U\left(o, \frac{1}{n}\right)$ یافت میشود که آنها را توسط x_n ارائه می کنند .

پس در اینصورت داریم که :

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right) ...(5.25)$$

$$n = 1,2....., f(x_n) \notin U(a), ...(5.26)$$

از شرط (5.25) نتیجه میشود که :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 ....(5.27)$$

(س.م. تبصره 1 پراگراف 4.2) ، طوریکه $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ پس به اساس تعریف 1 برای هر ترادف $x_n \to x_0$, $n = 1,2....$ مساوات $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$ بجا خواهد بود .

مطابق تعریف لمیت ترادف این معنی میدهد که برای هر حوال $U(a)$ چنین عدد n_0 موجود میباشد که برای هر $n\rangle n_0$ صدق میکند یعنی :

$$f(x)\in U(a)...(5.28)$$

که خلاف ادعا شرایط (5.26) میباشد . اختلاف نظر موجوده عمل ثبوت شده را تائید میکند .

.□

حال ثبوت میکنیم که اگر تابع در بعضی نقاط به اساس تعریف 9 دارای لیمت باشد ، پس در اینصورت به اساس تعریف 1 تابع این نقطه نیز دارای لمیت میباشد.

فرضاً $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)=a$ لیمت تابع $f:X\to R$ ، x_0 نقطه مماس ست x است .

و فرضاً $x_n\in X...(5.29)$ ، $n=1,2.....$ باشد ، در اینصورت

قیمت میباشد) و فشردگی تابع به مقطع هرحوالی نقطه x_0 با تعریف ست تابع داده شده مربوط نیست که در تعریف 9 به خوبی ملاحظه گردید .

اگر حوال $U_0\left(x_0\right)$ نقطه اختیاری x_0 فرض شود و به تعریف 9 افزوده شود .

شرايطي که در آن بوجود می آید برای هر حوال $U\left(x_0\right)$ موجودیت حوالی را تائید میکند .

یعنی : $U\left(x_0\right) \subset U_0\left(x_0\right)$ پس تعریف بدست آمده برابر به تعریف اول میباشد .

واقعاً اگر شرط (5.23) برای هر حوالی که ازین تشکیل میشود ، صادق است . در نتیجه یادآور میشویم که تابع در نقطه داده شده تحت لیمت معمولاً به مفهوم لمیت متناهی است . اگر این لیمت مشخص باشد ، توسط $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right)$ که درین صورت هیچ دوریت راجع به ست نیست که برحسب آن لمیت گرفته شود .

لیمت متناهی و یا بی نهایت در نقطه x_0 برحسب هر ست تعریف f ارائه میگردد .

تمرین 7 : ثبوت نمایید اگر پولینوم $P\left(x\right)$ به توان $n \geq 1$ باشد ، پس $\lim\limits_{x \to +\infty} P\left(x\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} P\left(x\right) = -\infty$ میباشد .

هدایت : برای تعین لیمت تابع در نقطه ، هم مانند قیمت ست آن ضرور است تا به آسانی تابع را عمومیت دهید و نیز تعریف ست مربوط به ست مورد بررسی اعداد حقیقی میباشد ، پس دراینصورت:

$$R^{'} = RU\left\{+\infty\right\}U\left\{-\infty\right\}$$

$$X \subset R^{'}, f : X \to R^{'}$$

خواننده در وقت ضرورت میتواند به اساس تعریف مستقلانه فرمولبندی نماید .

5.8 لیمت تابع برحسب اتحاد ست ها :

برای لمیت تابع برحسب اتحاد ست ها خواص مختصر ولی بسیار مفید در آینده ثبوت خواهیم کرد .

لیما 5 : فرضاً $f: X \to R$, $x_1 \subset X$, $x_2 \subset X$ و $x_1 \neq \phi$, $x_2 \neq \phi$ و نقطه x_0 عبارت از نقطه مماسی ست x_1 , x_2 باشد، پس تابع درین نقطه دارای عین لیمت میباشد که برحسب اتحاد ست میباشد .

ثبوت : اگر

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in x_2}} f(x) = a \ldots (5.31)$$

پس برای هرمجاورت $U(a)$ نقطه a چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که تصویر تقاطع آن ست $\left(x_1 \cap U(x_0), x_2 \cap U(x_0)\right)$ x x_1, x_2 در حوال $U(a)$ تشکیل میشود ، که در آنصورت تصویر اتحاد دو ست یعنی :

$\left(x_1 \cup x_2 \cap U(x_0)\right)$ بوده ، همین قسمت در حوال $U(a)$ تشکیل میشود ، به این معنی که :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in x\cup x_2}} f(x) = a \ . \square$$

مثال: اگر $\{x_n\}$ چنین ترادف که $\lim_{k\to\infty} x_2 k = \lim_{k\to\infty} x_2 k - 1 = a$ و a عدد حقیقی کیفی یا یکی از بی نهایت $\infty, +\infty, -\infty$ میباشد ، پس $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ که مستقیماً از لیما 5 نتیجه میشود .که اگر تابع $f(n) = x_n$ طوریکه $n \in N$ باشد ، با گذاشتن قیمت :

$$n = 1, 2 \ldots, x_1 = \{2k\} \ , \ x_2 = \{2k-1\}$$

5.9 لیمت های یکطرفه و متمادیت یکطرفه

در مطالعه توابع اکثراً بررسی فشردگی لیمت آنها در ست ها سفید واقع میشود . این ست ها را بنام ست های قسمی معین تابع داده شده یاد میشوند که به یکطرفه از نقطه که در آن لیمت بررسی میگردد ، واقع شده باشد . چنین لیمت ها را بنام لیمت های یکطرفه یاد میشوند .

واقعاً وقتیکه ست متذکره با یک طرف و یا طرف دیگر از نقطه x_0 که در آن نقطه لیمت بررسی میگردد موجود باشد ، درین حالت اگر نقطه x_0 یکی از بی نهایت $\infty,+\infty,-\infty$ باشد که چنین ممکن نیست . به این خاطر در اخیر میخواهیم فرض کنیم که x_0 عدد حقیقی میباشد ، طوریکه $x_0 \in R$ باشد . با معذرت برای نوشتن بعضی علامه ها را استخراج مینمایم .

برای تمام ست $x \subset R$ و برای $x_0 \in R$ داریم :

$$x<\left(x_0\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left\{x: X \in x, x \leq x_0\right\}.$$

$$x \geq \left(x_0\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left\{x: X \in x, x \geq x_0\right\}.$$

به عبارت دیگر ست $x \geq \left(x_0\right)$ مطابق $x<\left(x_0\right)$ عبارت از تقاطع ست x با شعاع بسته رؤس محوری عددی نقطه x_0 طوریکه به جهت مثبت (منفی) باشد یاد میشود .

تعریف 10: فرضاً $f: X \rightarrow R$ و $x_0 \in R$ باد نقطه a بنام لیمت چپ تابع f مطابق به طرف راست طوریکه $x \rightarrow x_0$ تابع f برحسب ست $x<\left(x_0\right)$ باشد . پس :

مطابق به ست $x>\left(x_0\right)$ پس داریم که :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in x\left\langle\left(x_0\right)\right.}} f\left(x_n\right)=a$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in x \rangle (x_0)}} f(x) = a$$

برای لیمت چپ و راست تابع f برحسب ست $x \setminus \{x_0\}$ دارای علامه مخصوص میباشد .

لیمت چپ به $f(x_0 - x)$ و یا $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ و لیمت راست به $f(x_0 + x)$ یا

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ نشان داده شده است . به این ترتیب :

$$f(x_0 - x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in x < (x_0) \setminus (x_0)}} f(x) \ldots (5.32)$$

$$f(x_0 - x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in x > (x_0) \setminus (x_0)}} f(x) \ldots (5.33)$$

اگر $x_0 = 0$ باشد ، پس به عوض 0+0 (0-0) در لمیت تابع درلیمت ترادف (س.م. پراگراف) مختصراً مینویسند 0+(0-) لیمت های چپ و راست بنام لیمت یکطرفه یاد میشود . اگر عین نقطه x_0 سرحد فوقانی برای ست $x < (x_0) \setminus \{x_0\}$ و سرحد تحتانی برای ست

$x > (x_0) \setminus \{x_0\}$ باشد(x ست معین تابع f) میباشد . و چنین مینویسند :

$$x_0 = \sup x \le (x_0) \setminus \{x_0\} = \inf (x) > (x_0) \setminus \{x_0\}.$$

پس لیمت معمولی تابع f در صورتیکه $x \to x_0$ نیز بنام لیمت دو طرفه یاد میشود . به عوض تعریف لیمت های یکطرفه بطور معین میتواند در حوالی یکطرفه استفاده نمود «مجاورت یکطرفه » نقاط تقاطع میتواند چنین نوشت :.

$$U(x_0) \cap \{X : X \ge 0\} \;,\; U(x_0) \cap \{X : X \le 0\}$$

و بعضی حوالی نقطه x_0 بنام حوال یکطرفه این نقطه یاد میشود . (طرف راست و طرف چپ) واضح است که تعریف لیمت یکطرفه تابع از تعریف لیمت تابع حاصل میگردد .

اگر در این حوالی نقطه x_0 که طبق حوال یکطرفه تغییر داده میشود ، خاطر نشان سازیم تقاطع آنها چنین است : $U^{\circ}(x_0)\bigcap\{X:X\geq X_0\}$

و $U^{\circ}(x_0)\bigcap\{X_0:X\leq X_0\}$ و $U^{\circ}(x_0)$ حوال محذوف نقطه x_0 است و بنام حوالی محذوف یکطرفه نیز یاد میشود . (طبق راست ، چپ) .

در خصوص مثال لیمت یکطرفه تابع $y=sign\,x$ (مراجعه نمائید به: مثال در پراگراف 5.2 و شکل 19)را مطالعه کنید . فرضاً $x_0>0$, $x_n'<0$, $n=1,2....,$ و $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0$ باشد پس $\lim\limits_{n\to\infty}sig\,x_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}signx_n'=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)=-1$ به این معنی که $\lim\limits_{x\to-0}sign\,x=-1,\lim\limits_{x\to0}sign\,x=1$ میباشد .

مفهوم لیمت چپ (راست) در صورتیکه $x\to x_0$ به اساس مفاهیم عمومی لیمت درنقطه در حالت داده شده ست $x<x_0$ (ست $(x>x_0)$ فقط تنها و تنها نقطه x_0 عبارت از مماس ست میباشد که لیمت آنرا میگیریم که هر یکی از این ست ها به یکطرف نقطه x_0 واقع است . به این خاطر این نقطه را بنام نقطه مماس ست ها یاد میکنند . و فقط $x_0=\sup x\leq(x_0)$ که مطابق به شکل $x_0=\inf x>(x_0)$ میباشد .

لیما 2 : تابع $f:X\to R$ دارای لمیت در نقطه :

$x_0=\sup x\leq(x_0)=\inf x\geq(x_0)$ طوریکه:

$x_0 \geq (x_0) \neq \phi, x_0 \leq (x_0) \neq \phi$ تنها و تنها وقتیکه در نقطه $y \,, f$ دارای لیمت چپ و راست بوده و برابر باشد ، در این حالت قیمت عمومی آنها عبارت از لمیت تابع در نقطه x_0 میباشد .

نتیجه :

برای اینکه y تابع $f: X \to R$ در نقطه x_0 لیمت دو طرفه بر حسب ست $x \setminus \{x_0\}$ داشته باشد لازم و کافی است تا لیمت های یکطرفه $f\left(x_0 + 0\right), f\left(x_0 - 0\right)$ موجود و بین خود برابر باشند .

ثبوت قضیه : در حقیقت فرضاً $f: X \to R$ طوریکه :

$x_0 = \sup x \leq (x_0) = \inf x \geq (x_0)$ و $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = a$ باشد ، پس داریم که تابع

ع $y \; f$ دارای لیمت برحسب ست x در نقطه x_0 میباشد ، مگر وقتیکه درین نقطه عین لیمت موجود شود y در فشردگی و برحسب هر ست باشد (مراجعه نمائید به: لیما1 در پراگراف 5.4) بر حسب خصوصیت که ست $x > (x_0)\, x < (\;_0)$ دارد . پس گفته میتوانیم که هر دو ست دارای لمیت یکطرفه بوده ، در صورتیکه $x \to x_0$ و برابر به a است . یعنی :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in x < (x_0)}} f(x) \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in x > (x_0)}} f(x) = a$$

فرضاً بر عکس در نقطه $x_0 = \sup x < (x_0) = \inf x > (x_0)$ شرط (5.34) صادق است ،

در اینصورت مثل $x = x < (x_0) \cup x > (x_0)$ پس لیما 5 دارای لیمت $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in x}} f(x) = a$

میباشد .

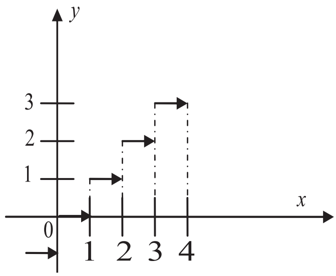
برای اینکه به تطبیق نتیجه معتقد شد ، کافیست تا قضیه 2 را با فشردگی تابع $f : X \to R$

در ست $x \setminus \{x_0\}$ بکار برده شود □ .

اگر یکی از لیمت های یکطرفه تابع در بعضی نقاط به قیمت تابع درین نقطه مطابقت کند ،

پس چنین تابع بنام یکطرفه متمادی در نقطه مورد بررسی میباشد .

تعریف فوق بصورت بسیار مطمین فرمول بندی میگردد .



شکل 24

تعریف 11 : تابع $f : X \to R$ بنام متمادی چپ (به راست) در نقطه $x_0 \in X$ مینامند .

اگر $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in x < (x_0)}} f(x) = f(x_0)$ مطابقت کند.

مثال : تابعي که در تمام محور عددی معین و برابر باشد ، برای هر عدد حقیقی x بزرگتر از

عدد تام و کوچکتر یا برابر به x را بررسی مینمائیم .

این تابع دارای ارائه مخصوص $y = [x]$ میباشد و چنین خوانده میشود :

« y عدد تام قسمی x است » یا « y برابر داخل x » است .

به این ترتیب $n+1>x$, $n\le x$, $[x]=n\in Z$ باشد .

گراف تابع $[x]$ در شکل 24 ترسیم گردیده است ، تابع $[x]$ در عدد تام نقطه x_0 محور عدد متمادی راست و مساوی به چپ بوده و نیز در تمام نقاط آن متمادی است . مثل که لیمت راست است همین قسم چپ است . به این ترتیب در خصوصیت تابع $[x]$ در تمام نقاط محور عددی متمادی راست است .

تبصره : اگر برای تابع $f:X\to R$ لیمت متناهی $\lim f(x)=a$ موجود شود پس برای تمام $x\in X$ متمادیت $f(x)<a$ (متمادیت $f(x)>a$ صادق است پس مینویسیم :

$\lim f(x)=a-0$ (مطابق $\lim f(x)=a+0$) درین حالت اگر $a=0$ باشد ، پس همین قسم تمام 0+0 و 0-0 مختصراً مینویسند 0+ و 0- .

5.10 خواص لیمت تابع :

تمام توابعي که درین بخش بررسی میگردد ، در بعضی ست های $x \subset R$ معنی میباشد و لیمت تمام آن نظر به ست x (در بعضی نقاط x_0 گرفته شود) بنام نقاط مماس آن یاد میشود .(متناهی ، بی نهایت دور) طوریکه عدد حقیقی $x_0 \in R$ باشد ، پس x_0 نقطه مماسی معمولی ست x میباشد .

اگر $x_0 = \infty$ باشد ، پس ست x محدود نیست . و اگر $x_0 = -\infty$ باشد ، پس ست x غیر محدود بالای (پائین) میباشد . خواص لیمت توابع قرار ذیل است :

1° **:** اگر تابع $f : X \to R$ در نقطه x_0 دارای لیمت متناهی باشد ، پس چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 یافت میشود که تابع f محدود در تقاطع $x \bigcap U(x_0)$ این حوال با ست x تابع f مشخص میباشد .

نتیجه : تابع $f : X \to R$ در نقطه $x_0 \in R$ متمادی محدود در تقاطع بعضی حوال این نقطه با ست x میباشد .

ثبوت : فرضاً $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ لیمت متناهی باشد ، در اینصورت مطابق تعریف 9 از پراگراف 5.7 برای هر $\varepsilon > 0$ بالخصوص برای $\varepsilon = 1$ چنین حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که $f\left(x \bigcap U(x_0)\right) \subset U(a,1)$ پس داریم : برای هر $x \in x \bigcap U(x_0)$ نتیجه $f(x) \in U(a,1)$ تطبیق میشود .

یا به عبارت دیگر برای تمام $x \in X \bigcap U(x_0)$ غیر مساوات $a-1 < f(x) < a+1$ صادق است ، که محدودیت تابع f در تقاطه $x \bigcap U(x_0)$ میباشد . □ .

با تائید ثبوت فوق مستقیماً به نتیجه رسیدیم و نیز متمادیت تابع در نقطه ، عبارت از حالت خاص موجودیت لیمت متناهی آن درنقطه میباشد .

2° : اگر تابع $f : X \to R$ در نقطه x_0 دارای لیمت متناهی $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$ که برابر به صفر نباشد ، پس برای هر عدد c طوریکه $0 < C < |a|$ باشد و چنین حوال (x_0) نقطه x_0 موجود شود که برای هر نقطه x_0 در ساحه تعریف x باشد .

پس در آنصورت برای تمام $x \in U(x_0) \bigcap x$ غیر مساوات $f(x) > C$ صادق است .

اگر $a > 0$ پس $f(x) < -C$ و اگر $a < 0$ باشد (5.36) .

نتیجه : (لیما راجع به نگهداشت علامه)

اگر تابع $f : X \to R$ در نقطه $x_0 \in R$ و $0 > (f(x_0) < 0) f(x_0)$ متمادی باشد و چنین حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که برای هر $x \in X \bigcap U(x_0)$ غیر مساوات $0 > (f(x_0) < 0) f(x_0)$ صادق باشد .

ثبوت : اول فرضاً $a > 0$, $0 < C < a$ و $\varepsilon > 0$ را طوری انتخاب میکنیم که $C < a - \varepsilon$ شود ، دراینصورت $(a - \varepsilon_i a + \varepsilon) = \bigcup(a, \varepsilon) \notin C$ میباشد ، پس برای حوالی $U(a_i \varepsilon)$ چنین حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 یافت میشود که برای نقطه $x \in U(x_0) \bigcap x$ نتیجه :

$f(x) \in (a - \varepsilon_i a + \varepsilon)$ و نیز $f(x) a - \varepsilon > c$ بجا خواهد بود .

بطور مشابه اگر $a < 0$ و $0 < C < -a$ باشد ، در اینصورت $a < -c$ پس $\varepsilon > 0$ را طوری انتخاب میکنیم که $a + \varepsilon < -c$ باشد دراینصورت :

$C \notin \bigcup(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon_i a+\varepsilon)$

و اگر برای حوال $U(a_i \varepsilon)$ چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که برای هر نقطه

$x \in U(x_0)\bigcap x$ تطبیق $f(x)\in(a-\varepsilon_i a+\varepsilon)$ ، بجا خواهد بود تا غیر مساوات

$-c<a+\varepsilon<-c$ $f(x)<a+\varepsilon<-c$ باشد که نتیجه مستقیماً از غیر مساوات (5.36) معلوم میشود .

□.

تبصره : اگر در نقطه x_0 به تابع $f: X \to R$ لیمت بی نهایت موجود شود که برابر به $\infty, +\infty, -\infty$ باشد ، پس برای هر $c>0$ بطور مشابه تائید خواص 2° بجا خواهد بود که این نتیجه مستقیماً از تعریف لیمت بی نهایت تابع گرفته شده است و در موضوع غیر مساوات چنین فرمول بندی شده است :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

به این معنی که برای هر $c>0$ چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود ، $(-\infty\ +\infty)$ شود پس برای تمام $x \in x \bigcap U(x_0)$ غیر مساوات $|f(x)|>c$ (طبق غیر مساوات $f(x)>c$ یا $(f(x)<-c)$ صادق است .

3° : اگر $f(x)=c$ ثابت باشد و $x \in x$ باشد ، پس $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.

4° : اگر $f(x)\geq a$ و $x \in x$ باشد و علامه معین لیمت متناهی یا بی نهایت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجود شود ، پس :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\geq a....(5.37)$$

5° : اگر $x \in X ,\ \varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ باشد و علامه معین لیمت های متناهی و بی

نهایت $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = a$ پس :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a..........(5.38)$$

6° : اگر لیمت متناهی $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ موجود شود . پس لیمت متناهی :

$\lim\limits_{x \to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ موجود میشوند . و اگر $\lim g(x) \neq 0$ باشد، پس خارج قسمت

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

به دلیلی که:

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).....(5.39)$$

و

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}..................(5.41)$$

نتیجه 1 : اگر لیمت متناهی $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ موجود شود . پس برای هر عدد $x \in R$ لیمت

$\lim\limits_{x \to x_0} c.f(x)$ موجود میشود به دلیلی که :

$$\lim c.f(x) = c.\lim f(x)...............5$$

$$\lim_{x \to x_0} c.f(x) = c.\lim_{x \to x_0} f(x)............(5.42)$$

اگر $c \neq 0$ باشد مساوات (5.42) برای لیمت بی نهایت با علامه معینی صادق است .

نتیجه 2 : اگر تابع f , g در نقطه $x_0 \in R$ متمادی باشد ، پس تابع $c\,.f$ (ثابت)

$f+g$, fg متمادی بوده و نیز اگر $g(x_0) \neq 0$ باشد ، پس تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه x_0

متمادی میباشد . خاطر نشان میسازیم که اگر تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در صورتیکه $g(x_0)=0$ باشد

، تابع دراین نقطه x غیر متمادی بوده و لیمت آن با علامه غیر معین میباشد و به اساس

خاصیت 2° از شرایط $\lim g(x) \neq 0$ نتیجه میشود که چنین حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 در

تقاطع با ست x غیر مساوات $g(x) \neq 0$ صادق است و نیز درین تقاطع خارج قسمت

$\frac{f(x)}{g(x)}$ معین است . به اساس فرمول (5.41) فشردگی تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ تحت لیمت در ست

$U(x_0) \cap x$ لیمت دانسته میشود .

به علت اینکه لیمت تابع در نقطه خاص مقامی میباشد (مراجعه نمائید به : پراگراف 5.4 و

5.7) و لیمت آن مربوط به انتخاب حوال $U(x_0)$ متذکره نمیباشد .

خواص $3^\circ - 6^\circ$ میتوانند ثبوت یکسان داشته باشند (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.9)

فرمول (5.40) را جهت معلومات بهتر ثبوت میکنیم .

فرضاً : $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, پس مطابق تعریف 1 لیمت تابع

(مراجعه نمائید به: پراگراف 5.4) برای هر ترادف

$x_n \in R$, $n = 1,2....$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ مساوات $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x_n)$, $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x_n)$

صادق است . به این خاطر بیاد می آوریم که حاصل ضرب لیمت ترادف متقارب موجود و

برابر به حاصل ضرب لیمت های آن (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.9) حاصل میداریم که لیمت موجود است و به شکل ذیل مینویسیم :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)g\left(x_n\right)=ab.......(5.43)$$

این لمیت مربوط به انتخاب ترادف متذکره $\left\{x_n\right\}$ نیست و همیشه مساوی به ab بوده و نیز طبق تعریف غیر مساوات (5.43) ثابت شده معنی میدهد . یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)g\left(x\right)=ab=\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\lim_{x\to x_0} g\left(x\right).\square$$

نتیجه 1 (به علت خاصیت 3°) حالت خصوصی فرمول (5.40) را از نتیجه 2° مستقیماً نتیجه 6° بدست آمده و متمادیت تابع در نقطه متذکره را مشخص میسازد . بطور مثال :

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)g\left(x\right)=\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)=f\left(x_0\right)g\left(x_0\right).......(5.44)$$ و نیز

لیمت های $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)$, $\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)$ به علت متمادیت تابع f , g در نقطه x_0 طبق مساوات $f\left(x_0\right)$, $g\left(x_0\right)$ مساوات (5.44) صادق است . یعنی متمادیت حاصل ضرب توابع $g.f$ در نقطه x_0 معنی میدهد . $\square$.

خاطر نشان میسازیم که ثبوت اجرا شده نتیجه 2 بوده و نیز متمادیت تابع درین نقطه صورت نمیگیرد .(مراجعه نمائید به: پراگراف 5.5) و این نقطه در ست داده شده تابع واقع است . تابع درین نقطه ست دارای لیمت میباشد به همان اندازه که تابع f , g در نقطه داده شده x_0 داشته باشد .

واضـــح اســـت توابـــع $f\left(x\right)+g\left(x\right)$, $f\left(x\right)g\left(x\right)$ و تـــابع $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ در صـــورتیکه

$g\left(x_0\right)\neq 0$ درین نقطه داده شده است . به علت خاصیت 6° تـابع متذکره دارای لمیت در نقطه x_0 که واقع به ست داده شده است میباشد که معنی متمادیت تابع درین نقطـه را میدهد .

بـه عبـارت دیگـر تائیـد نتیجـه 2° و تائید نتیجـه 6° حالـت مخصـوص ایـن تائیـد اسـت ، پـس درینصورت نقطه که در آن لیمت تابع بررسی میگردد در واقع به ساحه داده شده تابع میباشد

5.11 تابع بی نهایت کوچک و بی نهایت بزرگ

دراین بخش میتـوان تمـام بررسـی توابـع در سـت $x\subset R$ معین فرض شـود و لیمـت هـای متنـاهی و بـی نهایـت آنهـا را نظـر بـه ارگومنـت در نقطـه x_0 متنـاهی و بـی نهایـت دور را بررسی کرد.

تعریـــف 12 : تـــابع $\alpha : x\rightarrow R$ را بنـــام تـــابع بـــی نهایـــت کوچـــک یـــاد میکننـــد ، در صورتیکه $x\rightarrow x_0$ کند وچنین ارائه میگردد: $\lim\limits_{x\rightarrow x_0}\alpha\left(x\right)=0.......\left(5.45\right)$

تـابع بـی نهایت کوچـک در عرصـه ء تمـام توابـع کـه دارای لمیت باشد رول خاصـی را بـازی میکند . خصوصیت این تابع بصورت عمومی اینسـت کـه لیمت تـابع متنـاهی میتوانـد معلومـات خوبی جهت دست یابی بـه مفاهیم تـابع بـی نهایت باشد و تائید آنرا بـه شـکل لیمـا ذیـلاً فرمـول بندی مینماییم :

لیما 6 : لیمت متناهی $\lim_{x \to x_0} f(x)$ وقتی موجود و مساوی است که تنها و تنها فقط

$f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in x$ باشد و تابع $a = \alpha$ بی نهایت کوچک در صورتیکه

$x \to x_0$ موجود باشد .

ثبوت : اگر $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ باشد پس $\alpha(x) = f(x) - a$, $x \in x$ باشد

درینصورت حاصل میداریم که :

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - a = a - a = 0$$

برعکس اگر $f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in x$ شود و $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ پس :

$$\lim f(x) = a + \lim \alpha(x) = a. \square$$

قضیه 3 : حاصل جمع و حاصل ضرب عدد متناهی و بی نهایت کوچک در صورتیکه $x \to x_0$ و نیز حاصل ضرب بی نهایت کوچک در صورتیکه $x \to x_0$ یاد میشود .

ثبوت : هرگاه حاصل جمع و حاصل ضرب عدد متناهی ، بی نهایت کوچک ها عبارت از بی نهایت کوچک باشد ، پس دراینصورت مستقیماً به اساس یکی از خواص حاصل جمع و حاصل ضرب لیمت تابع (مراجعه نمائید به : خاصیت 6 در پراگراف 5.10) نتیجه بدست آمده است .

در حالت مخصوص وقتیکه لیمت های آن برابر به صفر میشود آخرین تایید قضیه را ثبوت میکنیم :

فرضاً $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $f(x)$ تـابع محـدود باشـد . و چنـین ثابـت $b\rangle 0$ موجـود شـود کـه بـرای هـر $x\in x$ x غیـر مسـاوات $|f(x)|\le b$ صـادق اسـت . کـه درایـن صـورت تـرادف $\{f(x_n)\}$ محدود است .

مگر حاصل ضرب ترادف بی نهایت کوچک در حالت داده شده ترادف $\{\alpha(x_n)\}$ و تـرادف محـدود در حالـت داده شـده $\{f(x_n)\}$ بنـام تـرادف بـی نهایـت کوچـک یـاد میشـود . (س.م. خاصیت 2° در پراگراف 4.8) به این اساس $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\alpha(x_n)=0$ و هیمن قسمت این حقیقت برای هر ترادف اشاره شده $\{x_n\}$ صادق است . پس درینصورت طبق عین تعریف لیمت تـابع حاصـل مینمـاییم: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\alpha(x)=0$ بـه ایـن معنـی کـه تـابع $f(x)\alpha(x)$ عبارت از بی نهایت کوچک میباشد در صورتیکه $x\to x_0$. □ .

هم قطار با بی نهایت کوچک در انالیز همیشـه تـابع بـی نهایت بزرگ نیز دیده میشود آنها را تعریف میکنیم :

تعریف 13 : تابع $f:x\to R$ بی نهایت بزرگ است در صورتیکه $x\to x_0$. یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha\cdots(5.46)$$

بین تابع بی نهایت بزرگ و بی نهایت کوچـک ارتبـاط نزدیـک موجـود اسـت ، کمیت معکـوس تابع بی نهایت بزرگ عبارت از تـابع بـی نهایـت کوچـک میباشـد و بـرعکس آن در زمینـه لیمـا ذیل را مطالعه مینماییم :

لیما 7 : اگر تابع $f : X \to R$ بی نهایت بزرگ باشد و $x \to x_0$ پس تابع $\frac{1}{f}$ عبارت از تابع بی نهایت کوچک میباشد ، در صورتیکه $x \to x_0$.

ثبوت : فرضاً $\varepsilon > 0$ اختیاری مشخص باشد ، پس طبق شرط $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود شود که برای تمام نقاط $x \in U(x_0) \cap X$ غیر مساوات $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$ به این معنی $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ پس ، در اینصورت داریم که تابع عبارت از بی نهایت کوچک میباشد . □ .

تبصره 1 : وقتیکه سخن راجع به خارج قسمت تابع با مخرج لیمت که خلاف صفر باشد به میان آید ، پس از افاده $\frac{1}{f(x)}$ چنین فهمیده میشود که خارج قسمت در تنگاتنگ تابع f در نقطه تقاطع $U(x_0) \cap X$ حوال $U(x_0)$ نقطه x_0 با ست x تابع f قرار دارد که برای تمام نقاط $x \in U(x_0) \cap X$ تابع f مساوی به صفر نمی باشد ، که موجودیت حوال $U(x_0)$ از خواص °2 لیمت های توابع (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.10) نتیجه شده است .

و بار دیگر برای حالت تابع بی نهایت بزرگ که در پروسه لیما 7 ثبوت شده است واضحاً از شرط $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$ استفاده نموده و به نتیجه میرسیم که $f(x) \neq 0$ است .

تبصره 2 : اگر بر عکس $\alpha(x)$ تابع بی نهایت کوچک در صورتیکه $x \to x_0$ داشته

باشیم ، پس میتواند چنین واقع شود که لیمت معکوس $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ در ست تعریف نشده باشد .

برای اینکه نقطه x_0 نقطه مماس باشد ، (بطور مثال این بجا خواهد بود که $\alpha(x) \equiv 0$ در

ست x) باشد ، که به این لحاظ مفهوم لیمت $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\alpha(x)}$ در صورتیکه $x \in x$ بی مفهوم

است . خلاصه اگر x_0 چنین ست فرعی ست x باشد که در آن $\alpha(x) \neq 0$

و $\{x : x \in x, \alpha(x) \neq 0\}$ = x_0 ، و اگر x_0 نقطه مماس ست x_0 پس تابع $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ در

x_0 تعریف شده است و دراین ست $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in x}} \dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty$ لذا دراین مفهوم میگویند که تابع بی

نهایت کوچک عبارت از بی نهایت بزرگ میباشد . تابع بی نهایت کوچک نظر به وضعیت مشخص عبارت از بی نهایت بزرگ میباشد و بر عکس برای ارائه نمودن آن ها از سمبول های طبیعی که همیشه مورد استفاده قرار میگیرند و برای اختصار برا ی هر عدد $a \rangle 0$ مینویسند:

$$\frac{a}{+0} = \infty, \frac{a}{-0} = -\infty \;{}_{i}\; \frac{+a}{0} = \infty$$

$$\frac{a}{+\infty} = +0 \;{}_{i}\; \frac{a}{-\infty} = -0, \frac{+a}{\alpha} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(5.47)$$

تبصره : در تابع بی نهایت بزرگ خواص لیمت متناهی راجع به عملیه حسابی بالای لیمت

(مراجعه نمائید به: خاصیت 6° در پراگراف 5.10)

بطور مستقیم بکار برده نمیشود ، زیراکه یک یا چند شباهت آن بجا خواهد بود نه همه ء آنها.

بطـــــور مثـــــال : اگـــــر $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ پـــــس

$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = +\infty$ راجع به موجودیت هر لیمت $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$

دراینجا به صورت عموم تایید کردن چیزی ضرور نیست .

میتوان نشان داد که تایید « مثبت » راجع به لمیت بی نهایت این حالت بجا خواهد بود و در فرمول های (5.47 در پراگراف 3.1) بعضی تعریف ها راجع به «عملیه حسابی » با بی نهایت ها تذکر به عمل آمده است .

5.12 اشکال مختلف متمادیت تابع دریک نقطه(چگونگی متمادیت تابع دریک نقطه)

شرط متمادیت تابع درنقطه X_0 به اساس (مراجعه نمائید به: (5.18)) قرارذیل اند:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

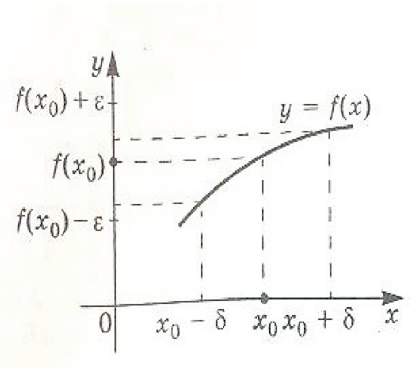
دراینجا تابع f درست x داده شده است ومیتواند مفهوم تعریف لیمت تابع برحسب گیني تصور نمود. (مراجعه نمائید به: تعریف 1 پراگراف 5.4) وهمین قسم به مفهوم تعریف کوشی (مراجعه نمائید به :تعریف9 درپراگراف 5.7) نیزمیتواند آنرا تصور نمود.

درحالت اول چنین معنی میدهد که برای هرترادف $x_n \in X$ $n = 1,2,3,....,$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 ....(5.48)$$

شرط ذیل تطبیق میشود.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)=f(x_0)............(5.49)$$



شکل 25

درحالت دوم این معنی را میدهد که برای هر $0<\xi$ چنین $0<\delta$ موجود میشود که برای تمام نقاط x شرط قبلی را تایید میکند.

یعنی : $x\in X, 0<\left|x-x_0\right|<\delta............(5.50)$ صدق میکند.

درشکل (25) غیرمساوات ذیل تطبیق میشود:

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon............(5.51)$$

مفاهیم متمادیت تابع درتیوری ترادف ها فورمول بناگردیده است.

(تعریف (5.48) و(5.49) شرایط خودرا منعکس میسازند).

اکثراً درپراکتیک (عمل) به محاسبه غیرمستقیم کمیت y روبرومیشویم که عبارت ازx است وچنین بنویسیم $y=f(x)$ وشناخت متمادیت تابع $y=f(x)$ درنقطه x_0 هدف مطمئین را میدهد وبه اساس متمادیت میتوان درنتیجه تجارب اندازه گیری، یا محاسبات همیشه چیزی دقیقتر را حاصل نماییم.

بطورمثال : اگرقیمت x_n $n=1,2,.....,$ به قیمت x_0 نزدیک شود بهمان اندازه نزدیکتر نظربه قیمت $y_n=f(x_n)$ به کمیت $y_o=f(x_0)$ نزدیک میشویم. تعریف (5.50) و(5.51) متمادیت تابع f درنقطه x_0 را نشان میدهد.

اگر کدام درجه دقت $\delta>0$ داده شده باشد وبرای قیمت تابع f چنین درجه دقیقتر $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ برای ارگومنت موجودشودکه به زودی ما قیمت ارگومنت مساوی به x_o بادرجه دقیقتر تا به δ را انتخاب کرده بتوانیم، پس به اساس شرط (5.50) قیمت تابع f(x) را دریافت میکنیم بنابرین قیمت تابع $f(x_o)$ بادرجه دقیقتررا حاصل میکنیم که درآنصورت غیرمساوات (5.51) را تطبیق مینماییم. این عقیده واقعاً درتعمیم تعریف (5.50 و 5.51) توضیح کننده تصورات واقعی راجع به متمادیت تابع میباشد ونیز متمادیت تابع درنقطه عبارت ازحالت خصوص موجودیت لیمت تابع میباشد. پس تعریف متمادیت تابع درنقطه ضروری میباشد.

به این ترتیب تابع f درست x تعریف شده درنقطه x_o متمادی است. اگر برای هرحوالی $v(y_0)$ نقطه $y=f(x_o)$ چنین حوالی $v(x_o)$ نقطه x_o موجود شود که نتیجه ذیل صادق باشد:

$$x_o \in X, f(v(x_o)\cap x)<vy_o ....(5.52)$$

بلاخره ثابت $f(x_o)$ در مساوات (5.18) را به طرف چپ میبریم وآنرا تحت علامه لیمت قرارمیدهیم . یاد آور میشویم که ارائه $x\to x_0$ درلیمت تابع مساوی به ارائه $x-x_0\to 0$ است.

(مراجعه نمائید به: پراگراف 5.4) ازاینجا حاصل میدارم که :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0........(5.53)$$

تفاضل $x-x_0$ بنام تزاید ارگومنت یاد میشود وتوسط Δx نشان داده میشود وتفاضل $f(x)-f(x_0)$ تزاید تـابع $y=f(x)$ میباشد. درمطابقت بـه تزاید داده شده ارگومنـت Δx وتـابع توسط Δy نشان داده میشود که به این ترتیب :

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0), x_0 \in X, x \in X, \Delta x = x - x_0 ....(5.54)$$

ازینجا مساوات (5.53) شکل ذیل را بخود میگیرد:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 ....(5.55)$$

بنـابراین متمادیت تـابع درنقطـه چنـین معنـی میدهد کـه تزایـدی بـی نهایت کوچـک ارگومنـت درمطابقت به تزاید بی نهایت کوچـک تـابع میباشد . اکثراً اوقات شرط متمادیت تـابع درنقطـه مفید واقـع میشـود ، زیراکـه اسـاس ایـن نقطـه دربررسـی کـه آن قیمـت تـابع برحسـب حـوالی محذوف میباشد.

لیما3 : اگـر لیمـت تـابع $\lim_{x \to x_0} f(x) = a ....(5.56)$ موجـود شـود وتـابع f درنقطـه x_0 تعریف شده باشد $x \in v^o(x_o) n x$ پس تـابع f درنقطـه x_o متمـادی است کـه اگـر وفقط اگـر $f(x_o)=a$ باشد.

ثبوت: اگر تابع f متمادی درنقطه x_o باشد ، پس دراینصورت شرط (5.13) صـادق است وبـه علـت $v^o(x_0) \cap x \subset X$ نتیجـه میشـود. وهمـین قسـم ازموجودیـت لیمـت برحسـب سـت موجودیت لیمت هرست کیفی وفرعی یعنی:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) ....(5.57)$$

$$x \in v^o(x_0) \cap x$$

از (5.56) و (5.57) نتیجه میشود که $f(x_0)=a$ فرضاً ، حال برعکس شرط $f(x_0)=a$ تطبیق میشود ونیز:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$x \in v^o(x_o) \cap x$$

ازاینجا داریم که: برای هرحوالی $v(f(x_0))$ نقطه $f(x_0)$ چنین حوالی $v(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که:

$$f(v^0(x_0) \cap x) \subset v(f(x_0)) ....(5.58)$$

مگر طوریکه دیده میشود $f(x_0) \in v(f(x_0))$ است.

زیراکه درحصه چپ (5.58) روش است ومیتواند حوالی محذوف $v^o(x_0)$ حوالی معمولی $v(x_0)$ را تغییردهد. $f(v(x_0) \cap x) \subset (f(x_0))$ به این معنی که تابع f درنقطه x_0 متمادی است.

مثال1: تابع $f(x)=c$ ، c ثابت است و تابع درتمام مستقیم عددی متمادی است ، درحقیقت برای هر $x_o \in R$ مساوات ذیل : $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_0} c = c = f(x_o)$ بجا خواهد بود.

2: تابع $f(x) = \dfrac{1}{x}$ درهرنقطه $x_o \neq 0$ متمادی است درحقیقت :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x_o} = -\frac{\Delta x_0}{(x_0+\Delta x)x_0}$$

ازاینجا درصورتیکه $x_o \neq 0$ باشد داریم که :

$$\lim_{\Delta x\to o}\Delta y=-\lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta x}{(x_o+\Delta x)x_0}=-\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)x_0}=\frac{-0}{{x_0}^2}=0$$

مساوات (5.52) درزمینه صادق است وچنین معنی میدهد که تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ درنقاط $x_o\neq 0$ متمادی است.

3: تابع $f(x)=|signx|$ (مراجعه نماید به) شکل 22) درنقطه $x_0=0$ متمادی نیست (مراجعه نماید به) مثال 5 درپراگراف 5.4)

تمرین 8: توضیح نمایید که باکدام درجه دقت کافی است تاقیمت ارگومنت تابع x^3 درنقطه داده شده x_0 داده شود تاقیمت تابع بادرجه دقیقتر داده شده $0<\varepsilon$ شود.

9: توضیح دهیدکه آیا تابع
$$f(x)=\begin{cases} \text{درصورتیکه} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_0\neq 0 \\ \text{درصورتیکه} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=0 \end{cases}$$
درنقطه $x_o=0$ متمادی است.

یادآوری: ما دقیقاً درمثالهای مفصل تعریفات تابع درقطعه خط که دارای انفصال باشد ، بررسی نمودیم ونیزدریافتیم انفصال ست متناهی (تابع $f(x)=signx$ درانتروال [-1,1] یک نقطه منفصل $x=0$ میباشد وهرانفصال نقاط ست به قطعه خط خود مطابقت می نماید(تابع دریچلی) وحال مثالي را تذکرمیدهیم که انفصال نقاط ست بی نهایت باشند (به تمام قطعه خط که درآن تابع داده شده باشد مطابقت نمیکند).

مثـال 4: فرضـاً تـابع f مسـاوی بـه $\frac{1}{n}$ طوریکـه $n \in N$ باشـد ودرهریکـی ازنقـاط نـاطق، کسر $r = \frac{m}{n}, n \neq 0$ قطعه خط $[0,1]$ مساوی به صفرنباشد.

$\frac{m}{n}$ کسرغیراختصار شونده ناطق وبرابر به صفر درتمام نقاط قطعه خط باقی می ماند ، پس درآن صورت صفردرتمام نقاط غیرناطق نیزصفراست.

این تابع بنام تابع ریمان[3] یاد میشود.

تـابع f درهرنقطـه کسـرناطق $r \neq 0$ منفصل میباشـد وهمینطـور بـرای هرنقطـه همـین تـابع ترادف اعداد غیرناطق ε_n ,......, $n = 1,2$ موجود میشود که به r تقرب میکند. برای اینکه طبق تعریـف تـابع ریمـان ، $f(\varepsilon_n) = 0$ باشـد، بایـد $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = r$, $\lim_{n\to\infty} f(\varepsilon_n) = 0 \neq f(r)$ پـس دراینصورت تابع ریمان درتمام نقاط $r \neq 0$ منفصل است ونیزمیتوان نشان دادکه درهرنقطـه غیرناطق ودر صفر تابع ریمان متمادی است.

فرضـاً : عـدد ε یـا صـفر یـا غیرنـاطق باشـد $\varepsilon > 0$ را اختیـار میگـریم وعـدد طبیعـی n را طوری که $\frac{1}{n} = \varepsilon$ باشد توسط δ نشان میدهیم ، فاصله ازنقطـه ε تابـه نزدیکترین ازعدد $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, ..., \frac{m-1}{m}$ طوریکه (m=1,2….,n) باشد انتخاب میکنم.

واضح است که $\delta > 0$ است ، زیراکه ε به یکی ازاعداد اشاره شده وسـت هـای متنـاهی آنها برابر نیست.

---

[3] ب. ریمان (1826-1866) ریاضیدان آلمانی

فرضاً : $|x-\varepsilon|<\delta$ و x عدد ناطق باشد ، پس درآنصورت کسرناطق غیراختصار شونده

$x=\frac{p}{q}$ ظهورمیکند ، دراین صورت طبق انتخاب δ غیرمساوات $q>n$ بجا خواهد

بود،زیراکه :

$$f(\varepsilon)=0, f(x)-f(\varepsilon)=\frac{1}{q}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

اگرهمین قسم $|x-\varepsilon|<\delta$ و x عدد غیرناطق باشد ، پس f(x)=0 و $|f(x)-f(\varepsilon)|<\delta$

است . به این معنی که تابع ریمان درنقطه متمادی است.

5.13 دسته بندی نقاط انفصال توابع

تعریف14: فرضاً تابع f در حوالی نقطه x_0 میتواند تعریف شود. ودرخود این نقطه تعریف نشده باشد . نقطه x_0 بنام نقطه انفصال تابع f یاد میشود اگر تابع f درنقطه x_0 تعریف نشده باشد ویا دراین نقطه تعریف شده باشد مگر دراین نقطه متمادی نباشد.

تمرین10: نقطه انفصال تابع را فورمول بندی نمایید.

تعریف15: اگر x_0 نقطه انفصال تابع f باشد ودارای لیمت یک طرفه[4] متناهی ذیل باشد:

---

[4] لیمت یکطرفه $f(x_0-0)$ و $f(x_0+0)$ برحسب ست گرفته میشود درخود نقطه موجود نیست.

$$f(x_o-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

ویا :

$$f(x_o+0)=\lim_{x\to x_o+0} f(x)$$

باشد ، پس نقطه x_0 بنام نقطه انفصال قسم اول میباشد.

کمیت $f(x_o+0)=f(x_o-0)$ را بنام تغییرفوری تابع f درنقطه x_0 یاد میشود. اگر تغییرفوری تابع f درنقطه انفصال x_0 برابر به صفر باشد ، پس دراین صورت داریم که $f(x_o+0)=f(x_o-0)$ که x_0 بنام نقطه برطرفی انفصال درین حالت نامیده میشود که دراین صورت داریم :

$$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)...(5.59)$$

که حقیقتاً درنقطه x_0 تابع متمادی را حاصل نمودیم.

اگر برای تابع $f:X\to R$ شرط (5.59) تطبیق شود پس تابع درنقطه x_0 متمادی است وداریم که :

$$x_2=\{x_o\}, x_1=x\setminus\{x_0\}$$

به علت قضیه 2 پراگراف 5.9 ازمساوات $f(x_o+0)=f(x_o-0)$ نتیجه میشود که درنقطه x_0 لیمت تابع برحسب ست x_1 موجود میشود به این خاطر طبق شرط (5.59) برابراست به $f(x_0)$

$$\lim_{\substack{x\to x_o\\ x\in x_1}} f(x)=f(x_o)$$

ازطرف دیگر لیمت تـابع f درصورتیکه $x \to x_0$ بـه یـک ست نقطـه ئـی $x_2 = \{x_0\}$ برابر

f(x$_o$) میباشد (لیمت ثابت مساوی به خود این ثابت میباشد).

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in x_2}} f(x) = f(x_o)$$

به علت لیما 5 پراگراف (5.8) درصورتیکه $x \to x_0$ تابع f برابر به f(x$_o$) برحسب ست :

$$x = x_1 \cup x_2$$
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

به این معنی که تابع f درنقطه x$_o$ متمادی است.

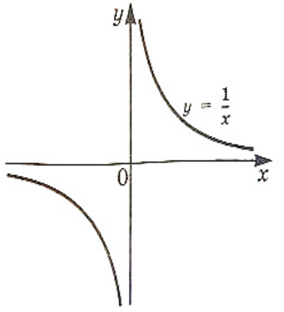
نقطـه انفصـال تـابع نقطـه انفصـال قسم اول شـمرده نمیشـود وازلیمـت $f(x)$ $\lim_{x \to x_o - 0}$ ویـا

$f(x)$ $\lim_{x \to x_o + 0}$ معلوم میشود که انفصال قسم دوم برحسب آخرین اندازه یکی از لیمت های

فوق میباشد ، که دراین جا بطور معمول لیمت متناهی لیمت فرعی ندارند، پس انفصال قسم دوم دقیق است.

تمرین 11: مفهوم تعریف نقطه انفصال قسم دوم تابع signx را به اساس (مراجعه نماید به) شکل 19 و $|signx|$ (مراجعه نمائید به: شکل 22) را فورمول بندی نمایید.

جـواب: تـابع فـوق درنقطـه x$_0$=0 دارای انفصـال قسـم اول میباشـد ، زیـرا کـه بـه $|signx|$ برطرفی انفصال بوده ، مگر تـابع $\frac{1}{x}$ (شـکل 21) و $\sin\frac{1}{x}$ (س.م) شـکل 21 درنقطـه x$_0$=0 دارای انفصال قسم دوم میباشد.



شکل 26

5.14 لیمت های توابع مونوتونی:

تعریف:16 تابع $X \subset R, f : x \to R$ باشد ، بنام متزاید (متناقص) درست x یاد میشود ، اگر برای $x_1 \in X$ و $x_2 \in X$ که $x_1 < x_2$ غیرمساوات $f(x_1) \le f(x_2)$ صدق کند.

"درمطابقت به**16** غیرمساوات $f(x_1) \ge f(x_2)$ " تابع متزاید شونده (متناقص شونده) همیشه بنام غیرمتناقص شونده (غیرمتزاید شونده) یاد میشود.

اگر تابع درست x متزاید شونده (متناقص شونده) باشد ، پس چنین میگویند که تابع در این ست تزاید میکند (تناقص میکند) اگرتابع f درست x متزاید شونده (متناقص شونده) باشد ، پس تابع f با تغییر علامه به تمام قیمت های آن حاصل میشود.

پس درآنصورت داریم که: $(-f)(x)\underline{\underline{def}}-f(x)$ ، $x \in X$ عبارت ازمتناقص شونده (متزاید شونده) درتابع x میباشد. پس تابع متزاید شونده (متناقص شونده) درست x بنام مونوتونی دراین ست یاد میشود.

قضیه4: فرضاً تابع $f:x \to R$ درست X تزاید میکند

$\beta=\sup X, \alpha=\inf X$ اگر $\beta \notin X, \alpha \notin X$ باشد پس تابع f درنقطه α دارای لیمت راست میباشد.

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\inf_{x\in X} \ f(x)$$

ودرنقطه β دارای لیمت چپ میباشد که $\lim_{x\to\beta} \ f(x)=\sup_{x\in X} \ (x)$ به این ترتیب اگر درشرایط قضیه های تابع f محدود بالای باشد ، پس درنقطه β تابع دارای لیمت متناهی چپ میباشد واگر f غیرمحدود بالای باشد ، پس:

$$\lim_{x\to\beta} \ f(x)=\sup_{x\in X} f(X)$$

بطورمشابه اگر تابع f ازپائین محدود باشد ، پس درنقطه α تابع دارای لیمت متناهی راست است واگر ازپائین غیرمحدود باشد ، پس $\lim_{x\to\alpha} \ f(x)=-\infty$ برای تابع متزاید شونده ممکن است لیمت های آنها را ازتابع f به تابع f– بدست آورد.

نتیجه: اگر تابع f درست x مونوتونی باشد ، طوریکه $x_0 \in R$ باشد اگر ست

$$X > (x_0) \overset{def}{=} \{x : x \in X, x > x_0 \text{ و } X < x_0 \overset{def}{=} \{x : x \in X, x < x_0\}$$

غیرخالی و x_0 عبارت ازنقطه مماس هرکدام این ست باشد، پس درنقطه x_0 لیمت های یک طرفه متناهی موجود میشود.

$$f(x_o - 0) = \sup_{X<(x_0)} f(x)$$

$$f(x_0 + 0) = \inf_{X>(x_0)} f(x)..............(5.60)$$

درصورتیکه تابع متزاید شونده باشد ، داریم که:

$$f(x_o - 0) \le f(x_0 + 0)................(5.61)$$

ودرحالت متناقص شونده داریم ، که :

$$f(x_o - 0) \ge f(x_0 + 0)................(5.62)$$

ثبوت قضیه: فرضاً $\beta = \sup x, b = \sup f(x) \le +\infty$ طوریکه $\beta \notin x$ درحوالی U(b) نقطه b داده شده باشد وفرضاً n انجام چپ آن ومعلوم باشد که η<b است به علت تعریف سرحد فوقانی برای آنها چنین نقطه $\varepsilon \in X$ موجود میشود که غیرمساوات:

$$f(\varepsilon) > \eta..................(5.63)$$

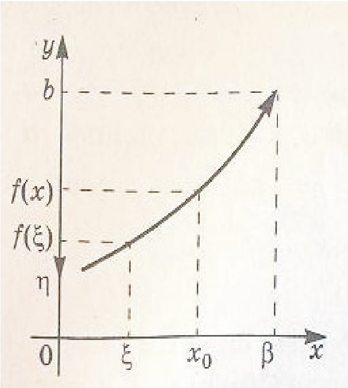
تطبیق میشود. به علت شرط $\varepsilon \in x$ چنانچه $\beta \notin x, \beta = \sup x$ داریم که $\beta < \varepsilon$ است.

حوال $U(\beta)$ توسط نقطه β نشان میدهیم که برای هریک ε عبارت ازانجام چپ میباشد.

(پس درآنصورت اگر β عبارت ازعدد حقیقی باشد ، پس انجام چپ انتروال $U(\beta,\varepsilon) = (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ طوریکه $\varepsilon = \beta - \varepsilon$ واگر $\beta = +\infty$ باشد ، پس انجام چپ انتروال بی نهایت $(\varepsilon, +\infty)$ میباشد ، پس درآنصورت برای هرنقطه:

$$x \in X \cap U(\beta) \ldots\ldots\ldots\ldots (5.64)$$

پس شکل 27 غیرمساوات $x > \varepsilon$ بجاخواهد بود.



شکل 27

همین قسم به علت تزاید تابع f وغیرمساوات $f(\varepsilon) \le f(x)$ شرط (5.64) تأمین میگردد که در آنصورت داریم:

$$\eta \underset{5,63}{<} f(x) \le \sup_X f(x) = b \ldots\ldots\ldots\ldots (5.65)$$

یاد آورمیشویم که نقطه η عبارت ازانجام چپ حوالی U(b) نقطه b بوده از(5.65) نتیجه میگیریم که $f(x) \in U(b)$ است ، به این ترتیب برای هر حوالی U(b) نقطه b چنین حوال U(b) نقطه β موجود میشود ، طوریکه تنها $x \in X \cap U(\beta)$ باشد ، پس نتیجه $f(x) \in U(b)$ تطبیق میشود ، به این معنی که $\lim_{n \to \beta} f(x) = b = \sup_X f(x)$ بطور مشابه ثبوت میشود که:

$$\lim_{n \to \alpha} f(x) = b = \inf_X f(x)$$

نتیجه ثبوت: فرضاً برای مشخص شدن تزاید تابع درست x که x_0 عبارت ازنقطه مماس ست هـــــای غیرخـــــالی $X>(x_o), X<(x_o)$ میباشـــــد ، درآنصـــــورت چنـــــان نقطـــــه $x'\in X<(x_o)$,$x''\in X>(x_o)$ موجـــــود میشـــــود کـــــه غیرمســـــاوات $f(x')\le f(x'')$ صادق است.

تابع f درست $x<(x_0)$ به عدد $f(x'')$ محدود بالای است ودرست $x>(x_0)$ بـه $f(x')$ محدود پائین است.

همین طور:

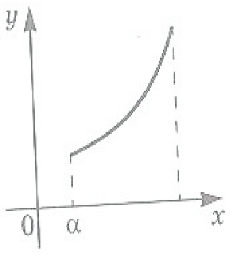
$$\sup_{x<x_0} f(x)\le f(x''),\qquad \inf_{x>x_0} f(x)\ge f(x')..................(5,66)$$

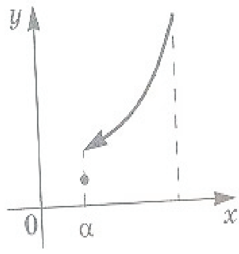
درخصوص اشاره سرحد فوقانی وتحتانی متناهی غیرمساوات (5.66) صادق است چنانچه برای هرنقطه $x''\in x>(x_o)$ صادق است ، به تغییرات این مساوات درحصه اول سرحد تحتانی وقیمت تابع درست $x>(x_0)$ حاصل می نمائیم:

$$\sup_{x<(x_o)} f(x)\le \inf_{x>(x_o)} f(x).................(5.67)$$

که غیرمساوات فوق منجربه ثبوت میشود . همین قسم طبق قضیه 4 لیمت های چپ $f(x_0-0)$ وراست $f(x_0+0)$ موجود میشود چنانچه :

$$f(x_0-0)=\sup_{x<(x_0)} f(x),\quad f(x_0+0)=\inf_{x>(x_0)} f(x)$$





شکل 28 شکل 29

که درینصورت غیرمساوات (5.61) با غیرمساوات (5.67) مطابقت میکند.

تبصره1: درقضیه 4 برای تابع متزاید شونده $f: x \to R$ حالت بررسی شده چنین است :

$$\inf(x) = \alpha \notin X \quad , \sup X = \beta \notin X$$

بطورمثال : اگر $\alpha \in X$ باشد ، پس همین طور برای تابع اختیاری (غیرمونوتونی) دراینجا دوحالت ممکن است:

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in X}} f(x)$$

چنین تابع f متمادی درنقطه α میباشد . (شکل 28)

ویا لیمت موجود نمیشود . شکل (29) شرایط مشابه برای نقطه β نیزبجا خواهد بود.

تبصره2: از ریاضی مقدماتی معلوم است که تابع $f(r)=a^r,\ a>0$…… ..(5.68)

r عدد ناطق ، است طوریکه $r \in Q$ درست تمام اعداد ناطق Q مونوتونی است (مراجعه نمائید به: پراگراف *2.6)

برای هر عدد حقیقی x ست غیرخالی $r<x$, $r>(x)$ که x عبارت ازنقطه مماس میباشد طبق

قضیه 4 برای هر عدد حقیقی x لیمت $a^r \lim_{r\to x-0}$, $a^r \lim_{r\to x+0}$, $r\in Q$ موجود میشود (برحسب

ست عدد ناطق Q که برای تابع نمائی ناطق معین است) درخصوص موجودیت لیمت های

متذکره برای $x=0$ طبق تعریف قیمت ها آنها برابر به قیمت مناسب لیمت ترادف های $a^{r}n$

میباشد وبه هرترادف ارگومنت $r_n<0$ و $r_n>0$ که به صفر تقرب میکند ، طوریکه $r_n \in Q$ و

$n=1,2,\ldots\ldots\ldots$ درتقسیم به $r_n=\frac{1}{n}$ و $r_n=-\frac{1}{n}$ ممکن است گرفته شود ، که برای آنها

این لیمت ها همین قسم محاسبه شده است (مر اجعه نمائید به :مثال 3 درپراگراف 4.9) پس

در اینصورت حاصل مینماییم که:

$$\lim_{r\to-0} a^r=\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}=1$$

$$\lim_{r\to+0} a^r=\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$$

پس درینصورت لیمت های یکطرفه تابع a^r طوریکه $r\in Q$ باشد درنقطه $r=0$ برابراست

وهمین قسم طبق نتیجه ازقضیه 2 پراگراف 5.9 دارای لیمت $\lim_{r\to 0, r\neq 0} a^r-1$ دوطرفه

میباشد وتابع a^r درصورتیکه $r=0$ شود قیمت آن $a^0=1$ مطابقت میکند که برحسب

(مراجعه نمائید به : لیما 3 درپراگراف 5.12) تابع درنقطه صفر متمادی است.

$$\lim_{r\to 0} a^r=a^0=1 \quad ,r\in Q, a\in R, a>0\ldots\ldots\ldots\ldots(5.69)$$

موجودیت این رابطه را میتوان درپراگراف 7.2 درتعریف تابع نمائی a^x برای هرعدد حقیقی $a>0,x$ باشد استفاده نمود . ازمثال داده شده معلوم میشود که مفاهیم لیمت برحسب ست به وضع شرایط بسیار ساده روبرو میشوند.

تبصره3: ازقضیه 4 نتیجه میشود که تمام توابع مونوتومی در انتروال متناهی (بی نهایت) میتواند تنها دارای نقطه انفصال قسم اول باشد که درآن صورت ست های آنها بی حساب نیست ، درحقیقت فرضاً برای مشخص شدن تابع $f:(a,b)\to R$ درانتروال (a, b) ، $-\infty\le a<b<+\infty$ متزاید باشد ، پس قبل از همه نتیجه قضیه 4 که تابع f درهرنقطه $x_0\in(a,b)$ دارای لیمت متناهی چپ $f(x_0-0)$ وراست $f(x_0+0)$ بوده وهمین طور میتواند دارای انفصال قسم اول باشد (تشخیص نقطه انفصال قسم اول .مراجعه نمائید به: پراگراف 5.13) که دراینصوت این لیمت ها نمیتوانند نقطه برطرفی انفصال باشد ، واقعاً اگر $x_0\in(a,b)$ باشد ، پس برای تمام $x'\in(a,x_0)$ و $x''\in(x_0,b)$ به علت تزاید تابع f غیرمساوات ذیل صادق است.

$$f(x')\le f(x_0)\le f(x'')$$

ازینجا

$$\sup_{(a,x_0)} f(x)\le f(x_0)\le \inf_{(a,x_0)} f(x)$$

در اینجا

$$(a,x_0)=\{x\in(a,b):x<x_0\}$$

و

$$(x_0,b)=\{x\in(a,b):x>x_0\}$$

که طبق (5.60) غیرمساوات حاصل شده ممکن است به شکل ذیل نیز نوشت:

$$f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0).........(5.70)$$

اگر x_0 نقطه برطرفی انفصال باشد ، پس درآنصورت غیرمساوات $f(x_0+0)=f(x_0-0)$ بجا خواهد بود.

پس بـه علـت (5.70) شـرط $f(x_0+0)=f(x_0-0)$ تطبیـق میشـود.(مراجعـه نمائـد بـه : پراگراف 5.9) این معنـی میدهد کـه متمادیت تـابع f درنقطـه x_0 وهمین قسم اگر x_0 نقطـه انفصـال تـابع f باشد ، پس دراینصـورت داریم کـه: $f(x_0-0)<f(x_0+0)$ وبـا هرنقطـه انفصـال تـابع f انتروال $f(x_0-0),f(x_0+0)$ را تحریر مـی نماییم ونشـان میدهیم کـه این انتروال تقـاطع نمیکنـد ، درحقیقت x_1 و x_2 دونقطـه انفصـال تـابع f باشد وبطـور مثـال $x_1<x_2$ باشد ، پس $f(x_0+0)<f(x_0-0)$ است.

به علت تزاید تابع f برای هر نقطه 'x و "x آنرا ثبوت میکنیم طوریکه: $x_1<x'<x''<x_2$ باشد غیرمسـاوات $f(x')\leq f(x'')$ صـادق اسـت . بـه اسـاس تغییرات لیمت دریـن غیرمسـاوات $x'\rightarrow x_1+0$ حاصـل میکنیم کـه $f(x_1+0)\leq f(x'')$ دراینجـا "x بـه x_2 بـه طـرف چـپ تقرب میکند $x''\rightarrow x_2-0$ درآنصورت خواهیم داشت که: $f(x_1+0)\leq f(x_2-0)$

پس میتوان گفت که انجام راست انتروال $f(x_1-0)$ و $f(x_1+0)$ ازانجام چپ انتروال بزرگ ، نیسـت یعنـی ($f(x_2-0),f(x_2+0)$) ازاینجـا واضـحاً بـه نتیجـه میرسیم کـه انتـروال هـای متذکره تقاطع نمیکنند. همینطور نقطـه انفصـال مونوتومـی تـابع $f(a,b)\rightarrow R$ ممکن است قیمت مناسب بعضـی قسم های انتروال ها که تقاطع نمکنند دوبدو به هم قرار دهیم کـه هرکدام ازین انتروال ها را برحسب یـک عدد نـاطق انتخـاب کنیم (چنین اعداد همیشـه بـه اندازه ست اعداد ناطق درمحور عددی موجود است) (مراجعه نمائید به : پراگراف *4.11) درنتیجـه بین انتروالهای سیستم متذکره وست های که به اساس اعداد ناطق انتخـاب گردیده است وبین نقـاط

انفصال تابع اعداد ناطق انتخاب گردیده وبین نقاط انفصال تابع وبعضی ست های فرعی ست اعداد ناطق یک قیمت مناسب متقابل را حاصل می نماییم (هرست فرعی ست های داده شده ازست های اعداد ناطق میباشد) (مراجعه نمائد به: پراگراف *4.11) این ست ها میتواند ازست های متناهی یا لایتناهی نقاط انفصال تابع مونوتومی باشد.

5.15 معیار کوشی برای موجودیت لیمت تابع:

دراین بخش به مطالعه ترادف های مشابه برمیخوریم که میتوان ازروی آن شرایط لازم وکافی تابع که دارای لیمت متناهی درنقطه داده شده x_0 میباشد حاصل نمود زیراکه این شرایط میتوانند تنها خود قیمت تابع را فورمول بندی نماید ، که قیمت لیمت متذکره درآن سهم نمیگیرد.

مثل سابق نقطه فرعی x_0 یا عدد حقیقی یا یکی ازبی نهایت $\infty,+\infty,-\infty$ میباشد که x_0 مماس نقطه ست مشخص تابع مورد بررسی میباشد.

قضیه 15: (معیار کوشی) برای اینکه تابع $f:x\to R$ درنقطه x_0 دارای لیمت متناهی باشد لازم وکافی است تا برای هر $\varepsilon>0$ چنان حوالی $U(x_0)$ درنقطه x_0 موجود باشد که برای هر $x''\in U(x_0)\cap x, x'\in U(x_0)\cap x$ غیرمساوات $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$ صادق باشد.

ثبوت لازمی: فرضاً $f:x\to R$ و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in R$ به این معنی که برای هر $\varepsilon>0$ چنین حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که برای هریکی $x\in U(x_0)\cap x$ غیرمساوات $|f(x)-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.............(5.71) صادق است.

فرضاً $x''\in U(x_0)\cap x, x'\in U(x_0)\cap x$ داشته باشیم درآنصورت به علت (5.71) خواهیم داشت:

$$|f(x'')-f(x')|=|[f(x'')-a]+[a-f(x')]|\le|f(x'')-a|+|a-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ثبوت کافی: فرضاً تابع $f: x \to R$ چنین است که برای هر $\varepsilon > 0$ چنین حوالی $U(x_0)$

نقطه x_0 موجود شود که برای هر $x'' \in U(x_0) \cap x, x' \in U(x_0) \cap x$.........(5.72)

غیرمساوات $\left| f(x'') - f(x') \right| < \varepsilon$ صادق باشد ، که دراینجا موجودیت لیمت تابع درنقطه x_0

را نشان میدهد ، یکی از ترادف $x_n \in x$ که n=1,2.......... را درنظرمیگیریم

درآنصورت $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$........(5.73) ازینکه ε و $\varepsilon > 0$ را اختیاری داده شده است.

طبق فرضیه حوالی $U(x_0)$ نقطه x_0 موجود میشود که شرایط (5.72 و 5.73) را تأمین کند.

به علت همین شرط (5.73) برای این حوال $U(x_0)$ چنین نمبر $n_o \in N$ موجود میشودکه

برای هر $n'>n_0$ طوریکه $n \in N$ باشد ، پس $x_n \in x, x_n \in U(x_o)$ بجا خواهد بود . پس

دراین:

$n = n_o + 1, n+2..., x_n \in U(x_0) \cap x$ باشد ازین جا با توجه به (5.72 و 5.73)

داریم که برای همه $n>n_0$ و همه $m>n_0$ غیرمساوات $\left| f(x_n) - f(x_m) \right| < \varepsilon$ صادق است که

درآنصورت ترادف عددی {f(x)} که توسط شرایط کوشی برای ترادف های عددی (س.م

پراگراف 4.7) تأمین میگردد متقارب است . به این ترتیب برای هرترادف $x_n \in x$

طوریکه ....n=1,2 باشد.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ترادف {f(x)} متقارب است.

ازاینجا معلوم میشود که (مراجعه نمائید به لیما 4 درپراگراف 5.6) موجودیت لیمت تابع

مساوی به $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ نتیجه میشود.

دراین حالت وقتیکه x_0 عدد باشد شرایط کوشی ممکن است بترتیب ذیل فورمول بندی نمود:

برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$ موجود شود که برای هر $x'' \in x, x' \in x$ شرایط تامین کننده $|x' - x_0| < \delta$ و $|x'' - x_0| > \delta$ غیرمساوات $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ تطبیق میشود ،

درصورتیکه $x_0 = \infty$ شود شرایط کوشی ممکن است شکل ذیل را اختیار نماید. برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$ موجود میشود که برای هر $x'' \in x, x' \in x$ شرایط $|x'| > \delta, |x''| > \delta$ تامین گردد غیرمساوات $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ صادق است برای لیمت های یک طرفه تصادفی شرایط کوشی ممکن است بدون حوالی ترتیب ذیل تعمیم نمود:

برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $n < x_0$ وقتیکه لیمت چپ بررسی میگردد و $n > x_0$ وقتیکه لیمت راست باشد که برای هر $x'' \in x, x' \in x$ شرایط $n < x'' \le x_0, n < x' \le x_0$ یا درمطابقت به $x_0 \le x'' < n, x_0 \le x' < n$ غیرمساوات $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ تطبیق شود.

یاد آورمیشویم که تمام این معیار ها موجودیت لیمت تابع که مربوط به حالت مختلف ودارای فورمول بندی مختلف میباشد به کمک انتخاب یگانه ترمینالوژی برای ثبوت حاصل نمودیم.

§6. خواص متمادیت توابع روی فاصله ها

6.1: محدودیت توابع متمادی وبدست آوردن نقاط اعظمی واصغری

دراین پراگراف ردیف بندی مهم که دربر گیرنده خواص متمادیت تابع پولینومی است مورد مطالعه قرار میدهیم.

تعریف 1: تابع $X \subset R, f : X \to R$ بنام متمادی درست X نامیده میشود . اگر این تابع برحسب ست X درهرنقطه متمادی باشد (مراجعه نمائد به : تعریف 5 و8 درپراگراف 5.5) کلاس مهم تابع متمادی عبارت ازکلاس تابع متمادی روی فاصله محور عددی میباشد ، مطالعه این تابع با تابع متمادی درانتروال قطعه خط آغاز میشود. اگر تابع f درانتروال [a, b] متمادی باشد ، پس متمادیت این تابع درنقطه x=a به معنی متمادی راست است ومتمادیت آن درنقطه x=b به معنی متمادیت چپ درین نقاط میباشد. بزرگترین قیمت $\max_X f$ (کوچکترین قیمت $\min_X f$) قیمت تابع $f : X \to R$ بنام بزرگترین (کوچکتر) قیمت ست درتمام قیمت های آن یاد میشود.(مراجعه نمائد به : پراگراف 3.3) معلوم است که اگر به تابع f بزرگترین (کوچکترین) قیمت موجود شود ، پس آن عبارت ازسرحد فوقانی (سرحد تحتانی) (مراجعه شودبه پراگراف 5.1) $\sup_X f$ درمطابقت به $\inf_X f$ میباشد.

قضیه 1 (قضیه ویرالشتراس):

تابع درانتروال محدود متمادی است ، اگرتابع قیمت های بزرگ وکوچک درانتروالاخذنماید.

ثبوت: فرضاً تابع f درانتروال [a, b] متمادی است وفرضاً $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ باشد وهمینطور

هرسرحدست عددی غیرخالی Mمیتوان یا متناهی یا بی نهایت برابر به $+\infty$ باشد.

نشان میدهیم که $M<+\infty$ وچنان نقطه $x_0\in[a,b]$ موجود شودکه $f(x_0)=M$ شود ، پس

چنین ترادف به چنین عدد a_n,............,$n=1,2$ رااختیارمیکنیم که

، $n=1,2,.....(6.1)$ و $a_n<M$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=M$مطابق به تعریف سرحد فوقانی تابع برای

هریکی از a_n,.......$n=1,2$ چنین نقطه $x_0\in[a,b]$ موجود شود.

$f(x_n)>a_n \; n=1.2\cdots(6,2)$

ازطرف دیگر M سرحد فوقانی تابع f بوده پس برای تمام نقاط $x\in[a,b]$ غیرمساوات

، صادق است $f(x)\le M.....(6.3)$

ترادف $\{x_n\}$ محدود است: $a\le x_n\le b$,..........$n=1,2$

برحسب قضیه بلزانو ویراشتراس (مراجعه نمائید به : پراگراف 4.6) میتوان ازآنها ترادف

فرعی متقارب $\{x_n\}$ را جدا ساخت.

$$\lim_{k\to\infty} x_{nk}=x_0...(6.4)$$

همینطور $a\le x_nk\le b$,....$k=1,2$ پس چرا؟ و $a\le x_0\le b$ پس درآنصورت x_0 نقطه

انتروال [a, b] است ازغیرمساوات (6.2) و (6.3) نتیجه میشود که برای هر .....$k=1,2$

غیرمساوات $a_{n_k}<f(x_{n_k})\le M...(6.5)$صادق است. لیمت هرترادف فرعی، ترادف است

که دارای لیمت متناهی یا بی نهایت بوده برابر به لیمت تمام ترادف ها است ، پس از مساوات

6.1 داریم که: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_K} = M$ با تبدیل 6.5 به لیمت درصورتیکه $k \to \infty$ حاصل می

نماییم که :
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_K}) = M ...(6.6)$$

ازطرف دیگربه علت متمادیت تابع f درانتروال [a, b] درنقطه x_0 این انتروال متمادی است

، همین طور از(6.4) نتیجه میشودکه:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{nk}) = f(x_0) ...(6.7)$$

وازفورمول های (6.6) و(6.7) داریم که $M=f(x_0)$ وبه این ترتیب ثابت است که سرحد فوقانی M تابع f به قیمت تابع درنقطه x_0 مطابقت میکند وبه خود تابع f محدود بالای است وسرحد فوقانی آن به نقطه $x_0 \in [a,b]$ میرسد.

بطورمشابه ثابت میشود که تابع متمادی درانتروال محدود پائین بوده که به سرحد پائین خود میرسد.

این قضیه هم مانند قضیه 1 برای فاصله ها که انتروال شمرده نمیشود مطابقت نمیکند که راجع به آن به سادگی میتوان مثال را ترتیب نمود.

بطورمثال تابع $y=\dfrac{1}{x}$ درهرنقطه انتروال (0،1) متمادی است ودرجائیکه انتروال محدود نیست متمادی نیست، تابع $y=x$ درتمام محورعددی خود متمادی بوده ودرآن محدودنیست.

یا دآورمیشویم که اگرتابع f درانتروال متمادی نباشد بلکه روی فاصله دیگربه غیر از این انتروال محدود باشددرینصورت میگویند که تابع دارای بزرگترین (کوچکترین)قیمت نمیباشد.

بطورمثال: تابع y=x درانتروال (0،1) و y=arctgx درتمام مستقیم عددی شان متمادی اند (متمادیت تابع y=arctgx درپراگراف 7.3 ثبوت خواهد شد) این توابع درفاصله متذکره محدود وبه سرحد فوقانی وتحتانی موافق نمیباشد.

تمرین1: فرضا تابع f مشخص ومتمادی درانتروال [a, b] و f(x)>0 برای تمام $x\in[a,b]$ باشد ، پس درآنصورت چنین c>0 یافت میشود که f(x)>c برای تمام $x\in[a,b]$ صدق میکند.ثابت نماید.

2: ثابت نمائید که تابع f درانتروال نیمه بسته یا متناهی وبی نهایت $a<b\le+\infty,[a,b)$ متمادی است ودارای لیمت متناهی $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ در $[a,b)$ محدود است.

6.2 قیمت وسطی توابع متمادی

قضیه 2 (قضیه بلزان- کوشی): اگر تابع f درانتروال [a, b] طوریکه f(a)=A و f(b)=B متمادی باشد ، پس دراینصورت برای هر cاختیاری به اساس قرارداد بین A و B چنین نقطه $\xi\in[a,b]$ که $f(\xi)=c$ موجود میشود. یابه عباره دیگرتابع متمادی درانتروال دوقیمت را بخود میگیرد ویاهر قیمت را که دربین آنها واقع باشد بخود میگیرد.

ثبوت: فرضاً برای تشخیص f(a)=A<B=f(b) و A<c<B انتروال [a, b] نقطه x_0 قطعه خط رابه طول برابر تقسیم می نماید ودراین صورت $f(x_0)=c$ ، یعنی نقطه مطلوبه $\xi=x_0$ یافت شده یا $f(x_0)\ne c$ است ، که درین صورت درانجام یکی از قطعه خط بدست آمده

تابع f قیمت را بخود میگیرد که بطرف مخالف ازعدد c واقع است به قیمت های کوچک ازطرف چپ وبه قیمت های بزرگ ازطرف راست به نقطه c نزدیک میشود. این قطعه انتروال را به

$[a_1, b_1]$ نشان میدهیم ودوباره آنرا برحسب طول قطعه خط برابر به دوتقسیم میکنیم.

درنتیجه ازطریق تعداد متناهی اعداد قدم های بر میداریم وبه نقطه مطلوب ξ که درآن $f(\xi)=c$ است وترادف داخلی قطعه $[a_n, b_n]$ را حاصل می نماییم که برحسب طول به طرف صفر تقرب میکند.

$F(a_n) < c < f(b_n)$………… (6.8)

فرضاً ε نقطه عمومی تمام قطعه $[a_n, \quad b_n]$ طوریکه ….n=1,2 باشد (مراجعه نمائید به : پراگراف 3.7) و 4.2) معلوم است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

ازاینجا به علت متمادیت تابع f داریم که:

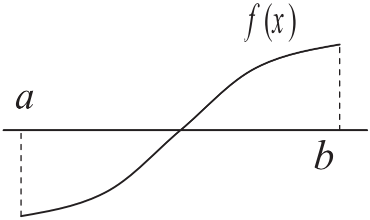
$$f(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n)............(6.9)$$

از(6.8) (مراجعه نمائید به: پراگراف (3.3) حاصل می داریم که :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le c \le \lim_{n\to\infty} f(b_n)............(6.10)$$

از (6.9) و(6.10) نتیجه میشود که $f(\varepsilon)=c$

نتیجه 1: اگر تابع f متمادی بوده ودرانجام قطعه خط قیمت های مختلف بگیرد درآنصورت دراین قطعه اقلاً یک نقطه موجود میشود که درآن تابع به صفر برمی گردد . این نتیجه حالت خصوصی قضیه (شکل 31 باشد.)



شکل 31

نتیجه 2: فرضاً تابع f درقطعه خط [a, b] متمادی باشد، M=sup f و m=inf f باشد درآنصورت تابع f تمام قیمت ها ازقطعه [m, M] اخذ مینماید وتنها همین قیمت رابرای ثبوت نتیجه یاد آور میشویم که اگر $m=\inf\limits_{[a,b]} f, M=\sup\limits_{[a,b]} f$ باشد ، پس درین صورت $m \le f(x) \le M$ مطابق قضیه 1 چنین نقاط $\alpha \in [a,b]$ و $\beta \in [a,b]$ موجود میشود که $f(\alpha)=m$ و $f(\beta)=M$ بوده ، درصورت که برای بررسی نتیجه مستقیماً ازقضیه 2 استفاده شده باشد ، راجع به قطعه $[\alpha,\beta]$ چنین نتیجه میشود که:

اگر $\alpha \le \beta$ باشد یا برابر به قطعه $[\beta,\alpha]$ باشد یا $\beta < \alpha$ باشد ، دراینصورت ست های تمام قیمت تابع داده شده دربعضی قطعه ها متمادی است وبه همین قسم قطعه ها را بخود اختیار میکند . یاد آور میشویم که خواص توابع متمادی تمام قیمت وسطی برابر هرقیمت وسط (متناهی ، یابی نهایت) را بخود میگیرد. به همین ترتیب اگر بعضی تابع متمادی قیمت وسطی رادردونقطه a وb بگیرد درآنصورت a<b میباشد ، پس همین دوقیمت آن هاوسط را بخود میگیرد. درحقیقت طبق قضیه 2 تابع بررسی شده است مشخصاً قیمت متذکره دریکتعداد نقاط قطعه [a, b] که عبارت ازبخش اول قیمت وسط میباشد، بخود میگیرد.

تبصره: طوریکه درقضیه 1 وهمین قسم درقضیه 2 موجودیت نقطه درانتروال داده شده ثابت گـردد، درآن قیمـت تـابع متمـادی اسـت کـه دارای خـواص مشـخص میباشـد مـورد مطالعـه قرارگرفت.

(درقضیه اول بـه قیمت اکسیتریمیم (اعظمـی) ودرقضیه دوم بـه قبـول کـردن قیمت داده شده وسطی نائل گردیده است که یکی ازین میتودها برای ثبوت این ادعا بکار میرود که دارای تفاوت های اصولی میباشد. میتود ثبوت قضیه 2 نـه تنها امکان ثبوت را میدهد ، بلکه بـه صورت عموم حالت موجودیت نقطه اشاره شده را نیزنشان میدهد ودرعمل دریافت آن با دقت هردرجه داده شده آن برای هرتابع بسیار دقیق میتوانندصورت گیرد. قطعه راکه درآن نقطه را جستجو میکند عددرا بطور خاص به 2 تقسیم میکند وهر دفعه نصف آنرا طبق اصول اشاره شده درثبوت آنرا انتخاب میکنیم انجام بدست آمده قطعه خط نزدیک به نقطه اشاره شده میباشد، به همین میتود که درقضیه 1 ثبوت شد اجازه نمیدهد تا طریقه را نشان دهد که توسط این طریقه برای هریکی ازتوابع متمادی درقطعه ممکن باشد نقطه را دریافت کند وقیمت اکستریمیم آنرا دراین نقطه قبول کند.

ازاین سبب که ثبوت این قضیه به اساس قضیه بلزانو-ویرستراش که جدا ساختن ازهر ترادف محدود متقارب ، ترادف فرعی امکان پذیرنیست ، زیراکه الگورتم قبول شده برای جدا نمودن ازهر ترادف محدود متقارب ترادف فرعی موجود نیست. وهمین قسم یاد آور میشویم که با استفاده ازچنین الگورتم درپراکتیک مشکل است ، ذریعه چنین الگورتم بـه آسانی بـه مقصد برسیم . بادرنظرداشت این نظر درنزدیکی به حل معادلـه $f(x)=0$ معمولاً نـه بـه حیث میتود تقسیم قطعه خط به عدد 2 بلکه به دیگر الگورتم که زودتر به مقصد ما را می رساند ، استفاده میشود.

مسئله 7: ثبوت نمایید که تابع متناوب متمادی درتمام محور عددی با تابع ثابت که دارای تناوب کوچکتر است ، تفاوت دارد.

مثال تابع متناوب را بنویسید که درتمام محورعددی معین باشد وبه تابع ثابت که دارای تناوب کوچک نباشد تفاوت داشته باشد

6.3 توابع معکوس:

تعریف2: تابع f که درست عددی x تعریف شده باشد بنام متزاید دقیق (متناقص دقیق) یاد میشود . اگربرای هردوعدد $x_1 \in X$ و $x_2 \in X$ طوریکه $x_1 < x_2$ باشد غیرمساوات $f(x_1) < f(x_2)$ تطبیق شود تابع که دقیقاً تزاید میکند، در مطابقت به $f(x_1) > f(x_2)$ یا دقیقاً تناقص میکند بنام مونوتونی دقیق یاد میشود اگر تابع اکیداً متزاید (اکیداً متناقص) درست X باشد ،پس میتوان گفت که تابع متذکره درین ست بادقت تزاید میکند (بادقت متناقص میباشد).

معلوم است که تابع مونوتونی دقیقاً (متزاید شونده) (متناقص شونده) بنام مختصر مونوتومی (درمطابقت به متزاید شونده یا متناقص شونده) یاد میشود.

(مفهوم تعریف 16 تابع ازپراگراف (5.14))

لیما1: فرضاً تابع f بادقت تمام دقیقاً تزاید کند (تناقص کند) دربعضی ست ها $c \subset R$ وفرضاً Y ست قیمت آن باشد ، درآن صورت تابع معکوس f^{-1} (مراجعه شود به پراگراف 1.2*) عبارت ازتابع تزاید کننده (اکیدی یک قیمته (متناقص شونده) ست y میباشد).

ثبوت: فرضاً برای مشخص ساختن تابع f که درست X اکیداً تزاید کننده است ، ثابت میکنیم که تابع معکوس یک قیمته است.

برعکس فرض میکنیم که هرگاه چنین نقطه $y \in Y$ موجود شود که ست $f^{-1}(y)$ برحسب

اخرین اندازه دونقطه مختلف x_1 و x_2 تشکیل گردد، طوریکه $x_2 \in f^{-1}(y), x_1 \in f^{-1}(y)$ و

$x_1 \neq x_2$ باشد.

وهمین قسم $f(x_1)=f(x_2)$ …………(6.11) باشد وبرای دوعدد x_1 و x_2 طوریکه

$x_1 \neq x_2$ باشد، وحد اقل یکی ازین دوعدد غیرمساوات $x_1<x_2$ یا $x_1>x_2$ صدق نماید.

درحالت اول به علت تزاید اکیدی تابع f داریم که $f(x_1)<f(x_2)$ ودر دوم $f(x_1)>f(x_2)$ باشد

، پس دراینصورت داریم که درهردوحالت غیرمساوات (6.11) تطبیق نمیشود به این ترتیب

برای هر $y \in Y$ ست $f^{-1}(y)$ تابع اکیدی دریک نقطه تشکیل میشود که درآنصورت تابع f^{-1}

یک قیمته است.

حال ثبوت میکنیم که تابع f^{-1} اکیداً درست y متزاید است . فرضاً

$y_1 < y_2, y_1 \in Y, y_2 \in Y$………(6.12) باشد وفرضاً $x_1=f^{-1}(y_1)$ و $x_2=f^{-1}(y_2)$

باشد همین قسم $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$ باشد برای هردو عدد x_1 و x_2 یکی ازین 3 نسبت

صدق می نماید.

یا $x_1>x_2$ یا $x_1=x_2$ ویا $x_1<x_2$ باشد. اگر $x_1>x_2$ یا $x_1=x_2$ باشد ، پس درآنصورت مطابق

به $y_1>y_2$ بوده (به علت اینکه تابع اکیداً متزاید) است یا $y_1=y_2$ (به علت اینکه تابع یک

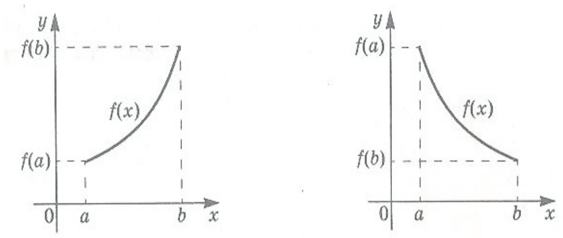
قیمته است) که غیرمساوات (6.12) خلاف نتیجه میشود که: $x_1<x_2$ است واین معنی میدهد

که تابع f^{-1} درست y اکیداً متزاید میباشد.

دراین حالت امکان دارد به اثبات رسانیده شود که تابع f اکیداً متزاید است یا میتوان تابع به

شکل مشابه به تابع دیگر تبدیل گردد یابه همین حالت تابع f– مورد مطالعه قرارگیرد.

یا وقتیکه تابع f درست x اکیداً متناقص باشد، پس تابع f– دراین ست اکیداً متزاید است.



شکل 32

قضیه 3: فرضاً تـابع f درقطعـه [a, b] متمادی واکیداً متزاید (متناقص) تعریف شده باشد ، دراینصورت تابع معکوس f^{-1} یک قیمته اکیداً متزاید (متنـاقص) ومتمـادی درانجـام هـای قطعـه خط درنقاط f(a) و f(b) مطابق شکل 32 تعریف شده است.

ثبوت: ثبوت قضیه را برای تـابع اکیداً متزاید عملـی میسـازیم ، فرضـاً c=f(a) و d=f(b) را نشان میدهیم که ساحه تعریف تابع معکوس f^{-1} عبارت ازقطعه خط [c, d] بوده وهمین قسم معکوس [c, d] ست قیمت تابع f میباشد.

درحقیقت ازتزاید تـابع f نتیجـه میشـود کـه $f(a) \le f(c) \le f(b)$ اسـت ، پس درآنصـورت داریم که $f(x) \in [a,b]$ برای هر $x \in [a,b]$ است ازطرف دیگر $y \in [c,d]$ است.

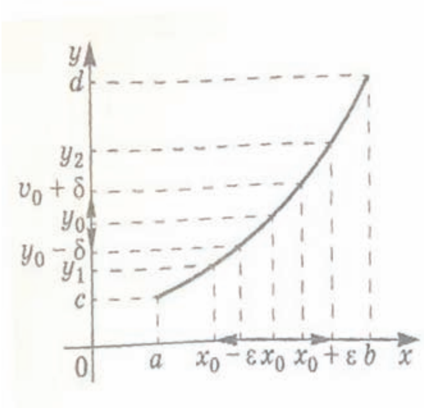
پـس دراینصـورت داریـم کـه $f(a) \le y \le f(b)$ اسـت ، طبـق قضـیه 2 چنـان نقطـه $x \in [a,b]$ یافت میشود کـه f(x)=y میشود ، بـه این ترتیب تمام قیمت هـای داده شده تـابع f بالای قطعه خط [c, d] واقع است.

وهرنقطه این قطعه خط عبارت ازقیمت تابع f دربعضی ازنقاط میباشد مطلب فوق این معنی میدهد که قطعه خط [c, d] عبارت ازست قیمت تابع f میباشد وبیان فوق ازنتیجه 2 قضیه 2 بدست آمده است اگر درحالت داده شده

$$d = \max_{[a,b]} f(x), c = \min_{[a,b]} f(x)$$

پس به علت لیما تابع f^{-1} یک قیمته بوده واکیداً درقطعه [c, d] متزاید میباشد.

فرضاً $y_0 \in [c,d]$ و $x_0=f^{-1}(y_0)$ است فرضاً $c<y_0<d$ باشد پس درآنصورت داریم که y_0 نقطه داخل قطعه [c, d] میباشد پس به علت اکیداً متزاید بودن تابع f^{-1} و $\varepsilon > 0, a < x_0 < b$ را درشکل ذیل معین میسازیم.



شکل 33

میتوان حساب کرد که ε چنین است:

$$a \le x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \le b \dots\dots\dots (6.13)$$

فرضاً $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ و $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ باشد، پس در اینصورت از شرط (6.13) به علت اکیداً متزاید بودن تابع نتیجه میشود که:

$$c \le y_1 < y_0 < y_2 \le d$$

$\Delta > 0$ را میگیریم، طوریکه: $y_1 \le y_0 - \delta < y_0 + \delta \le y_2$ (مطابق شکل 33)، حال اگر y را طوری انتخاب کنیم که $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ پس در اینصورت

$y_1 < y < y_2$ و همین قسم به علت تزاید تابع f^{-1} غیر مساوات ذیل صادق میباشد:

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon$$

به این ترتیب برای $\varepsilon > 0$ چنین اشاره شده و $\delta > 0$ برای تمام $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$

غیر مساوات ذیل تطبیق میشود:

$$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon,$$

پس ، تابع f^{-1} دراینصورت در نقطه y_0 متمادی می باشد . حال اگر y_0=c ویا $y_0 = d$ شود درین صورت به طور مشابه ثبوت می شود که تابع f^{-1} در نقطه c متمادی چپ است. پس قضیه برای تابع اکیداً متزاید ثابت شد.

یاد آور میشویم که تابع f اکیداً متناقص است ، اگروفقط اگر تنها و تنها وقتیکه تابع f– اکیداً متزاید باشد، و همینطور قضیه ها برای تابع اکیداً متناقص نیز از حالت بررسی شده ثبوت میشوند.

نتیجه میشود ما تابع تعریف شده را در انتروال بررسی میکنیم.

قضیه 4: فرضاً تابع f اکیداً متزاید (اکیداً متناقص) تعریف شده باشد و درانتروال [a,b] (متناهی یا بی نهایت) متمادی است.

$$d = \lim_{x \to a+0} f(x) \text{ و } C = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

دراینصورت تابع معکوس، f^{-1} یک قیمته بوده و متزاید (اکیداً متناقص) تعریف شده و در انتروال (متناهی ، بی نهایت) با انجام های C و d متمادی است.

درحالت a=-∞ تحت علامه لیمت $\lim\limits_{x\to -a+0} f(x)$ لیمت گفته میشود. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و درحالت

b=+∞ تحت لیمت $\lim\limits_{x\to +\infty-0} f(x)$ لیمت دانسته میشود، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

ثبوت: برای تشخیص تابع f که در انتروال (a,b] اکیداً متزاید است، دراین حالت ست قیمت آن انتروال (c,d) میباشد.

به اساس قضیه لیمت تابع مونوتونی (مراجعه نمائید به : پراگراف 5.14)داریم که:

$C=\dfrac{\inf f}{(a,b)}$ و $d=\dfrac{\sup f}{(a,b)}$ وهمین قسم برای هر (a,b) ∋X غیرمساوات $C\le f(x)\le d$ صدق می نماید.

برعلاوه ، برای تمام $X\in(a,b)$ غیرمساوات f(x)≠C و f(x)≠d صدق می نماید.

درحقیقت اگر چنین نقطه X_0 موجود باشد که غیرمساوات $a<x_0<b$ و $f(x_0)=C$ باشد. (معلوم است که تنها و تنها فقط و فقط امکان پذیر است که سرحد تحتانی C متناهی باشد).

پس در اینصورت $a<x<x_0$ غیر مساوات $f(x)<f(x_0)=C$ تطبیق میشود که خلاف ادعا بوده ،طوریکه $C=\dfrac{\inf f}{(a,b)}$ باشد. وهمینطوربرای تمام $X\in(a,b)$ غیرمساوات $C<f(x)<d$ تطبیق میشود.

ازطرف دیگر $C=\dfrac{\inf f}{(a,b)}$، $d=\dfrac{\sup f}{(a,b)}$ است، چنانچه برای هر y طوریکه $C<y<d$ باشد.

$x_1 \in (a,b)$ و $x_2 \in (a,b)$ که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$ موجود شود

غیرمساوات $C < y_1 < y < y_2 < d$ صدق میکند.

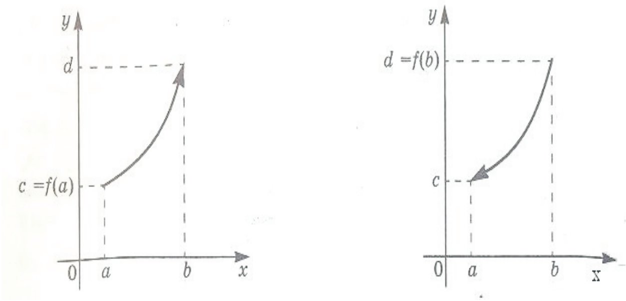
ازاینجا نتیجه میشود که اگر $x_1 < x_2$ (1) و $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$ باشد، پس

دراینصورت به علت قضیه بلزان-کوشی راجع به قیمت فاصله توابع متمادی چنین نقطه

(1) حالت $x_1 > x_2$ امکان ندارد. همینطور در آنصورت به علت تزاید تابع f غیر مساوات $y_1 > y_2$ تطبیق خواهد شد.

موجود میشود که $x \in [x_1, x_2]$ $f(x)=y$ است.به این ترتیب برای هرنقطه $y \in [c,d]$

چنان نقطه $x \in (a,b)$ که $f(x)=y$ باشد موجود است.



شکل 34

به همین قسم قضیه ثبوت میشود، که خودش ثبوت است. ست حقیقی قیمت تابع f یا همین قسم ست قیمت تابع معکوس f^{-1} عبارت از انتروال [c,d] میباشد، پس در اینصورت تابع f^{-1} یک قیمته بوده و در انتروال [c,d] اکیداً متزاید است.

بنابر قضیه3 چنین نتیجه میشود که قطعه $|x_1, x_2| \subset (a,b)$ است و تابع f^{-1} درآن متمادی میباشد.

تبصره: بطور مشابه ثبوت میشود که اگر تابع اکیداً متزاید در انتروال نیمه بسته $[a,b), -$

$+\infty \le b < a < \infty$ یا در $\infty < +\infty < b < a \le \infty - (a,b]$ متمادی باشد.

پس درانصورت تابع معکوس تعریف شده و اکیداً متزاید است و در انتروال نیمه بسته $[c,b)$

طوریکه C=f(a) و $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ در مطابقت به $[c,d)$ طوریکه $C = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ و

d=f(b) شکل 34 باشد، متمادی است.

تابع تصادفی متناقص شونده اکیدی در نیمه انتروال f(x) ممکن است به تابع تصادفی متزاید

تبدیل شود تابع(x)f– را به بررسی سپرده شود.

مثال: به هر مقصد مثبت n رابه تابع $y = x^n$ اکیداً متزاید است و درنیم محور $X \ge 0$ مثبت

ومتمادی است.

واقعاً اگر $0 \le x_1 < x_2$ باشد، پس درآنصورت n دفعه این غیرمساوات را ضرب میکنیم

حاصل می نماییم که $x_1^n < x_2^n$ پس ، درآنصورت داریم که تابع $y = x^n$ ، n=1,2 باشد

اکیداً تابع مونوتون متزاید است.

برای ثبوت متمادیت تابع $y = x^n$ یاد آور میشویم که تابع y=f(x)=x در هرنقطه $x_0 \epsilon R$

متمادی است. واقعاً، دراین حالت $y_0 = f(x_0) = x_0$ است. چنانچه $\Delta y = y - y_0 =$

$x - x_0 = \Delta x$ همینطور اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، پس در اینصورت $\delta = \varepsilon$ قرار

میدهیم از شرط $|\Delta x| < \delta$ نتیجه میشود که $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$ است.

به این معنی که متمادیت تابع y=x در نقطه $x = x_0$ است .همین قسم تابع $y = x^n$ عبارت

از حاصل ضرب n تابع f(x)=x بوده ودرتمام نقاط $x\epsilon R$ متمادی است(مراجعه نمائید به:

پراگراف 5.10)

ازاینجا $\lim_{h\to+\infty} x=+\infty$ درنتیجه $\lim_{h\to+\infty} x^n=+\infty$ طوریکه n=1,2.... به غیر ازآن برای

صفر، تابع $y=x^n$ عبارت از جذر n ام توان $\sqrt[n]{y}$ طوریکه n=1,2... باشد طبق قضیه 4

و خواص ثبوت شده توان تابع $y=x^n$ جذر n ام توان $\sqrt[n]{y}$ طوریکه n=1,2.. باشد برای

هر عدد y غیر منفی مشخص است.

به همین ترتیب از قضیه ثبوت شده درخصوص موجودیت یگانگی جذر n ام توان مثبت

هرعدد مثبت به نتیجه نهائی رسیده ایم.

تبصره: از مثال بررسی شده بار دیگر به نتیجه میرسیم که هر فاصله متشکل از اعداد

غیرناطق (مراجعه نمائید به : نتیجه 2 از قضیه 8 در پراگراف 4.11) نشان میدهد که عدد

$\sqrt{2}$ عبارت از عدد غیرناطق میباشد و عدد غیر ناطق برابر به مربع جذر دوم است. این عدد

را به شکل کسر غیر اختصار شده مینویسم یعنی $\frac{p}{q}$ (p و q اعداد ساده طبعی میباشد).

$\sqrt{2}\frac{p}{q}$ پس در آنصورت $p^2=2q^2$ و همین قسم عدد p بالای 2 تقسیم میشود. واقعاً اگر p

جفت باشد ،پس درآنصورت داریم که $P=2k+1, k\in N$ پس عدد ...

$$p^2=(2R+1)^2=4k^2+2k+1$$

همین قسم اگر جفت نباشد و مساوات $p^2=2q^2$ شود بجاخواهد بود. و همین طور P=2k

پس در آنصورت $4k^2=2q^2$ یا $q^2=2k^2$ است.

ازاینجا طوریکه دیده میشود q عدد جفت است. جفت بودن عدد p و q خلاف ادعا راجع به

کسر غیراختصار شده میباشد. از اثبات فوق به نتیجه میرسیم که هرعدد $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ (m و n عدد

طبعی است) غیر ناطق بوده، در حقیقت اگر این عدد ناطق باشد $\frac{p}{q}=\frac{m\sqrt{2}}{n}$ و $\sqrt{2}$ عدد ناطق

باشد، پس $\frac{n.p}{m.q} = \sqrt{2}$ ازینجا به نتیجه میرسیم که هر انتروال متشکل از اعداد غیرناطق

میباشد(پراگراف 4.11 را مقاسیه کنید) و شکل مخالف آنرا $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ طوریکه m و n اعداد تام اند.

حقیقتاً اگر $0 \leq a < b$ عدد طبعی n را انتخاب کنیم، طوریکه $b - a < \frac{\sqrt{2}}{n}$ وبعداً عدد

طبعیm را انتخاب کنیم، طوریکه $\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \leq a < \frac{m\sqrt{2}}{n}$ ، دراینصورت $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$

. همین قسم اگر $a < b \leq 0$ باشد، پس درآنصورت به علت ثبوت چنان اعداد تام m و n

موجود میشود که $-a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -b \leq 0$ ، طوریکه $a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b$ میباشد.

اگر $a < 0 < b$ باشد، طبق ثبوت چنان اعداد تام m و n موجود میشود که $a < 0 <$

$\frac{m\sqrt{2}}{n} < b$

6.4 متمادیت یکنواخت – مودول متمادیت

اگر تابع f در قطعه متمادی باشد، این معنی میدهد که برای نقطه x این قطعه خط و برای

هرعدد $\varepsilon > 0$ چنین عدد $\delta > 0$ یافت میشود (مربوط به نقطه x و عدد ε) که برای تمام

نقاط $\bar{x}$ قطعه خط طوریکه غیر مساوات ذیل صدق کند.

$$|\bar{x} - x| < \delta \quad \ldots(6.13)$$

باشد، غیر مساوات ذیل صدق میکندو همین قسم تابع متمادی عبارت است از.

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon \ldots (6.14)$$ظ

اگر عدد δ مربوط به نقطه x نباشد و شرایط (6.13) انتخاب شود که شرط (6.14) تطبیق

شوند، پس درآنصورت تابع f را بنام تابع متمادی یکنواخت یاد میشود.

تعریف این مفهوم بطور دقیق ذیلاً فورمولبندی می نماییم.

تعریف3: تابع f در قطعه $[a, b]$ بنام متمادی یکنواخت در این قطعه یاد میشود. اگر برای هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta > 0$ موجود شود که برای هر دونقطه $x \in [a, b]$ و $\bar{x} \in [a, b]$ طوریکه، اگر $|\bar{x} - x| < \delta$ باشد، غیرمساوات $|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$ صادق است. بطور سمبولیک تعریف متمادیت تابع در فطعه بترتیب ذیل میباشد:

$$\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > \forall x', \left|x' - x\right| < \delta : \left|f(x') - f(x)\right| < \varepsilon$$

و تعریف متمادیت یکنواخت چنین است.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x', \left|x' - x\right| < \delta : \left|f(x') - f(x)\right| < \varepsilon ....(6.15)$$

دراینجا نقاط x و x' بالای قطعه خط قرار دارد ، که تابع f در آن بررسی میگردد.

واضح است که هر تابع متمادی یکنواخت متمادی درین قطعه است.

اگر درتعریف متمادیت یکنواخت نقطه x معین باشد، پس درینصورت تعریف متمادیت دراین نقطه بدست می آید.

مثالها: 1: تابع $f(x) = x$ در تمام محور عددی متمادی یکنواخت است، طوریکه اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد کافی است تا $\delta = \varepsilon$ را در نظر بگیریم، دراینصورت اگر $|x - \bar{x}| < \delta$ باشد ،پس به علت مساوات $f(x) = x$ و $f(\bar{x}) = \bar{x}$ حاصل می نمایم :

$$[f(x) - f(\bar{x})] < \varepsilon$$

2: تابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$ باشد در ناحیه تعریف خود متمادی است. و در محور عددی خود نقطه دور $x=0$ نمیتواند در آن متمادی یکنواخت باشد. بطور مثال اگر $\varepsilon = 1$ را انتخاب کنیم ،پس دراینصورت میتوان به هراندازه دلخواه $\delta > 0$ نقطه x و $\bar{x}$ را کوچک و کوچکتر دریافت کرد.

بطورمثال تقاطع شکل $X = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi.n}$ و $\bar{X} = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi.n}$ (n بطورکافی عدد طبیعی بزرگ

است) طوریکه $|x - \bar{x}| < \delta$ به عوض $\left|f(x)\right| - \left|f(x)^{/}\right|$ به اساس تعریف صدق می کند .

3، تابع $f(x) = x^2$ در محور عددی R متمادی و یکنواخت نمیباشد. ازاینجا نتیجه میشود

که برای هر $h \neq 0$ مفهوم مساوات ذیل بجا خواهد بود.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+h) - f(x)] = \lim_{x\to\infty}[(x+h)^2 - x^2] = \lim_{x\to\infty}(2xh + h^2) = \infty$$

اگر دراینجا $0 < \varepsilon$ داده شده باشد، پس در آنصورت هر $0 < \delta$ موجود میشود که مفهوم

$h \neq 0$ طوریکه $|h| < \delta$ باشد ارائه کرد.

همینطور ممکن است x را طوری انتخاب نمود که برای این هدف میتوان غیرمساوات

$|f(x+h) - f(x)| > \varepsilon$ را تطبیق نمود.

قضیه 5 (کانتور): تابع که در قطعه خط متمادی باشد متمادی یکنواخت در آن قطعه خط است.

ثبوت: عکس قضیه را نشان میدهیم. فرض میکنیم که تابع f دربعضی قطعه $[a, b]$ متمادی

است و در بعضی قطعه متمادی یکنواخت نمیباشد، این معنی میدهد (مراجعه شودبه 6.15)

که چنین $0 < \varepsilon_0$ موجود میشود که برای هر $0 < \delta$ چنین نقطه $x \in [a, b]$ و $\bar{x} \in [a, b]$

یافت میشود که $|\bar{x} - x| < \delta$ و $|f(\bar{x}) - f(x) \geq \varepsilon_0|$ است و تقسیم $\delta = \frac{1}{n}$ برای آنها

نقطه میباشد، که آنها را به x_n و $\bar{x}_n$ نمایش میدهند.

$$\left|\bar{x}_n - x_n\right| < \frac{1}{n} \ldots (6.16)$$

$$|f(\bar{x}_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0 \ldots (6.17)$$

از ترادف نقاط $\{x_n\}$ به علت خواص فشرده گی (مراجعه نمائید به : 4 در پراگراف 4.6)

ممکن است ترادف متقارب $\{x_n\}$ را از آن جدا ساخت و لمت آنرا به x_0 نشان دهیم.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x ...(6.18)$$

اگر $k = 1.2, a \le x_{n_k} \le b$ باشد،پس دراینصورت $a \le x_0 \le b$ (مراجعه نمائید به:

پراگراف 4.3) تابع f در نقطه x_0 متمادی است.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = f(x) ...(6.19)$$

ترادف فرعی x'_{n_k} ترادف x'_n نیز متقارب در نقطه x_0 میباشد. و یا درصورتیکه $k\to\infty$

داریم که:

$$\left|x'_{n_k} - x_0\right| \le \left|x'_{n_k} - x'_{n_k}\right| + \left|x'_{n_k} - x_0\right| \underset{(6,16)}{<} \frac{1}{n_k} + \left|x'_{n_k} - x_0\right| \underset{(6,18)}{\to} 0.$$

ازاینجا $$\lim_{x\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) ...(6,20)$$

از خواص (6.19) و (6.20) نتیجه میشود که:

$$\lim_{k\to\infty}\left[f(x'_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right] = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

که این ادعا خلاف شرط است اگر .... k=1,2 و غیرمساوات ذیل صادق باشد.

$$\left[f(x'_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right] \underset{(6,17)}{\ge} \varepsilon_{0>0}$$

از اینجا ادعا خلاف قضیه ثبوت شده است.

تعریف 4. فرضا تابع f در قطعه $[a,b]$ داده شده باشد . پس دران صورت :

$$\omega(f;[a,b]) \sup_{x,x^{/}\in[a,b]} f(x^{/})-f(x)...(6,21)$$

بنام نوسان تابع fدرانتروال $[a,b]$ یادمیشود.ازدوقیمت $f(x^{/})-f(x)$ و $f(x)-f(x^{/})$ یاد شده هردو نه منفی ونه هم یکی از دیگری کوچک است .

. همین قسم کمیت سرحد فوقانی در بخش راست مساوات (6.21) تغییر نمیخورد.

اگر به عوض کمیت مطلقه $|f(\bar{x})-f(x)|$ ،تفاوت $f(\bar{x})-f(x)$ درخود این تفاوت گذاشته شود: پس:

$$\omega(f;[a,b]) \sup_{x,x^{/}\in[a,b]} f(x^{/})-f(x)$$

که مطابق بیان ذیل می باشد .

برای اینکه تابع f در قطعه $[a,b]$ متمادی یکنواخت باشد، لازم و کافی است تا برای هر $0>\varepsilon$ عدد $0>\delta$ موجود شود که قطعه $[x,\bar{x}]\subset[a,b]$ به طول کم از δ یعنی $\delta:0<x^{/}-x<\delta$ موجود شود، پس غیرمساوات ذیل صادق است:

$$\omega(f;[x,x^{/}])<\varepsilon...(6.22)$$

حقیقتاً اگر $x,\bar{x}\varepsilon[x,\bar{x}]$ باشداز غیرمساوات (6.26) نتیجه میشودکه $\varepsilon>|f(\bar{x})-f(x)|$

پس غیرمساوات (6.15) صادق است.

برعکس اگر نتیجه (6.15) صادق نباشد، پس دراینصورت برای هر $0>\varepsilon$ چنین $0>\delta$ یافت میشود که برای هر دو نقطه x و $\bar{x}$ قطعه $[a,b]$ که شرط $[x^{/}-x]<\delta$ را تامین میکند، غیر مساوات $\frac{\varepsilon}{2}>|f(\bar{x})-f(x)|$ بجا خواهد بود.

فرضاً برای مشخص شدن $x < \bar{x}$ که برای هردو نقطه ε, η قطعه $[x, \bar{x}]$ معلوم باشد، پس غیر مساوات

$0 < |h - \varepsilon| < \bar{x} - x < \delta$ تطبیق میشود. ازینجا برای هر قطعه $[x, \bar{x}]$ طوریکه

$0 < \bar{x} - x < \delta$ داریم: $\omega(f;[x,x^{/}]) \sup\limits_{\xi,\eta\in[x,x^{/}]} |f(\eta)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

تعریف 5: مودول یک نواخت متمادیت تابع $\omega(\delta; f)$ تابع f که در قطعه $[a, b]$ تعریف شده بنام تابع یاد میشود، یعنی:

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x^{//}-x^{/}|\le\delta} \left|f(x^{//}) - f(x^{/})\right|, x^{/}, x^{//} \in [a,b] ....(6.23)$$

اکثراوقات جهت مختصر ساختن به عوض $\omega(\delta; f)$ میتوان مختصراً $\omega(\delta)$ را نوشت همین قسم حالت تعریف تابع نوسان (6.21) تحت علامه سرحد فوقانی در بخش راست مساوات (6.23) نیز ممکن است که میتواند کمیت مطلقه تفاوت$|f(\bar{\bar{x}}) - f(\bar{x})|$ را ننوشت، که برعکس خود تفاوت کمیت مطلقه میتوان نوشت که قیمت سرحد فوقانی دراینصورت تغییرنمیکند. یعنی : $\omega(\delta; f) = \sup\limits_{|x^{//}-x^{/}|\le\delta} \left|f(x^{//}) - f(x^{/})\right|, x^{/}, x^{//} \in [a,b]$

معلوم است که $\omega(\delta) > 0$ دیگراینکه $0 < \delta_1 < \delta_2$ باشد.

پس دراینصورت:

$$\{y : y = f(x^{//}) - f(x^{/}), |x^{//}x^{/}| \le \delta_1\} \subset y : y = f(x^{//}) - f(x^{/}), |x^{//}x^{/}| \le \delta_2$$

از این جا: $\sup\limits_{|x^{//}-x^{/}|\le\delta_1} \left|f(x^{//}) - f(x^{/})\right| \le \sup\limits_{|x^{//}-x^{/}|\le\delta_2} \left|f(x^{//}) - f(x^{/})\right|, x^{/}, x^{//} \in [a,b]$

پس $\omega(\delta_1) \le \omega(\delta_2)$ به این معنی که مودول متمادیت عبارت از تزاید تابع می باشد .

مثالها:

1) برای تابع $y = x^2$ ، $\omega(\delta)$ را دریافت می کنیم .طوریکه $-\infty < x < +\infty$ باشد

برا ی هر $\delta > 0$ ونقطه کیفی x_0 دقیقاً داریم که :

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \le \delta} (x''^2 - x'^2) \le x^2{}_0 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2 .....(6.24)$$

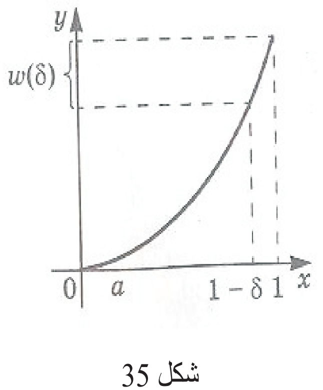
این غیر مساوات را برای هر x_0 دقیق می باشد .و همین طور برای هر δ کیفی داریم که

$$\lim_{x_0 \to \infty} (2x_0\delta - \delta^2) = +\infty$$

پس از رابطه (6.24) حاصل می نمائیم که:

$$\omega(\delta; x^2) = +\infty, -\infty < x < +\infty$$

حال مودل(muddle) متمادیت تابع $y = x^2$ را در قطعه $|0,1|$ دریافت میکنم.



شکل 35

همینطور طبق تعریف مودل متمادیت $\omega(\delta)$ را به بزرگترین تزاید تابع درقطعه به طول δ ترسیم میکنیم. برای اینکه مودل متمادیت تابع در حالت داده شده بدست آوریم، پس

دراینصورت قطعه $[(-\delta,1)]$ را که درآن تابع $0 \le x \le 1$, $f(x) = x^2$ سریع تر تزاید می کند انتخاب می نماییم. مودل متمادیت تابع در شکل (35) نشان داده شده است.

مودل تابع درین قطعه برابر است به:

$$\omega(\delta) = f(1) - f(1-\delta) = 1 - (1-\delta\ \ )^2 = 2\delta - \delta^2$$

که بطور تحلیلی بترتیب ذیل صورت میگیرد.

فرضاً $1 \le \bar{\bar{x}} \le \bar{x} \le \delta - \bar{\bar{x}} \le 0$ و به همین ترتیب $\delta \le \bar{x} - \bar{\bar{x}} \le 0$ پس

دراینصورت به علت غیرمساوات ذیل:

$$\bar{\bar{x}}^2 - \bar{x}^2 \le \bar{\bar{x}}^2 - (\bar{\bar{x}} - \delta)^2 = 2\bar{\bar{x}}\delta - \delta^2 \le 2\delta - \delta^2$$

حاصل می نماییم:

$$\omega(\delta; x^2) = \sup(x^{//2} - x^{/2}) \le 2\delta - \delta^2 ...(6.25)$$

$$|\bar{\bar{x}} - \bar{x}| \le \delta$$

اما اگر $\bar{x} = 1 - \delta$, $\bar{\bar{x}} = 1$ گرفته شود، پس

$$\omega(\delta; x^2) = \sup(x^{//2} - x^{/2}) \ge 1 - (1-\delta)^2 = 2\delta - \delta^2 ...(6.26)$$

از قسمت (6.25) و (6.26) به نتیجه میرسیم که از انتروال $[0,1)$ داریم که :

$$\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$$

2) تابع $y = \sin\frac{1}{x}$ ، x≠o را ازیکطرف بررسی میکنم

$$\omega(\delta; \sin\frac{1}{x}) = \sup\left|\sin\frac{1}{x^{//}} - \sin\frac{1}{x^{/}}\right| \le \sup\left|\sin\frac{1}{x^{//}}\right| + \left|x^{//} - x^{/}\right| \le \delta$$

$$\left|\sin\frac{1}{\bar{x}}\right| \leq \sup \quad 2 = 2$$

$$|\bar{\bar{x}} - \bar{x}| \leq \delta \qquad |\bar{\bar{x}} - \bar{x}| \leq \delta$$

حال طرف دیگر را انتخاب میکنم: $(\bar{\bar{x}}_n = 1/(\frac{\pi}{2} + 2\pi_n) \quad (\bar{x}_n = 1/(\frac{3}{2}\pi + 2\pi_n)$

n را طوری تعیین می کنیم که: $|\bar{\bar{x}}_n| \leq \frac{\delta}{2}$ ، $|\bar{x}_n| \leq \frac{\delta}{2}$

ازاینجا: $|\bar{\bar{x}}_n - \bar{x}_n| \leq |\bar{x}_n| + |\bar{\bar{x}}_n| \leq \delta$

پس دراینصورت خواهم داشت: $\omega(\delta; \sin\frac{1}{x}) \geq \sin\frac{1}{x''_n} - \frac{1}{x'_n} = 1 + 1 = 2$

$$\omega(\delta; \sin\frac{1}{x} = 2$$

ازقیمت حاصل شده نتیجه میشود که:

3) تابع $y = \frac{1}{x}$ را درانتروال (1،0) بررسی می نماییم، باتعیین هر δ, $0 < \delta < 1$

داریم:

$$\omega(\delta; \frac{1}{x}) = \sup(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}) = \sup(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}) \geq \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta} = \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)} \to +\infty : x_0 \to \_0$$

$$|\bar{\bar{x}}_n - \bar{x}_n| \leq \delta \qquad \bar{x} \leq \bar{\bar{x}} \leq \bar{x} + \delta$$

به این ترتیب $\omega(\delta; \frac{1}{\delta}) = +\infty$

لذا مودل متمادیت تابع، و تمادیت یکنواخت تابع را میتوان بترتیب ذیل نوشت:

قضیه 6: برای اینکه تابع متمادي در يك انتروال یکنواخت تعریف شود لازم و کافی است که:

$$\lim_{\delta\to 0}(\delta; f) = 0 \ldots (6.27)$$

ثبوت: فرضاً تابع f در قطعه خط $[a, b]$ متمادی یکنواخت باشد، پس دراینصورت شرط (6.15) تطبیق میشود و برای هر $0 < \varepsilon$ چنین $0 < \delta_{\varepsilon}$ موجود باشد که اگر:

$$x^{//} \in [a,b], x^{/} \in [a,b]$$

$|\bar{\bar{x}} - \bar{x}| \leq \delta_{\varepsilon}$ ازینجا نتیجه میشود که برای هر $|f(\bar{\bar{x}}) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$ پس دراینصورت δ, $0 \leq \delta \leq \delta_{\varepsilon}$ غیرمساوات ذیل صدق میکند:

$$\omega(\delta; f) = \sup\left|f(x^{//}) - f(x^{/})\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, x^{/}, x^{//} \in [a,b] \quad \left|x^{//}{}_{n} - x^{/}{}_{n}\right| \leq \delta$$

پس دراینصورت داریم که اگر $0 < \delta < \delta_{\varepsilon}$ پس $w(\delta if) < \varepsilon$ به این معنی که $\lim_{\delta\to 0} w(\delta if) = 0$ شرط لازمی (6.27) ثبوت شد. شرط کافی برای متمادیت یکنواخت تطبیق شرط (6.27) که برای هر $0 < \varepsilon$ چنین $0 < \delta_{\varepsilon}$ موجود باشد که اگر $0 < \delta < \delta_{\varepsilon}$ پس دراینصورت $w(\delta if) < \varepsilon$ با چنین انتخاب داریم که:

$$\bar{\bar{x}} \in [a, b] \quad ، \ \bar{x} \in [a, b] ، \ |\bar{\bar{x}} - \bar{x}| < \delta$$

(مراجعه کنید به: (6.23)) داریم که : $\left|f(x^{//}) - f(x^{/})\right| < \omega(\delta; f) < \varepsilon$

پس دراینصورت داریم که تابع f در قطعه $[a, b]$ متمادی یکنواخت است.

تمرین: تابع $f(x)$ در قطعه $[a, b]$ بنام متمادی در قطعه خط یاد میشود ،اگر چنین قطعه جداشده $[a, b]$ در قطعه اعداد متناهی $[x_2 - 1, x_2]$ یافت شود که:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

که تابع $f(x)$ در هرقطعه $[x_i - 1 \ , x_i]$ $i = 1,2, \ldots n$ خطی باشد، ثبوت نمائید که هر تابع $f(x)$ در قطعه $[a, b]$ میتواند با هر طاقت توان و قیمت تقریبی تابع قطعه خط در

صورتیکه $\varepsilon > 0$ بوده متمادی باشد، چنین تابع $f(x)$ خطی موجود شود، پس برای تمام $x \in [a, b]$ غیر مساوات $[F(x) - f(x)] < \varepsilon$ صادق باشد.

§7. متمادیت توابع ابتدائی

7.1. توابع ناطق و پولینومیلی

قضیه1: پولینوم کیفی در هرنقطه محور عددی متمادی است.

درحقیقت تابع y=c ، c عدد ثابت در تمام محور عددی R متمادی است. که درمثال 1 پراگراف 5.12 نشان داده شده است.

همین قسم تابع شکل $y = x^n$ درهر $n \in N$ ودر هرنقطه $x \in R$ متمادی است و درپراگراف 6.3 نشان داده شده است.

(مراجعه نمائید به: (تطبیق مثال))

همین قسم تمام اشکال ازتابع y=c و$y = x^n$ توسط عملیه جمع وضرب پولینوم ها حاصل می شودٰ،که این نوع توابع عبارت از توابع متمادی درنقطه ای از محور عددی R میباشد.

(مراجعه نمائید به : پراگراف (5.10))

قضیه2: هرتابع ناطق $\frac{P(x)}{Q(x)}$,(P(x) و Q(x) پولیونوم ها اند) که درتمام نقاط محور عددی R متمادی است، دراینجا مخرج آن Q(x) خلاف صفر میباشد (Q(x)≠0) ازاینجا مستقیماً به نتیجه میرسیم که پولینوم های P(x) و Q(x) در هرنقطه x€R متمادی بوده و توابع قسماً متمادی نیزدر تمام نقاط محور عددی متمادی میباشند که درآن مقسوم علیه خلاف صفراست، (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.10). ازاین قضیه عبوربه لیمت های توابع ناطق استفاده میشود.

فرضاً اگر خواسته شود که $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ را دریافت کنید.

برای این کار اگر لازم باشد و امکان داشته باشد ، میتوان کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به مضرب های

$(x-x_0)^n$ تجزیه کرد.

درصورتیکه $n \geq 1$ باشد، درنتیجه کسرناطق بدست آمده رامیتوان چنین نشان داد $\frac{P(x)}{Q(x)}$ پس

دراینصورت (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.4) طوریکه: $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$

اگر $Q(x) \neq 0$ باشد، بنابرقضیه2، لیمت آن برابر به $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ است. و اگر $Q_1(x_0) = 0$

و$(P_1(x_0) \neq 0)$ یا درحالت عکس ،کسر $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ رامیتوان بالای $(x-x_0)$ اختصار کرد.

دراینصورت لیمت آن برابر به ∞ است.

مثال1:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

مثال2:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x-1} = \infty$$

7.2 توابع طاقت ،لوگارتمی وطاقت نما

حال واضح میسازیم که از a^x درصورتیکه a و x اعداد حقیقی طوریکه $a>0$ باشد، چه مفهوم گرفته میشود . بطور مثال افاده $\pi^{\sqrt{2}}$ چه معنی میدهد

قبل از همه خواص a^r را به یاد می آوریم ،طوریکه $a>0$ و r عدد ناطق ، $r = \frac{p}{2}$ و q عدد تام $q\neq0$ باشد. (مراجعه نمائید به: پراگراف 2.6*)

خواص قرار ذیل است:

1) فرضاً $r_1 < r_2$ باشد، اگر $a>1$ باشد ، پس $a^{r_1} < a^{r_2}$ و اگر $a<1$ باشد پس $a^{r_1} > a^{r_2}$

2) $a^{r_1}.a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$

3) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$

دراینجا r , r_1 و r_2 اعداد ناطق میباشد.

به یاد می آوریم که $a^0 = 1$ ازخواص 2^0 نتیجه میشود که $a^r.a^{-r} = a^0 = 1$ ازاینجا

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \dots (7.1)$$

همین قسم ازخواص 1^0 و(7.1) به نتیجه میرسیم که: $a^r > 0 \dots. (7.2)$

برای هرعدد ناطق r درست است اگر $r>0$ و $a\geq0$ باشد.

پس درآین صورت به بنابرخواص1^0 ، $a^r \geq a^0 = 1 > 0$ ازاینجا طبق (7.1) داریم:

بطور مشابه غیر مساوات $a^r > 0$ درصورتیکه $a<1$ باشد ثبوت میشود. و نیز یاد آور میشویم که برای هر $a>0$ ، $b>0$ و $r\in Q$ باشد، غیر مساوات ذیل بجا خواهد بود:

حالا توان a^x برای هر عدد حقیقی x و $a>0$ را تعیین مینماییم.

تعریف1: فرضاً $a>0$ و x عدد حقیقی اختیاری و Q ست تمام اعداد ناطق باشد حاصل

می نمایم: $$a^x = \lim_{r \to x_0, r \in Q} a^x \quad ...(7.5)$$

این تعریف دارای مفهوم هم مانند هرنقطه محور عددی بوده که عبارت از نقطه مماس ست تمام اعداد ناطق میباشد (مراجعه نمائید به: خواص از لیما 1 در پراگراف 4.10)

صحت آن به این معنی است که لیمت اشاره شده موجود است. طوریکه ذیلاً برای هر عدد حقیقی $x \in \mathbb{R}$ ثبوت شده است. درثبوت آن میتوان از تعریف لیمت تابع برحسب (مراجعه شود به تعریف1 در پراگراف 5.4) استفاده نمود.

فرضاً $a>0$ طوریکه $x \in \mathbb{R}$، $r_n \in Q$ ...n=1,2 که $\lim_{n \to \infty} r_n = x$ است.

نشان میدهیم که ترادف $\{a^{r_n}\}$ توسط شرط معیار کوشی (مراجعه نمائید به: پراگراف 4.7)بیان گردیده و متقارب میباشد، برای این ترادف لازم است تفاضل آنرا دریافت نمائیم.

$$n \in N, m \in N \; |a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \; ... (7.6)$$

ترادف $\{r_n\}$ متقارب است و همین قسم محدود است(مراجعه نمائید به: پراگراف 3.4)

همینطور چنین نقطه A موجود است که بدون محدودیت عمومی ممکن است ناطق شمرده شود. (چرا؟) که: $-A < r_n < A$

از اینجا درحالت $a \geq 1$ داریم:

$a^{-A} \leq a^{r_n} < a^A$ و درحالت $a<1$ برابر به $a^{-A} > a^{r_n} > a^A$ طوریکه ....n=1,2

همینطور برای هر $a>0$ چنین عدد B موجود میشود که :

$a^{r_n} \leq B$ ... $B = a^{A}, n = 1,2$ درصورتیکه a≥1 و $B = a^{-A}$ درصورتیکه

a<1 باشد، پس درآین صورت ترادف $\{a^{r_n}\}$ از طرف بالا توسط عدد B محدود است و

همین قسم طبق تبصره 2 پراگراف 5.14 (مراجعه نمائید به: فارمول 69) داریم. $\lim_{\substack{r \to 0 \\ n \in o}} a^{r} = 1$ ازاینجا برای تعیین هر $\varepsilon > 0$ چنین $\delta = \delta_{\varepsilon} > 0$ موجود باشد،

که برای تمام اعداد ناطق r شرط $|r| < \delta$ غیر مساوات ذیل صدق میکند.

از (7.6) ، (7.7) و(7.4)به نتیجه میرسیم که برای هر $n > n\delta$ و $m > n\delta$ غیرمساوات

ذیل صادق است $\left|a^{r_n - r_m} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{B}$ ...(7.9)

ازاینجا بنابرمعیار کوشی نتیجه میشود که ترادف $\{a^{r_n}\}$ متقارب است. وهمین قسم برای

هرترادف اعداد ناطق n=1,2….,rn ، $\lim_{n\to\infty} r_n = x\ ,\ n = 1,2,3\cdots$ ترادف $\{a^{r_n}\}$ متقارب

است.

ازاینجا مطابق لیما4 از پراگراف 5.6 مستقیماً موجودیت لیمت (7.5) تابع a^{r} ،$r \in Q$ به

درنقطه x€rنتیجه می شود، دورست بودن a^{x} ثبوت شد.

تعریف1 دراین حالت به این معنی است که x وقتیکه عدد ناطق r باشد، توان a^{x} با قیمت a^{r}

که مفهوم آن قبلاً واضیح گردید . درحقیقت یکسان است مطابقت میکنداگر r=x عدد ناطق

باشد، پس در آنصورت خصوصیت ترادف اعداد ناطق $n=1,2\ldots,r_n$ مشابه عدد x=r است.

می توان $n=1,2\ldots,r_n=r$ راانتخاب کرد، پس در اینصورت طبق تعریف1 داریم:

$$a^{x} = \lim_{n\to\infty} a$$

تعریف2: فرضاً بعضی اعداد $a>0$ داده شده و تابع a^x برای تمام $x\varepsilon R$ تعریف شده باشد. این تابع بنام تابع نمائی با قاعده a یا دمیشود.

درحالت $a=e$ تابع e^x بطور $\exp(x)$ نشان داده میشود و بنام تابع اکسپوننشیل یاد میشود.

طبق تعریف1 $1^x = 1$ برای تمام اعداد حقیقیx درحالت که $a=1$ باشد ازآن نتیجه گرفته نمی شود و نمی خواهیم آنرا بررسی نماییم.

قضیه3: تابع نمائی a^x, $(a>0)$ باشد ، دارای خواص ذیل میباشد:

1) درصورتیکه $a>1$ باشد تابع درتمام محور عددی اکیداً متزاید است

و درصورتیکه $a<1$ باشد اکیداً متناقص است.

برای هر عدد حقیقی y , x مساوات ذیل صدق میکند:

2) $a^x . a^y = a^{x+y}$

3) $(a^x)^y = a^{x.y}$

4) تابع a^x درتمام محور عددی متمادی است.

5) ست قیمت تابع a^x, $a > o$, $a \neq 0$ باشد عبارت از ست تمام اعداد مثبت است.

ثبوت 1^0: فرضاً برای مشخص ساختن $a>1$ و $x<y$ ، اعدد ناطق $\bar{r}$ و $\bar{\bar{r}}$ موجود میشوند، زیرا که $x < \bar{r} < \bar{\bar{r}} < y$ است چنین ترادف اعداد ناطق $\{\bar{r}_n\}$ و $\{\bar{\bar{r}}_n\}$ را طوری انتخاب میکنم که $\lim a^{\bar{r}_n} = x$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\bar{\bar{r}}_n} = y$ طوریکه $\bar{r}_n < \bar{r} < \bar{\bar{r}} < \bar{\bar{r}}_n$ و تمام $n=1,2 \ldots$ پس درآنصورت $a^{\bar{r}_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} < a^{\bar{\bar{r}}_n}$ ازاینجا به لیمت میرسم که $n\to\infty$ راحاصل می نماییم $(7.11)\ldots$ $a^x \leq a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} \leq a^y$ به این ترتیب اگر $x<y$ ، پس درآین

صورت $a^x < a^y$ باشد، به این معنی که تابع a^x اکیداً متزاید است درصورتیکه $a>1$ باشد،

حالت $a<1$ به ترتیب مشابه بررسی میگردد.

ثبوت 2^0): فرضاً $\{\bar{r}_n\}$ و $\{\bar{\bar{r}}_n\}$ چنین ترادف های اعداد ناطق باشد، که $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ و $\bar{\bar{r}}_n = y$ یعنی: $\lim_{n\to\infty} (\bar{r}_n + \bar{\bar{r}}_n) = x + y$

(مراجعه نمائید به: پراگراف 3.9) پس درآین صورت به علت تعریف توابع نمائی داریم:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{\bar{r}_n + \bar{\bar{r}}_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\bar{r}_n} a^{\bar{\bar{r}}_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\bar{r}_n} \lim_{n\to\infty} a^{\bar{\bar{r}}_n} = a^x a^y$$

قبل از اینکه به قضیه را ثبوت نمایم، خواص ذیل را که از خواص 2 نتیجه میشوندرا یاد آور میشویم برای هر عدد حقیقی x مساوات $a^x a^{-x} = a^0 = 1$ صدق میکند همینطور $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ دورست میباشد.

ثبوت خاصیت4^0): (خاصیت 3 را بعد از خاصیت 4 ثبوت میکنیم)

قبل از همه یاد آور میشویم که :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in R}} a^x = 1 ...(7.12)$$

حقیقتاً به علت ثبوت تابع مونوتونیa^x , $a>0$ (خاصیت1) دارای لیمت یکطرفه $\lim_{x\to 0^-} a^x$ و $\lim_{x\to o^+} a^x$ میباشد.

بطور مشابه باداشتن ثبوت فورمول (5.69) متیقین میشویم (که تنها x عدد ناطق بررسی نمیگرددبلکه هر عدد حقیقی نیزدراینجابررسی میشود) حاصل می نمایم:

$$\lim_{x\to 0^-} a^x = \lim_{x\to 0^-, r\in Q} a^r = 1 = \lim_{x\to o^+, r\in Q} a^r = \lim_{x\to o^+} a^x$$

ازاینجا مساوات (7.12) نتیجه میشود.

حال فرضاً $x, x \in R$ معین است، $y = a^x$ که :

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

دراینصورت به علت (7.12) داریم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1$$

همینطور
$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = a^{\Delta x}, \lim_{\Delta x \to 0} (a^{\Delta x} - 1) = 0$$

این مرساند که تابع a^x در نقطه x متمادی است.

ثبوت خواص 3^0: اول فرضاً y=p عدد تام مثبت است ، پس درآنصورت p دفعه از خاصیت 2 استفاده میکنیم حاصل می نماییم.

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x . a^x \dots\dots a^x}_{\text{دفعه } p} = \underbrace{a^{x+x+\cdots+x}}_{\text{دفعه } p} = a^{xp} \quad \dots(7.13)$$

و فرضاً $y = \frac{1}{q}$ طوریکه q عدد تام مثبت است. نشان میدهیم که $(a^x)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{x}{q}}$ پس در آین صورت داریم $a^{\frac{x}{q}}$ که عبارت از جذر q ام عدد a^x میباشد، از مساوات (7.13) به نتیجه رسیدیم.

حالا فرضاً $y = \frac{p}{q}$ p و q اعداد طبعی اند ، درآین صورت مطابق ثبوت:ذیل

$$(a^x)^{\frac{p}{q}} = [(a^x)^p]^{\frac{1}{q}} = (a^{xp})^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{xp}{q}}$$

اگر $y = \frac{-p}{q}$ باشد پس دراینصورت:

بلاخره معلوم است که $(a^x)^0 = 1 = a^0$

به این ترتیب ثابت شد که برای هر عدد حقیقی x و هر عدد ناطق r داریم:

حال فرض کنید یک عدد حقیقی y دیگر داده شده است.ترادف اختیاری $\{r_n\}$ اعداد ناطق که به y تقرب میکند.را درنظرمیگریم.

دراینصورت بنابر (7.14)برای همه ...n=1,2 خواهیم داشت :

قیمت لیمت $\lim_{n\to 0} x^{r_n} = xy$ پس، در اینصورت طبق ثبوت متمادیت تابع نمائی a^x داریم:

ازطرف دیگر به علت تعریف توابع نمائی:

به لیمت میرسیم در مساوات (7.15) طوریکه n→∞ از (7.16) خواص مورد بررسی را برای هر $y \in \mathbb{R}$ ، x حاصل می نماییم.

از خواص 2 و 3 نتیجه میشود که $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$ طوریکه a>0 ، $y \in \mathbb{R}$ حقیقتاً

ثبوت خاصیت5: فرضاً برای مشخص ساختن a>1 دوباره برای اینکه ثبوت نماییم که ست قیمت تابع a^x عبارت از ست تمام اعداد مثبت است، پس دراینصورت داریم که انتروال بی نهایت (+∞ , 0) به علت متمادیت تزاید اکیدی آن تابع ،در تمام محور عددی تزایدمیکندطبق قضیه 4 پراگراف 6.3 واقعاً نشان میدهد که :

به بنابر لیمت مونوتونی تابع a^x (متناهی ، بی نهایت)

و $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ شرط کافی موجود میشود. همین قسم کافی است که ثبوت نمایم که:

$$\lim_{x\to\infty} a^{x_n} = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to\infty} a^{x_n} = 0$$

برای هر ترادف اختیاری معین $x_n \to +\infty$ و $\bar{x}_n \to -\infty$

بطور مثال : برای ترادف $x_n = n$ ، $\bar{\bar{x}}_n = -n$,n=1,2 …….. بر حسب فرضیه a>1 بوده پس در آین صورت داریم که a=1+α طوریکه α >0 باشد. ازینجا طبق غیرمساوات برنولی (مراجعه نمائید به : لیما در پراگراف 4.9). $a^n = (1+\propto)^n > n \propto$

و همینطور $\lim\limits_{x\to\infty} n = +\infty$ پس در اینصورت

$$\lim_{x\to\infty} a^n = +\infty$$

ازاینجا

$$\lim_{x\to\infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} a^n} = 0$$

درخود مساوات (7.18) در صورتیکه a>1 باشد ثابت می شود.

حال اگر 0<a<1 باشد پس دراینصورت:

$$b = \frac{1}{a} > 1$$

و

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} b^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} b^x} = +\infty$$

تبصره 1: ست تمام قیمت های تابع a^x طوریکه $a > o$ ، $a \neq o$ ست تمام اعداد حقیقی مثبت را تشکیل میدهد، از اینجا با الخصوص برای هر $x\epsilon R$ غیر مساوات$a^x > o$ بجا خواهد بود.

تبصره 2 : اگر$b > o, a > o$ در اینصورت برای هر$x\epsilon R$ مساوات$(ab)^x$=$a^x b^x$ درست است . حقیقتآ ، اگر$rn \to \emptyset$ ... ... $n = 1,2,3$ باشد $rn \to \emptyset n =$

پس در اینصورت $(ab)^x = lima(ab)^{rn}$

$\lim_{n\to\infty} a^{rn}b^{rn} = \lim_{n\to\infty} a^{rn} \lim_{n\to\infty} b^{rn} = a^x b^x$ ■

تمرین: فرضآ $b > o, a > o$ باشد .

ثبوت نمایید که برای هر $x\epsilon R$ مساوات $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ درست است.

تبصره3:اگر r عدد ناطق و r> 0 باشد، در اینصورت $0^r = 0$ همین قسم برای هر عدد حقیقی x>0 دارای لمت $\lim_{\substack{r\to x\\ r\in Q}} o^r = 0$ از اینجا، درصورتیکه x>0 باشد، تعریف (7.5) ممکن است که درحالت a=0 تقسیم نمود. چنانچه مساوات $0^x = 0$ و $x \leq 0$ میتواند درست باشد. تذکر میدهیم که درناحیه اعداد حقیقی بالای توان صفر غیر مثبت 0^x و$\leq x$ 0می توان منفی آنرا نوشت.

فرضآ aعدد مثبت خلاف صفر باشد از ریاضی ابتدائی معلوم است که عملیه معکوس بالای توان در مطابقت به اعداد داده شده x>0 آن عدد y وجوددارد که $a^y = x$ (اگر واقعآ y موجود باشد)و آنرا بنام گرفتن لوگارتم عدد y به قاعده a یادمی نمایند، که y عبارت از لوگارتم عدد x به قاعده بوده a و توسط $\log_a x$ ارائه میگردد. به این ترتیب به اساس

تعریف میتوان نوشت

تعریف 3: تابع که به هقرعدد حقیقی مطابقت نماید و لوگارتم $\log_a x$ آن برحسب قاعده a $(a \neq 1, a > o)$ باشد ، اگر این لوگارتم موجود شود آنرا بنام تابع لوگارتمی $y = \log_a x$ یاد مینمایند.

تابع لوگارتمی به قاعده 10 به سمبول lg وبه قاعده e به سمبول ln، lnx ارائه میگردد و بنام لوگارتم طبعی عدد x یاد میشود.

قضیه4: هرگاه تابع $y = \log_a x$ ،$(a \neq 1, a > o)$ درست تمام x>0 تعریف شده باشد این تابع درین ست اکیدآ مونوتونی است (متزاید است، درصورتیکه $a > 1$ و متناقص است درصورتیکه $a < 1$ باشد) این تابع متمادی است، پس دارای خواص ذیل میباشد:

$\log_a x_1$ ..

$$log_a x^a = a\, log_a x, x > 0, x \epsilon r \qquad (2$$

ثبوت: ست قیمت تابعa^x، $a > o$ ،$a \neq 1$ عبارت از تمام اعداد مثبت$(0،0^x + \infty)$ میباشد و ست ناحیه تعریف معکوس تابع درحالت داده شده عبارت از تابع $log_a x$ میباشد (مراجعه نمائید به: (19.7) موجودیت تابع معکوس لوگارتم هر عدد مثبت ثبوت گردیده است. ادعای باقی مانده قضیه 4 را مستقیماً می توان از قضیه 4 پراگراف 6.3 و قضیه 3 قبلی نتیجه گرفت.

درمثال نشان میدهیم که چطور خاصیت1^0 از تابع نمائی که در قضیه 3 اشاره شده بدست آمده.

$$y_1 = \log_a^{x_1} \quad . \quad y_2 = \log_a^{x_2}$$

طبق تعریف لوگارتم این معنی میدهد که $x_1 = a^{y_1}$ ، $x_2 = a^{y_2}$ (مراجعه نمائید به: خواص 2 تابع نمائی در قضیه 3) از اینجا داریم که:

$$x_1, x_2 = a^{y_1} a^{y_2} = a^{y_1+y_2}$$

و همین قسم از تعریف لوگارتم داریم که:

$$\blacksquare \ log_a x_1 x_2 = y_1 + y_2 = log_a x_1 + log_a x_2$$

تعریف 4: فرضاً $\propto$ عدد حقیقی و تابع x^{α} برای تمام $x>0$ داده شده باشد، این تابع،تابع تواندار یا نمای $\propto$ یاد میشود.

قضیه5: تابع توانی $x^{\propto}$ با $x>0$ متمادی است این تابع تزاید میکند در صورتیکه $\propto> 0$ واکیداً تناقص میکند در صورتیکه $\propto> 0$ باشد.

ازتعریف لوگارتم داریم $x = e^{ln\, x}$ و همینطور $x^{\propto} = e^{\propto ln\, x}$ پس در همین صورت $x^{\propto}$ دارای ترکیب تابع نمائی e^{u} و تابع لوگارتمی ضرب آن در ثابت یعنی $u = \propto ln\, x$ توابع نمائی و لوگارتمی متمادی اند (مراجعه نمائید به : قضیه 4،3). به اساس قضیه راجع به ترکیب متمادیت تابع متمادی (مراجعه نمائید به: پراگراف 2.5) همین قسم تابع $x^{\propto}$ متمادی است.

تابع $ln\, x$ اکیداً تزاید میکند . همینطور تابع $x^{\propto} = e^{\propto ln\, x}$ اکیداً تزاید میکند ، درصورتیکه $\propto> 0$ باشد و اکیداً تناقص میکند و درصورتیکه $\propto> 0$ باشد ■

اگردر بررسی تابع $x^{\propto}$ فرض شود که $x>0$ باشد و در نقطه $a \neq o$ تابع درتمام قیمت نمائی $\propto$ تعریف نشده باشددرین موارد اگر $\propto> 0$ باشد پس دراینصورت دارای لیمت های زیراست:

$$\lim_{x \to 0} ln\, x = -\infty \qquad \text{همینطور} \qquad \lim_{x \to 0} x^{\propto} = \lim_{x \to 0} e^{\propto ln\, x} = o$$

برحسب تعریف (مراجعه نمائید به: تبصره 3) فرض میکنیم $o^{\propto} = 0$ ، $0 > \propto$ همینطور تعریف (7.20) تابع $x^{\propto}$ متمادی است. طوریکه این تابع درنقطه x=0 درنظرگرفته شود ، هرگاه $0 > \propto$ باشد، پس :

تابع $x^{\propto}$ ممکن است در بعضی $0 \neq \propto$ وبرای $x < 0$ تعریف شده باشد .

بطور مثال $n \in N$, $\frac{x^{\pm 1}}{2n-1}$, $x^{\pm n}$باشد.

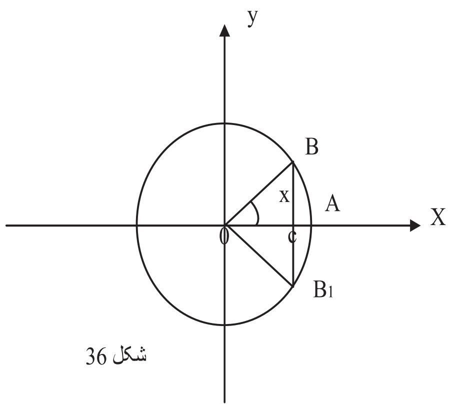
تابع تواندار $x^{\propto}$ درتمام نقاط متمادی است . اگر تابع در $x < 0$ تعریف شده باشد، پس ازاینجا نتیجه میشود که تابع در $x < 0$ تعریف شده است ، پس در اینصورت تابع یا جفت و یا طاق است . اگر همین قسم تابع جفت و یا طاق و متمادی راست بوده و برابر به صفر شود، پس دراین صورت این تابع دراین نقطه متمادی است . (چرا) این حالت درصورتیکه$\propto$ $\alpha > 0$ باشد (مراجعه نمائید به: 7.20) بجاخواهد بود.

7.3 توابع مثلثاتی و توابع معکوس مثلثاتی:

حالا به سوال متمادیت توابع مثلثاتی رسیدیم . در اینجا نمیخواهیم تعریف تحلیلی توابع را اکیدآ بیاوریم (طوریکه درحالت فوق توابع نمائی بکاربرده شد)بلکه از تعریف هندسی آنها و از مفاهیم ابتدائی ریاضی استفاده میکنیم. x در همه جا عدد حقیقی بوده و تحت $cot\,x, tan\,x, cos\,x, sin\,x,$ مفهوم تابع مثلثاتی را افاده میکند که دراینجا x زاویه است به رادیان اندازه میشود.

لیما: به هر x حقیقی غیر مساوات $|sin\,x| \le |x|$ درست است.

ثبوت:دایره را به شعاع R و مرکز (0) مدنظر میگیریم.



شکل 36

فرضاً شعاع $\overline{OB}$ زاویه x را با شعاع $\overline{OA}$ طوریکه $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ تشکیل میدهد و شعاع $\overline{OB_1}$ متناظر شعاع $\overline{OB}$ نظر به $\overline{OA}$ (شکل 36) میباشد.

از نقطه B عمود BC بالای شعاع $\overline{OA}$ ترسیم مینابیم ، ازاینجا $BC = Rsinx$ وهمینطور داریم که $\overline{BC} = CB_1$ طوریکه $\overline{BB_1} = 2Rsinx$ معلوم است طول قوس BAB_1 برابر $2Rx$ میباشد.

طول قطعه که دونقطه را وصل میکند از طول قوس هین دایره تجاوز نمیکند.

یعنی: $2Rsinx \leq 2Rx$ پس دراینصورت داریم که $sinx \leq x$. حال اگر $-\frac{\pi}{2} \leq x <$

0 باشد، پس دراینصورت $\frac{\pi}{2} \geq -x > 0$ و از اینجا به علت ثبوت $sin\,(-x) \;\leq\; -x$

مگر درحالت داده شده $sin(-x) = |sinx|$ و $-x = |x|$ همین قسم $|sinx| \;\leq |x|$ به

این ترتیب اگر $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ پس دراینصورت $|sinx| \;\leq |x|$ اگر همین قسم $|x| > \frac{\pi}{2}$ پس در

اینصورت $|sinx| \;\leq 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$.

قضیه 6: توابع $y = sinx$ و $y = cosx$ روی محور عددی متمادی است.

نتیجه: توابع $y = tgx$ و $y = ctgx$ درتمام x که درآن x (مطابقت به $sinx$)متمادی

است و صفر نمیشود.

ثبوت:همینطور $|sin \propto| \leq 1$ ، $|cos \propto| \leq 1$ در هر $\propto$ و به علت لیما $\left|sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leq$

$\frac{1}{2}|\Delta x|$ پس در اینصورت:

$$|sin(x + \Delta x) - sinx| \leq 2\left|sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|cos\,(x + \frac{\Delta x}{2})\right| \leq |\Delta x|$$

$$|cos(x + \Delta x) - cosx| \leq 2\left|sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|sin\,(x + \frac{\Delta x}{2})\right| \leq |\Delta x|$$

درصورتیکه $\Delta x \to 0$ بخش چپ غیرمساوات همین قسم به صفر تقرب میکند، به این معنی

که توابع $sinx$ و $cosx$ متمادی اند.

متمادیت $tgx = \frac{sinx}{cosx}$ و $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$ درنقاط که درآنها مخرج صفر نمیشود از متمادیت

$sinx$ و $cosx$ وقضا یا راجع به توابع متمادی به نتیجه رسیده ایم (س.م پراگراف 5.19).

قضیه7: هریکی از توابع معکوس مثلثاتی $arcsinx$ ، $arccosx$ ، $arctg$, $arcctg$ درساحه تعریف خود متمادی اند ، این را مستقیماً از قضیه 3 و4 در پراگراف 6 و متمادیت توابع اکیداً مونوتونی $sinx$ درقطعه (انتروال) $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ ، $cosx$ در انتروال $[0,\pi]$ ، tgx در انتروال $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ و $ctg\ x$ در انتروال $[0,\pi]$ نتیجه میشود.

7.4 متمادیت توابع ابتدائی:

متمادیت توابع اساسی ابتدائی در این پراگراف ثبوت شده اند که امکان ثبوت قضیه راجع به متمادیت توابع ابتدائی را میدهد.

قضیه 8: هر تابع ابتدائی در تمام نقاط ست تعریف شده خود متمادی است.

ثبوت: مطابق تعریف "هر تابع ایتدائی از توابع اساسی ابتدائی توسط عملیه های حسابی اعداد متناهی و ترکیبی حاصل میشود(مراجعه نمائید به: 5.3)".همین قسم متمادیت درست تعریف شده، مستقیماً از متمادیت توابع اساسی ابتدائی در ست های تعریف شده آنها (قضیه 7.1)مساوی است.

از خواص لیمت توابع مربوط به عملیات حسابی بالای توابع (س.م.پراگراف 5.10) و متمادیت ترکیبی توابع متمادی (مراجعه نمائید به:.پراگراف 5.16) نشان دهنده متمادیت توابع ابتدای میباشد.

§8.مقایسه توابع ، محاسبه لیمت ها

8.1: بعضی لیمت های مشهور

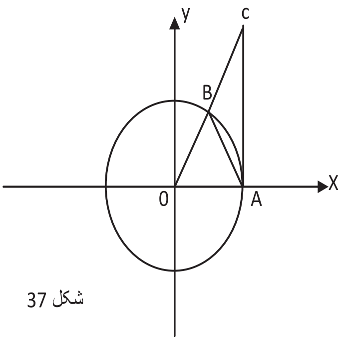
در این بخش لیمت هایي را محاسبه می نماییم که در آینده مکرراً از آنها استفاده خواهیم کرد.

لیما1: $$lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1 \dots\dots (8.1)$$

ثبوت: دایره را به شعاع R و مرکز(o)در نظر میگیریم.

فرضاً شعاع $\overline{OB}$ با شعاع $\overline{OA}$ زاویه x

طوریکه $\frac{\pi}{2} > x > 0$ را بوجود می آورد.



شکل 37

ازنقاط A و B قطعه خط را وصل میکنیم و از نقطه A به شعاع OA تا تقاطع نقطه C به امتداد شعاع OB (شکل 37) را رسم مینماییم .

در اینصورت مساحت مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ برابر به$\frac{1}{2}R^2 sinx$ و مساحت مثلث$\overset{\Delta}{AOC}$ برابر به :

$\frac{1}{2}R^2 tgx$

است. مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ عبارت از بخش موضعی مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ بوده که به نوبت خود عبارت از بخش موضعی مثلث $\overset{\Delta}{AOC}$ میباشد.

از اینجا : $\frac{1}{2}R^2 sinx < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx$.

و : $sinx < x < tgx$

همین قسم : $1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$

و حال نامساوات ها را معکوس می نماییم یعنی : $cosx < \frac{sinx}{x} < 1$

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1 \dots \dots (8.2)$$

یاد آور میشویم که به علت جفت بودن تابع $cosx$ و $\frac{sinx}{x}$ غیر مساوات (8.2) صادق است در صورتیکه $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ همینطور تابع $cosx$ متمادی و $cos0° = 1$ پس در اینصورت از (8.2) در صورتیکه $x \to 0$ واز مساوات (8.1) نتیجه میشود (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.10)

نتیجه 1: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1 \dots (8.3)$

درحقیقت : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{cosx} = 1$

نتیجه 2: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1 \ldots \ldots (8.4)$

تابع $y = sinx$ اکیداً مونوتونی بوده و در انتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ متمادی است. همینطور تابع معکوس $x = arcsiny$ اکیداًمونوتونی بوده و در انتروال $[-1,1]$ متمادی میباشد.

همین قسم $sin0° = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} sinx = 0$ و

$$\lim_{y\to 0} x = \lim_{x\to 0} arcsinx = 0$$

برای اینکه لیمت (8.4) را محاسبه نماییم ، از اصول تغییرات لیمت های تابع متمادی استفاده میکنیم(مراجعه نمائید به: قضیه 6 در پراگراف 5.16).

اگر $x = siny$ باشد، پس داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{arcsin\,(siny)}{siny} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{siny} = 1$$

نتیجه 3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1 \ldots \ldots (8.5)$$

این مساوات مشابه به (8.3) حاصل میشود.

لیما 2:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \ldots\ldots (8.6)$$

قبلاً در (مراجعه نمائید به:پراگراف 4.5) ثابت گردید که:

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \ldots\ldots (8.7)$. در اینجا $n = 1,2 \ldots$ است. از اینجا به علت لیما پراگراف (4.3) نتیجه میشود که برای هر ترادف $\{n_k\}$ عدد طبیعی طوریکه $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \ldots\ldots (8.8)$ پس داریم : $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e \ldots\ldots (8.9)$ حال فرضاً چنین ترادف $\{n_k\}$ طوریکه :

$$\lim_{k\to\infty} x_k = +0$$

موجود باشد، پس در این صورت داریم که: $\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \ldots\ldots (8.10)$ و $n_k > 0$

نشان میدهیم که $\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$ و بدون محدودیت عمومی ممکن است حساب کرد که $x_k < 1$ $k = 1,2 \ldots$(چرا) برای هر x_k چنین عدد طبیعی n_k دریافت میشود که $n_k \le \frac{1}{n_k} < n_k + 1$ و همین قسم $\frac{1}{n_{k+1}} < n_k \le \frac{1}{n_k}$ چنانچه به علت (8.10) داشتیم که $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$ پس در اینصورت داریم:

$$(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < (1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1} \ldots\ldots (8.11)$$

همینطور طبق (8.9) یاد آور میشویم که:

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k}} = \frac{\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1}}{\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})} = e$$

و

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k}\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k}) = e$$

از اینجا به سراغ لیمت (8.11) میرویم در صورتیکه $k \to \infty$ باشد حاصل می نماییم

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{2}{x_k}} = e \dots \dots (8.12)$$

همینطور $\{n_k\}$ ترادف اختیاری توسط شرایط (8.10) تأمین میگردد. پس در این صورت خود ثبوت است:

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \dots \dots (8.13)$$

فرضاً $\{x_n\}$ طوریکه $\lim_{x\to\infty} x_k = -0$ ترادف باشد ، پس درآنصورت داریم $x_k <$ $0 \dots \dots (8.14)$ ، $\lim \quad x_k = 0$ حاصل میداریم که $y_k = -x_k$ طوریکه $y_k > 0$ و $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$ چنانچه بدون محدودیت عمومی ممکن است حساب کرد که $k = 1,2 \dots$.

پس :

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=\lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}}=\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{1-y_k})^{\frac{1}{y_k}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)=\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{\frac{1}{z_k+1}}$$

یا : $z_k=\frac{y_k}{1-y_k}>0$ و $\lim_{k\to\infty} z_k=0$

و نیز به علت ثبوت مساوات (8.13) داریم که:

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}}=\lim_{k\to\infty}(1+z_k)=e$$

مگر ترادف $\{xR\}$ توسط شرط (8.14) تأًمین میگردد.

چنانچه $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ...... (8.15) به این ترتیب تابع $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ، $x\neq 0$ در نقطه 0 دارای لیمت راست و چپ است و برابر به عین عدد است ، همین قسم دارای لیمت دوطرفه بوده در صورتیکه $x\to 0$ برابر به e است(مراجعه نمائید به:پراگراف5.9).

نتیجه 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log a^{(1+x)}}{x}=\frac{1}{\ln a}$$

$a>0$ ، $a\neq 1$. و در خصوص $a=e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

در حقیقت با توجه به متماديت توابع لوگارتمي (س.م. قضيهٔ 4 از پراگراف 7)و قضيهٔ ليمت توابع مركب (مراجعه نمائيد به: پراگراف (5.16)) مساوات (8.6) داريم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log a^{(1+x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\log a^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\log a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log a^{e}=\frac{1}{\ln a}$$

نتيجه 2: $\lim\limits_{x\to 0}\ \frac{a^{x}-1}{x}=\ln a\ \dots\dots(8.17)$

به خصوص در صورتيكه $a=e$ باشد غير مساوات ذيل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1\ \dots\dots(8.18)$$

تابع $y=a^{x}-1$ اكيداً مونوتوني و متمادي در تمام محور عددي است و تابع معكوس $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ نيز اكيداً مونوتوني و متمادي است. در صورتيكه $y>-1$ و $x=0$ و $y=0$ ، همين قسم به $x\to 0$ و $y\to 0$ نشان داده ميشود. معادل است (مراجعه نمائيد به: قضيهٔ 4 در پراگراف 5.16).

جهت استفاده محاسبه ليمت (8.17) تغييرات اصول موقعيت متحول $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ همين قسم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\ln a$$

8.2 مقایسه توابع:

طوریکه ما به عملیات جمع ، تفریق ، ضرب ، بي نهایت کوچك آشنائي داریم ، همین قسم راجع به تقسیم توابع بي نهایت کوچك که بصورت عموم میگویند که تقسیم یك تابع بي نهایت کوچك بالاي توابع بي نهایت کوچك دیگر لازم نیست، که میتوان آنها را به حالت هاي مختلف تبدیل نمود.

بطور مثال: توابع بي نهایت کوچك $\propto(x)$ و $\beta(x)$ را در صورتیکه $x \to 0$ ذیلاً آورده شده انددرنظرمی گریم.

فرضاً بطور مثال $\propto(x) = x$ و $\beta(x) = x^2$ در اینصورت :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\propto(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\propto(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

اگر همین قسم $\propto(x) = x$ ، $\beta(x) = 2x$ پس در اینصورت $\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\propto(x)} = 2$ و اگر $\propto(x) = x$ ، $\beta(x) = x\sin\frac{1}{x}$ پس در آنصورت لیمت $\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\propto(x)}$ موجود نمیشود.

تمام توابع فرض شده که دراین پراگراف بررسي میشوند، در بعضي ست هاي $x \in R$ تعریف شده اند.

در اینجا ا x_0 چنین فهمیده میشود که یا عدد $x_0 \in R$ است یا یکي از بي نهایت ∞ + ،∞− میباشد. در این حالت در صورتیکه x_0 عدد باشد و یا x_0 نقطه مماس ست X باشد، در اینصورت احتمال کم وجود دارد تا x_0 نقطه لیمت ست x باشد.

در اینصورت ممکن است $x0 \in x$ و یا $x0 \notin x$ باشد.

آخرین گفتار بجا خواهد بود اگر تابع مورد نظر در این نقطه x_0 داراي کدام لیمت بي نهایت باشد. اگر همین نقطه x_0 یکي از بي نهایت هاي ∞ + ،∞− باشد، پس در اینصورت x غیر محدود بوده یکسان گرفته میشود.

حال مقایسه توابع در حوالي نقطه، باالخصوص، مقایسه توابع بي نهایت کوچك و بي نهایت بزرگ که حالت هاي اساسي میباشند را مورد مطالعه قرار میدهیم.

تعریف 1: اگر براي توابع $f: X \to R$ و $g: X \to R$ چنین عدد ثابت $c > 0$ موجود شود که در بعضي حوالي نقطه x_0 براي تمام $x \in X$ غیر مساوات

$|f(x)| \leq c|g(x)| \ldots \ldots (8.19)$ تطبیق شود، پس در این صورت تابع f بنام تابع محدود در مقایسه تابع g در حوالي نقطه x_0 یاد میشود و در این حالت مینویسند $f(x) = 0(g(x))$ ، $x \to x_0$ در اینجا "$f(x)$ بزرگ از $g(x)$ است، در صورتیکه x به x_0 تقرب کند" خاطر نشان میسازیم که نوشته $x \to x_0$ در اینجا مفهوم دیگر نسبت به نوشته معمول دارد. در اینجا این نوشته $x \to x_0$ تنها خواص مورد بررسي را اشاره میکند و به بعضي حوالي نقطه x_0 اشاره میگردد.

لیما 3: اگر $f(x) = \varphi(x)g(x)$ ، $x \in X$ باشد و داراي لیمت متناهي $\lim \varphi(x) = R$ باشد، پس $f(x) = 0(g(x))$ ، $x \to x_0$.

ثبوت: از موجودیت لیمت متناهي $\lim \varphi(x) = R$ (مراجعه نماید به خاصیت $1°$ لیمت توابع در پراگراف 5.10) موجودیت نقطه حوالي U $(x0)$ نقطه $x0$ نتیجه میشود که تابع φ محدود در X ∩U (x_0) است.

پس در اینصورت ثابت $c > 0$ موجود است که براي تمام $x \in X$ ∩U $(x0)$ غیر مساوات $|\varphi(x)| \leq c$ صدق مي نماید. همینطور غیر مساوات $|f(x)| = |\varphi(x)||g(x)| = c|g(x)|$ طبق تعریف 1 چنین معني میدهد که $f(x) = 0(g(x))$ ، $x \to x0$.

مثالها 1: $\frac{1}{\text{x}} = 0(\frac{1}{x^2})$ در صورتیکه $x \to x_0$ بر حسب اندازه $\left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ در صورتیکه $|x| \geq 1$ باشد.

یادداشت: $f(x) = 0(1)$ ، $x \to x0$ معني میدهد که تابع f در بعضي حوالي نقطه $x0$ محدود است.

بطور مثال: $\frac{tg2x}{x} = 0(1)$ در صورتیکه $x \to 0$ یا $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg2x}{x} = 2$ یعني تابع $\frac{tg2x}{x}$ در حول نقطه $x = 0$ محدود است.

تعریف 2: اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ طوریکه $f = 0(g)$ و $g = 0(f)$ باشد ، در صورتیکه $x \to x0$ پس در اینصورت این توابع را بنام توابع هم درجه یاد میکنند، اگر $x \to x0$ و به شکل $f(x) \asymp g(x)$ نوشته شود ، این مفهوم بسیار مرکب است، در این حالت تابع f و g یا بي نهایت کوچك یا بي نهایت بزرگ میباشد، در صورتیکه $x \to x0$.

بطور مثال: توابع $\propto = x$ و $\beta = x(2 + sin\frac{1}{x})$ در صورتيكه $x \to 0$ عبارت از بي نهايت كوچك درجه يك ميباشد. طوريكه :

$$\left|\frac{\propto}{\beta}\right| = \frac{1}{\left|2 + sin\frac{1}{x}\right|} \leq \frac{1}{2 - \left|sin\frac{1}{x}\right|} \leq 1$$

$$\left|\frac{\beta}{\propto}\right| = \left|2 + sin\frac{1}{x}\right| \leq 2 + \left|sin\frac{1}{x}\right| \leq 3$$

ليما 4: اگر ليمت متناهي $lim_{x \to x0} \frac{f(x)}{g(x)} = R \neq 0$ موجود شود، پس در اينصورت:

$$x \to x0، f(x) \asymp g(x)$$

ثبوت: در صورتيكه $x \to x_0$ تعيين ليمت كسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ و چنين حوالي $v(x0)$ نقطه $x0$ كه براي تمام نقاط $x \in x \cap \cup (x_0)$ غير مساوات $g(x) \neq 0$ صدق نمايد براي x آنها را حل مي نمايم $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، پس $f(x) = \varphi(x)g(x)$ و $lim_{x \to x0} \varphi(x) = R$ همين قسم به اساس (ليما 3) داريم $f(x) = 0(g(x))$، $x \to x_0$ از شرط $lim_{x \to x0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ نتيجه ميشود كه چنين حوالي $v(x0)$ نقطه x_0موجود ميشود كه براي هر $x \in X \cap \cup (x_0)$ غير مساوات $\frac{f(x)}{g(x)}$ صادق است (مراجعه نمائيد به : خواص°2 ليمت توابع پراگراف 5.10) و همين قسم غير مساوات $f(x) \neq 0$ براي $x \in x \cap v(x0)$ حاصل مي نماييم.

$\psi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ پس $g(x) = \psi(x)f(x)$ ، $lim\,\psi(x) = \frac{1}{R}$ از اينجا دوباره مطابق

ليما3 $g(x) = 0(f(x))$ ، $x \to x0$. در مورد توابع $f(x) = 3x^2$ و $g(x) =$

$sin\,x^2$ داريم:$\frac{1}{3} = lim\frac{sinx^2}{x^2}\frac{1}{3} = lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}$ (مراجعه شود به (8.1)) از اينجا

مطابق ليما 4 توابع $3x^2$ و $sin\,x^2$ هم درجه اند ، در صورتيکه $x \to 0$.

تبصره: ياد آور ميشويم كه شرط (8.19) براي تساوي ذيل ميباشد و چنين تابع φ: X $\to R$

محدود موجود ميشود كه در بعضي حوالي مجاورت x_0براي تمام $x \in X$ مساوات

$f(x) = \varphi(x)g(x)$ صادق ميباشد.

حقيقتاً با بكار بردن اين شرط ، محدوديت تابع φ مستقيماً از غير مساوات (8.19) نتيجه ميشود. بر عكس اگر در بعضي حوالي نقطه $x0$ شرط (8.19) تطبيق شود، پس در اينصورت فرض ميكنيم كه:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{اگر } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } g(x) = 0 \end{cases}$$

حاصل مي نماييم كه $f(x) = \varphi(x)g(x)$ و تابع φ قرار معلوم محدود است (براي نقاط $x \in X$ حوالي نقطه $x0$ مدنظر است).

تعريف 3: توابع $f: X \to R$ و $g: X \to R$ در صورتيکه $x \to x0$را بنام توابع معادل ياد می نمایند. اگر چنین تابع φ:X → R موجود شود که در بعضی حوالی نقطه $x0$ برای تمام

نقاط $x\epsilon X$ مساوات $f = \varphi(x)\, g(x)$ ... (8.20) صدق نماید، پس در اینصورت داریم که: $lim_{x\to x0}\, \varphi(x) = 1$ .... (8.21) یاد آور میشویم که موجودیت لیمت توابع در نقطه داده شده عبارت از خواص ناحیوی توابع میباشد وقیمت تابع φ در تعریف یاد شده رول مجاورت را بازی نمیکند.

اگر شرط (8.21) صادق باشد ، پس در اینصورت چنین حوالی $U = U\ (x_0)$ نقطه $x0$ یافت میشود، در صورتیکه $x \in X \cap U$ غیر مساوات $\varphi\ (x) \neq 0$ صادق باشد. (مراجعه شود به خواص 2º لیمت های توابع در پراگراف 5.10).

فرضاً $\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ ، $x \in x \cap U$ باشد، میبینیم که شرایط (8.20) و (8.21) معادل شرایط زیر اند:

$$g\ (x) = \psi(x)\, f(x)\, , x \in X \cap v \ldots . (8.20^{/})$$

$$\lim_{x\to x_0} \psi(x) = 1 \ldots . (8.21^{/}$$

به این ترتیب اگر توابع f و g معادل باشند ، طوریکه $x \to x0$ ، پس در اینصورت توابع f و g نیز معادل اند . در صورتیکه $x \to x_0$ پس در اینصورت داریم که تعادل دو تابع خواص متناظر را بوجود می آورد. یاد آور می شویم که خواص توابع فوق با خواص توابع درجه یک متناظر میباشد و خواص یک تابع بزرگ نسبت به یک تابع کوچک متناظر نمیباشد.

توابع (x) f و (x) g معادل اند، در صورتیکه $x \to x_0$ پس در اینصورت $g \sim f$ در صورتیکه $x \to x_0$ باشد .

مساوات تعادل توابع توسط سمبول ذیل نشان داده میشود :

$f(x) \cong g(x) \ldots .(8.22)$ در صورتیکه $x \to x0$ از گفته های بالا نتیجه میشود که اگر $f \sim g$ باشد ، پس در اینصورت $g \sim f$ است ، درصورتیکه $x \to x0$. یاد آور میشویم که اگر در شرط تعریف 3 توابع f و g همین قسم تابع φ در نقطه $x0$ تعریف شده باشد ، پس در این صورت داریم که $x0 \in x$ و لیمت (8.21) در صورتیکه $x \to x0$ بر حسب ست که دارای نقطه $x0$ میباشد گرفته میشود.

از اینجا تابع φ در نقطه x_0متمادی است، پس از شرط (8.21) نتیجه میشود که:

$\varphi\ (x0) = 1$.

مثالها :

1) $x^2 \sim \frac{x^2}{1+x^4}$ در صورتیکه $x \to 0$ ، حقیقتاً فرضیه $\varphi\ (x) = \frac{1}{1+x^4}$ را حاصل می نماییم: $\frac{x^2}{1+x^4} = \varphi\ (x)x^2$ و $lim_{x\to 0}\, \varphi\ (x) = lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^4} = 1$

2) $x^2 \sim \frac{x^6}{1+x^2}$ ، در صورتیکه $\to \infty$. در حقیقت اگر $\varphi\ (x) = \frac{x^4}{1+x^4}$ باشد ،

پس: $\frac{x^6}{1+x^4} = \varphi\ (x)x^2$ و $lim_{x\to\infty}\, \varphi\ (x) = lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1$

فرضاً چنین حوالی $v^\circ = v^\circ(x0)$ نقطه x_0موجودباشد که برای هر $x \in x \cap v^\circ$ غیر مساوات مجاورت $f(x) \neq 0$ و $g(x) \neq 0$ و $x0 \in x$ راصدق کند . پس در این

صورت شرایط (8.20) و (8.21) معادل بوده و مطابقت $\lim_{\substack{x\to x0 \\ x\in x\cap U^{\circ}}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ و همین

قسم در مطابقت به $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X\cap U^{\circ}}} \frac{g(x)}{f(x)}$ است.

حقیقتاً واضح است که با این نسبت حالت های تابع f و g در ست $x \cap v^{\circ}$ و X و $x0 \notin X$ به

صفر بر نمیگردد. این مستقیماً از شرایط (8.20) و (8.21) نتیجه میشود.

بر عکس اگر شرایط فوق قابل تطبیق با شند، پس در اینصورت کافی است حاصل نماییم:

$\varphi\ (x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، $x \in X \cap U^{\circ}(x0)$ و $\varphi\ (x0) = 1$ پس در اینصورت معلوم است که

برای تابع φ شرایط (8.20) و (8.21) تطبیق میشوند.

اگر $(8.23)\ldots. f \sim g$ و $g \sim f$ در صورتیکه $x \to x0$ ، پس $(8.24)\ldots. f \sim h$ در

صورتیکه $x \to x0$ باشد .

در حقیقت از شرایط (8.23) نتیجه میشود که چنین حوالی $U = U(x0)$ نقطه $x0$ و توابع

$\varphi : x \cap U \to R$ و $\psi : x \cap U \to R$ موجود شوند.

که برای هر $x \in X \cap U$ مساوات $f(x) = \varphi(x)g(x)$ و $g(x) = \psi(x)h(x)$ و

$\lim_{x\to x0} \varphi(x) = \lim_{x\to x0}\psi(x) = 1$ صدق نماید. از اینجا:

$f(x) = \varphi(x)\ \psi(x)\ h(x)$

طوریکه $\lim_{x\to x0} \varphi\ (x)\psi(x) = 1$ باشد.

پس در اینصورت مساوات (8.24) تطبیق میشود. از پراگراف (8.1) نتیجه میشود که

هرگاه $x \to 0$ ، تعادل بی نهایت کوچک ذیل صادق است:

$x \sim sinx \sim tgx \sim arcsinx \sim arcctgx \sim ln(1+x) \sim e^{x} - 1$

از تعادل فوق بصورت عموم نتیجه میشود که آنرا بشکل لیما ذیل فورمول بندی می نماییم.

لیما 5: اگر $u(x)$ چنین یک تابع باشد که $lim_{x\to x0}\, u(x)=0 \ldots.(8.25)$ در صورتیکه $x\to x0$ پس:

$$u(x)\sim sinu(x)\sim tgu(x)\sim arcsinu(x)\sim arctgu(x)\sim ln[1+u(x)]\sim e^{u(x)}-1\ldots(8.26)$$

ثبوت: بطور مثال نشان میدهیم که: $sin\, u(x)\sim u(x)\,,\;\; x\to x0 \ldots\ldots(8.27)$

اگر $u: X\to R$ و $lim_{x\to x0}\, u(x)=0$ باشد، پس برای تمام $x\in X$ تابع $\varphi: X\to R$ به ترتیب ذیل تحلیل و تجزیه میکنیم:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{sinu(x)}{u(x)} & \text{اگر} \qquad u(x)\neq 0 \ldots\ldots(8.28)\\ 1 & \text{اگر} \qquad u(x)=0\end{cases}$$

و نیز نشان میدهیم که: $lim_{x\to x0}\, \varphi(x)=1 \ldots\ldots(2.29)$ برای این کار، ست X را به دو ست فرعی جدا تجزیه می کنیم:

$$x_2=\{x\in X: u(x)=0\} \quad \text{و} \quad x_1=\{x\in X: u(x)\neq 0\}\ldots\ldots(8.30)$$

اول، فرضاً ست x_1 و x_2 غیر خالی باشند و x_0نقطه دور متناهی مماس یا بی نهایت هر یکی از این ست ها باشد و تابع $\frac{sinu(x)}{u(x)}$ در ست x_1 تعریف شده باشد، پس بر حسب قضیه راجع به لیمت توابع مرکب (س.م قضیه 6 در پراگراف 5.16) داریم که:

$$\lim_{\substack{x\to x0\\ x\epsilon x_1}}\varphi(x)=\lim_{\substack{x\to x0\\ x\epsilon x_1}}\frac{sinu(x)}{u(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{sinu}{u}=1$$

در اینجا ازخواص دیگر لیمت های توابع استفاده شده است. اگر تابع (در حالت داده شده $\frac{\sin u}{u}$) در صورتیکه $u \to u_0$ و در بعضی ست ها دارای لیمت باشد، پس در این صورت طبق لیما 1 در پراگراف 5.4 عمل صورت میگیرد. در صورتیکه $u \to u_0$ در هر ست فرعی این ست دارای عین لیمت باشد (حالت بررسی شده بر حسب ست های فرعی محور عددی متشکل از ست قیمت تابع $u(x)$ خلاف صفر) در ست x_2 عین تابع φ برابر به 1 است. از اینجا $\lim_{\substack{x \to x0 \\ x \epsilon x_2}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \to x0 \\ x \epsilon x_2}} 1 = 1$ به این ترتیب در هر یکی از ست های x_1 و x_2 تابع φ در صورتیکه $x \to x_0$ دارای یک لیمت میباشد و برابر به 1 است.

همینطور $x = x_1 \cup x_2$ بوده، در صورتیکه $u \to u0$ دارای عین لیمت بر حسب تمام ست ها میباشد. (مراجعه نمائید به: لیما 5 در پراگراف 5.8) پس در اینصورت حالت بررسی شده در مساوات (8.29) ثبوت شد.اگر همین قسم یکی از ست های x_1 یا x_2 خالی باشد یا نقطه $x0$ نقطه مماس (متناهی ، یا بی نهایت دور) در یکی از این ست ها نباشد، پس در اینصورت مساوات (8.29) نیز بجا خواهد بود. همینطور دراین حالت ها لیمت تابع φ در صورتیکه $x \to x0$ بر حسب ست x به یکی از ست های x_1 یا x_2 میرسد. برای این ست ها لیمت مورد نظر برابر به واحد است. و همین قسم مساوات (8.29) در زمینه ثبوت است. و نیز از مساوات (8.28) نتیجه میشود که برای تمام $x \in X \cap v^{\circ}(x0)$ نسبت $\sin u(x) = \varphi(x) u(x)$ بجا خواهد بود.

پس در اینصورت ثبوت مساوات (8.26) صادق میباشد.

تعریف 4: تابع $\alpha : X \to R$ درمقایسه با تابع $f : X \to R$ درصورتیکه $x \to x_0$ بنام تابع بینهایت کوچک یاد میشود اگر تابع مانند $\varepsilon : X \to R$ موجود شود که دربعضی حوالی نقطه x_0 برای هر $x \in X$ مساوات : $\alpha(x) = \varepsilon(x) f(x)$.......(8−31) صدق نماید

و $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.........(8.32) طوریکه برای توابع معادل بنابر موجودیت خواص موضعی لیمت توابع درنقطه‌قیمت تابع $\varepsilon(x)$ درتعریف حوالی اشاره شده موجود نیست که درصورت لوزم میتواند اختیاری انتخاب شود.

اگر تابع α درمقایسه با تابع f درصورتیکه $x \to x_0$ بی نهای کوچک باشد، پس در اینصورت مینویسند: $x \to x_0, \alpha(x) = 0(f(x))$ وچنین میخوانند $\alpha(x)$ ازتابع $f(x)$ کوچک است درصورتیکه $x \to x_0$ بنابرین تعریف که تابع α عبارت ازبی نهایت کوچک میباشد درصورتیکه $x \to x_0$ ،یاد آورمیشویم که اگر درشرایط تعریف 4 تابع بی نهایت کوچک درمقایسه با دیگر توابع f و α باشد وهمین قسم تابع $\varepsilon(x)$ درنقطه x_0 تعریف شده باشد، پس درینصورت داریم که $x_0 \in x$ پس در اینصورت لیمت (8.32) درصورتیکه $x \to x_0$ برحسب ست که تشکیل دهنده نقطه x_0 میباشد گرفته میشود . همین طور دراین حالت تابع $\varepsilon(x)$ درنقطه x_0 متمادی است ونیزطبق (8.33) مساوات $\varepsilon(x_0) = 0$ بجا خواهد بود ازین عمل مکرراً درآینده استفاده خواهیم کرد .

اگر چنین نقطه محذوف حوالی $U^0 = U^0.(x_0)$ درنقطه x_0موجود شود که برای تمام نقاط $x \in x \cap U^0$ درحالت $x_0 \in x$ غیر مساوات $f(x_0) \neq 0$ صادق باشدو به غیر از آن $\propto (x_0) = 0$ باشد، پس شرایط (8.31) و (8.32) معادل شرط :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X\cap V}} \frac{\propto(x)}{f(x)} = 0 \dots\dots\dots (8.33)$$

درحقیقت برای اجرای عملیات بالای غیر مساوات صفری ازتابع f شرط (8.31) و (8.32) کار گرفته میشود، برعکس اگر (8.33) تطبیق شود، پس کافی است حاصل نماییم:

$\varepsilon(x) = \frac{\propto(x)}{f(x)}$, $x \in X \cap V^0$. واگر $x_0 \in X$ باشد پس، $\varepsilon(x_0) = 0$ بنابر این شرایط (8.31) صدق میکند. درین حالت وقتیکه f(x) خودش بی نهایت کوچک باشد و $x \to x_0$ نماید میگویند که تابع $\propto = o(f)$ درصورتیکه $x \to x_0$ نی نهایت کوچک درجه بلند نسبت به fمیباشد.

اگر $\propto \asymp (f(x)^n$, $x \to x_0$ ، پس در اینصورت $\propto$ بی نهایت کوچک را بنام بی نهایت کوچک درجه n نظر به بی نهایت کوچک f یاد می نمایند، طوریکه .... n=1,2

بطور مثال: $x^3 = 0(\sin x^2)$ درصورتیکه $x \to x_0$ پس :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} x, \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 0.1 = 0$$

بی نهایت کوچک $\propto (x) = x^3$ عبارت از بی نهایت کوچک از درجه بلند نسبت به $f(x) = \sin x^2$ میباشد، درصورتیکه $x \to x_0$ بی نهایت کوچک $\propto (x) = \frac{1}{x^4}$ بنام بی نهایت کوچک درجه چهارم نظربه بی نهایت کوچک $f(x) = \frac{1}{x}$ یاد میشود. درصورتیکه $x \to x_0$ حقیقتاً سمبول (0 کوچک) میتواند تنها به بی نهایت کوچک استفاده کرد.

بطور مثال: $x = 0(x^2)$ درصورتیکه $x \to x_0$ یادآور میشویم که f=0(g) درصورتیکه

$x \to x_0$ پس درآنصورت مانندگذشته f=0(g) درصورتیکه $x \to x_0$ درحقیقت فرضاً

f=εg طوریکه $\lim_{x \to x_0} \varepsilon = 0$ دراینصورت تابع ε=ε(x) محدود در مقطع ست X یا بعضی

حوالی $U(x_0)$ نقطه (x_0) (مراجعه شودبه پراگراف 5.10) $|\varepsilon(x)| \le c$ میباشد. همین

قسم $|f(x)| \le c|g(x)|$ برای تمام $x \in X \cap V(x_0)$ به این معنی که:

$x \to x_0$ ، $f = 0(g)$

فرضاً: توابع $f: X \to R$ و $g: X \to R$ داده شده اند و چنین تابع $\varphi: X \to R$ موجود شود

که برای تمام تقاطع ست X در بعضی حوالی U=U (x_0) نقطه x_0 واقع باشد مساوات ذیل

صادق است $f(x) = \varphi(x)g(x)$ وقتیکه اگرتابع $\varphi(x)$ در U محدود باشد پس در

اینصورت $f(x) = 0(g(x))$ ، $x \to x_0$ اگر $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$ پس $f(x) \approx g(x)$

، $x \to x_0$ اگر $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ پس:

$$\underset{x \to x_0}{f(x) \approx 0(g(x))}$$

تمرین: فرضاً $\beta = 0(x^2)$ در صورتیکه $x \to x_0$ ، $\lim_{x \to x_0} \propto (x) = 0$ باشد، ثابت

نمایید که در این حالت $\beta = 0(\propto)$ درصورتیکه $x \to x_0$ یاد آور میشویم که درحالت

خاص سیت X میتواند ست اعداد طبیعی (N) باشد. و در صورتیکه $x_0 = +\infty$ مفهوم

ترادف $\{x_n\}$ محدود را برحسب مقایسه با ترادف $\{y_n\}$ حاصل می نماییم یعنی:

$n \to \infty$ ، $x_n = 0(y_n)$

ترادف $\{x_n\}$ با ترادف $\{y_n\}$ درجه یکسان دارد. یعنی $x_n \approx y_n$ ، $n \to \infty$.

ترادف $\{x_n\}$ مجانب مساوی (معادل) با ترادف $\{y_n\}$ دارد.

یعنی : $x_n = 0(y_n)$ ، $n \to \infty$

استفاده از مساوات با سمبول شکل 0 و 0 به این معنی که در مفهوم عادی عبارت از مساوات نمیباشد.

طوریکه ، اگر $\propto_1 = 0(\beta)$ در صورتیکه $x \to x_0$ و $\propto_2 = 0(\beta)$ در صورتیکه $x \to x_0$ ، پس در آنصورت در کار اشتباه صورت گرفته است. از اینجا به نتیجه میرسیم که $\propto_1 = \propto_2$ است، که چنین حالت در مساوات عادی موجود است.

بطور مثال: $x^3 = 0(x)$ و $x^2 = 0(x)$ در صورتیکه $x \to 0$ و $x^2 \neq x^3$ است.

بطور مشابه، اگر $f + 0(f) = g + 0(f)$ در صورتیکه $x \to x0$ ، پس در اینجا ممکن اشتباه کرده باشیم که به عین سمبول به نتیجه برسیم که $f = g$ هدف در این است که یکی از سمبول های $0(f)$ یا $o(f)$ میتواند توابع مختلف دقیق رانشان دهد، بنابر این وضعیت مربوط به تعریف سمبول های $0(f)$ و $o(f)$ ، ما بر موجودیت تمام کلاس های توابع که دارای خواص مشخص باشد، نایل گردیدیم. از جمله (کلاس تابع محدود در بعضی حوالی نقطه x_0 با مقایسه با تابع f ،و کلاس تابع بی نهایت کوچک با مقایسه با تابع $f(x)$ در صورتیکه $x \to x0$) را میتوان دقیق نوشت ، نه به $\propto = 0(f)$ و نه به $\propto = o(f)$ بلکه مطابقت به $\propto \in 0(f)$ و $\propto \in o(f)$ دارد. یکی از این اصول موجوده محاسبه مشکل بر حسب فورمولبندی که در آن سمبولهای 0 و o دیده میشود، صورت میگیرد.

همینطور ما حالت اولی $\propto = 0(f)$ و $\propto = o(f)$ را مشاهده میکنیم و همیشه این مساوات را میخوانیم ، بر اساس تعریف فوق تنها به یک طرف از چپ به راست میتوان این مساوات را انتقال داد (در صورتیکه واقعاً غلط نباشد).

بطور مثال نوشته $\propto = o(f)$ ، $x \to x_o$ یعنی تابع $\propto$ عبارت از تابع بی نهایت کوچک در مقایسه با تابع f ، در صورتیکه $x \to x_0$ میباشد.

از اینجا هر تابع بی نهایت کوچک در مقایسه با تابع f مساوی به $\propto$ است. با استفاده از مثال فوق سمبولهای 0 و o را در مساوات ذیل ثبوت می نماییم:

$0(f) = 0(f) \ldots \ldots (8.34)$ در اینجا c عدد ثابت است.

طبق گفتار فوق باید نشان داد که اگر $g = 0(cf)$ باشد پس $g = 0(f)$ است ، حقیقتاً اگر $g = 0(cf)$ باشد، پس $g = \varepsilon cf$ طوریکه $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ و $\varepsilon_1 = c\varepsilon$ را حاصل می نماییم دیده میشود که $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ یعنی $g = 0(f)$.

باید یادآور شویم که روش راجع به استفاده از سمبولها 0،0 خاتمه نیافته است.

براي اینکه فورمولهاي جداگانه همراه با این سمبولها بتواند هدایت را نه تنها در شمارش از چپ به راست نشان دهد، بلکه از راست به چپ نیز نشان دهد . طوریکه در فرمول (8.34) نشان داده شد عملي گردد ، در صورت $c \neq 0$ باشد شمارش از طرف راست به طرف چپ درست است.

8.3 توابع معادل:

اگر تابع $f(x)$ به تابع $g(x)$ تعویض شود، تفاضل $f(x) - g(x)$ بنام خطای مطلق یاد میشود و نسبت $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ به خطای نسبي تعویض میشود. اگر اصول تابع $f(x)$ در

صورتيكه $x \to x_0$ مطالعه شود، پس در اينصورت تعويض اين تابع هميشه به تابع $g(x)$ داراي اهداف ذيل ميباشد:

1) تابع $g(x)$ در مفهوم نظر به تابع $f(x)$ بسيط ميباشد.
2) خطايي مطلق آن به صفر تقرب ميكند.

در صورتيكه $x \to x_0$، يعني $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0$ دراين حالت ميگويند كه تابع $g(x)$ به تابع $f(x)$ در نزد يكي نقطه x_0تقرب ميكند. بطور مثال تمام توابع f و g بي نهايت كوچك در صورتيكه $x \to x_o$ داراي چنين خواص ميباشد. ذيلاً نشان خواهيم داد كه در اين تابع، كوچكتر از تابع فوق نيز موجود است كه در بين خود معادل ميباشند.

$g(x) \sim f(x)$ ، $x \to x_0$ به اساس همين خواص ، نه تنها خطای مطلق $f(x) \sim g(x)$ بلكه خطای نسبي $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ نيز در صورتيكه $x \to x_0$ ، به صفر تقرب ميكند، يعني $\lim \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = 0$ به اين معني كه تابع معادل به اسانی نظر به ديگر توابع به صفر تقرب ميكند . بطور مثال توابع x ، $\frac{1}{2}x$ ، $2x$ ، $10x$ در صورتيكه $x \to 0$ بنام توابع بي نهايت كوچك ياد ميشوند. و همين قسم $sinx$ و خطای نسبي به عوض $sinx$ ، هر يكي از آنها در صورتيكه $x \to 0$ ، به صفر تقرب ميكند.

يعنى:

$$\lim_{x\to 0}(sinx - x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(sinx - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}(sinx - 2x)$$

$$= \lim_{x\to 0}(sinx - 10x) = 0$$

تمام توابع ياد شده، مثل $x = g(x)$، توسط همين خواص بوجود مي آيند. كه خطاى نسبي به عوض $sinx$ اين تابع به صفر نزديك ميشود،درصورت $x \to 0$ يعني $\lim_{x \to x_0} \frac{sinx-x}{sinx} = \lim_{x \to x_0} (1 - \frac{x}{sinx}) = 0$ تقرب كردن خطاى نسبي $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ به صفر نزديك شود در صورتيكه $x \to x_0$ ميتواند از سمبول (0 كوچك) استفاده نمود.

يعني $f(x) - g(x) = 0(f(x))$ ، $x \to x_0$. مشخصات خواص توابع معادل را در قضيه ذيل فورمولبندي مي نماييم:

قضيه1: براي اينكه توابع $f: x \to R$ و $g: x \to R$ در صورتيكه $x \to x_0$ معادل باشند، لازم و كافي است تا شرط $x \neq x_0$ تطبيق شود.

$f(x) = g(x) = 0\big(g(x)\big)$ ، $x \to x_0$ ...... (8.35) ثبوت فورمول (8.35) عبارت از نوشته مختصر تعريف3 ميباشد.

در حقيقت شرط (8.21) ، $lim_{x\to x0}\varphi(x) = 1$ معادل به شرط $\varphi(x) = 1 + 2(x)$ طوريكه :

$$f(x) = \varphi(x)g(x)$$

معادل شرط:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$$

$f(x) = (1 + \varepsilon(x)g(x)) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$

$\lim\limits_{x\to x0} 2(x) = 0$

پس در اینصورت داریم که :

$f(x) = g(x) + 0(g(x))$ ، $x \to x_0$

مثال1: $ctgx = \frac{1}{x} + 0(\frac{1}{x})$ ، $x \to 0$ حقیقتاً به علت قضیه 1 بطور کافي میتوان نشان داد

که $ctgx \sim \frac{1}{x}$ ، $x \to 0$ که مستقیماً از مساوات (8.3) نتیجه میشود که

$\lim_{x\to 0} \frac{ctgx}{1/2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = 1$ در این حالت وقتیکه چنین حوالي .... $v^{\circ}(x0)$ نقطه

x_0موجود شود، توابع $f: X \to R$ و $g: X \to R$ با مقطع $x \cap U^{\circ}(x_0)$ ، $x_0 \in X$ بر

صفر رجعت نمیکنند.

از قضیه 1 معلوم است که تابع f و g در صورتیکه $x \to x_0$ ، معادل اند، اگر وفقط اگر

وقتیکه خطای نسبی $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ به صفر تقرب میکند ، در صورتیکه $x \to x0$.

نتیجه: فرضاً $\lim_{x\to x0} \frac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$ باشد ، پس $g \sim cf$ و

$g(x) = cf(x) + [f(x)]$ در صورتیکه $x \to x_0$.

ثبوت اگر $\lim_{x\to x0} \frac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$ باشد، پس در اینصورت $\lim_{x\to x0} \frac{g(x)}{cf(x)} = 1$.

همینطور $g \sim cf$ در صورتیکه $x \to x_0$.

از اینجا بر حسب قضیه 1 داریم:

$g(x) = cf(x) + 0[cf(x)]$ (مراجعه نمائید به: اخیر پراگراف 8.2)

$x \to x_0$ ، $g(x) = cf(x) + 0(f(x))$

قضیه 2: فرضاً توابع f، $f1$ و g ، $g1$ در ست x داده شده باشند.

و $g(x)\sim g1(x)\sim f(x)\sim f1(x)$ ....،

درصورت $x \to x_o$ پس در آنصورت اگر داشته باشیم که :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \ldots (8.36)$$

پس همین قسم داریم که:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

از اینجا : $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \ldots (8,36)$$

ثبوت:شرط $x \in X, \sim x \to x_o\ , g\sim g_1\ , f\sim f_1$

به این معنی که چنین حوالی U=x_0 نقطهx_o و جود دارد که توابعφ،γ در مقطع $x \cap U$ تعریف شده اند.

$$f(x) = \varphi(x)f_1(x), g(x) = \gamma(x)g_1(x), \qquad x \in X \cap U$$

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \gamma(x) = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)f_1(x)}{\gamma(x)g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \gamma(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

پس در اینصورت مساوات (37،8)بجا خواهد بود.

از موجودیت لمت $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 1$ نتیجه میشود که حوالی $U=\dot{U}(x_o)$ را ممکن چنین

استخراج نمود: تمام نقاط $x \in X \cap U$ بتوانند غیر مساوات$0 \neq \gamma(x)$ راصدق کنند واز

موجودیت لمت $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ بر حسب ست x نتیجه میشود که حولی U میتواند غیر

مساوات$0 \neq$ g(x) راصدق نماید. همینطور حاصل تقسیم $\frac{f(x)}{g(x)}$ باید در مقطع $x \cap U$ ست

x با بعضی حوالی v درنقطهx_o باید تعریف شده باشد. پس افاده های فوق تماماً بجا خواهند

بود.■

در آخر هر دو طرف مساوات (37،8) باهم مساوی اند. و از ثبوت قضیه نتیجه میشود که لیمت در طرف چپ وقتی موجود میشود که لیمت طرف راست موجود باشد.و در حالت موجودیت لمت مطابقت میکند. درپراکتیک ازقضیه 2 استفاده میشود. و برای بررسی محاسبه افاده های که آیا لمت دارد یا خیر، دقیقاً معلوم نمیشود استفاده به عمل می آورد.

(8،4): میتود جدا نمودن قسمت اساسی تابع و استفاده از آن برای محاسبه لمت ها

فرضاً توابع $X \to R$: β و $X \to R$: X داده شده باشند. اگر تابعβ برای تمام $x \in X$ به شکل ذیل جابجا نماییم.

$$x = x_0 \, , \beta(x) = \propto(x) + 0(\propto(x))$$

پس در اینصورت تابع $\propto$ بنام قسمت اساسی β یاد میشود ، درصورت که $x \to x_0$.

مثال:- قسمت اساسی تابع $\sin x$ درصورتیکه $x \to 0$ برابر به x یا

$\sin x = x + 0(x)$ در صورتیکه $x \to o$

2:- اگر $p_{n(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_o}$, $a_n \neq o$ پس درآنصورت تابع a_nx^n عبارت از قسمت اساس پولینموم $P_n(x)$ میباشد، درصورتیکه $x \to \infty$.

اگر تابع $\beta : X \to R$ داده شده باشد ، پس دراین صورت قسمت اساسی این یک تابع ، در صورتیکه $x \to x_0$ یک قیمته تعریف نمیشود . طبق قضیه 1 هر تابع $\propto$ معادل تابع β است ، درصورتیکه $x \to x_0$ وعبارت از قسمت اساسی این تابع میباشد ، درصورتیکه :

$x \to x_0$

بطور مثال:- فرضاً $\beta = x + x^2 + x^3$ طوریکه از یکطرف $x^2 + x^3 = 0(x)$ درصورتیکه $x \to 0$ و از طرف دیگر $x^3 = 0(x + x^2)$ پس:

$$\beta = x + x^2 + 0(x + x^2)$$

درصورتیکه $x \to 0$ در حالت اول قسمت اساسی ممکن است $\propto= x$ و در حالت دوم $\propto= x + x^2$ حساب کرد.

اگر یکی از قسمت های اساسی به شکل معلوم داده شود، پس دراینصورت قسمت دیگر آنرا میتوان از روی معلوم بدست آورد. قسمت اساسی آن بشکل یگ قسمت معلوم باشد ، درزمینه لیما ذیل تطبیق میشود:

لیما5:- فرضاً $X \subset r$ ، $X_0 \in R$ ، X_0 نقطه حدی ست x باشد. اگر تابع $\beta : X \to R$ درصورتیکه $x \to x_0$ ، قسمت اساسی شکل $A(x - x_0)K$ $A \neq 0$ طوریکه A و R ثابت باشد، پس در اینصورت شکل آن در اطراف تمام قسمت های اساسی آن بترتیب ذیل چنین تعریف میشود ، درصورتیکه $x \to x_0$

$A \neq 0 \qquad \beta(x) = A(x - x_0)^K + 0(x - x_0)^K$

و $A_1 \neq 0 \qquad \beta(x) = A(x - x_0)^k + 0(x - x_0)^k$

درصورتیکه : $\beta(x) \sim A_1(x - x_0)^{R_1}$ و $\beta(x) \sim A(x - x_0)^R$

درصورتیکه : $x \to x_0 \qquad x \in X$

همینطور $A(x - x_0)^R \sim A_1(x - x_0)^{R_1}$، $x \in X$ ، $x \to x_0$،پس دراینصورت داریم که:

$$1 = lim_{x \to x_0} \frac{A(x - x_0)R}{A_1(x - x_0)R} = \frac{A}{A_1} lim_{x \to x_0} (x - x_0)\, R - R_1$$

که دراینصورت $A - A_1$ و $R - R_1$ صدق میکند.

مفاهیم قسمت اساسی توابع درمطالعه بی نهایت کوچک و بی نهایت بزرگ مفید است و جهت کامیابی در حل مسایل مختلف در انالیز ریاضی از آن استفاده میشود، زیرا که همیشه بی نهایت کوچک شکل مرکب تحلیلی را میدهد و در حوالی نقطه داده شده دقت تابع بی نهایت کوچک را بادرجه خیلی بلند نشان داده ، شکل مختصر تابع را تغییر میدهد.

بطور مثال: اگر $\beta(x)$ به شکل $\beta(x) = A(x - x_0)^k + 0(x - x_0)^k$ قرار دهیم ، به این معنی که بادقت بی نهایت کوچک درجه خیلی بلند نسبت به $(x - x_0)^k$ درصورتیکه $x \to x_0$ وبی نهایت کوچک $\beta(x)$ خودش در حوالی نقطه X مثل درجه توابع $A(x - x_0)^k$ میباشد.

در مثالها نشان میدهیم که میتود جدا ساختن قسمت اساس بی نهایت کوچک در لیمت توابع استفاده میشود. چنانچه در حاصل شدن نسبت معادل (8.26) بطور وسیع از آن استفاده گردیده است، فرضاً خواسته میشود که لیمت زیرا دریافت کنید(یعنی موجودیت لیمت را ثابت کنید)

$$lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x+x^2)+arc\sin 3x-5x^3}{\sin 2x+tg^2x+(e^x-1)^5}$$

برای ثبوت فوق از نسبت (مراجعه نمائید به: 8.26) معادل آن$\backsim$ $ln(1+u)$, $u\to o$

u استفاده میکنیم داریم که $ln 1+x+x2 \backsim x+x2$, $x\to o$ چنانچه داریم که (مراجعه نمائید به : قضیه 1) واضح است $ln(1+x+x^2)=x+x^2+0(x+x^2)$

و $0(x+x^2)=0(x)$ (چرا) و $x\to o\,, x^2=0(x)$ همین قسم

$$x\to o\,, ln(1+x+x^2)=x+0(x)$$

و دیگر $arc\sin 3x\sim 3x$ طوریکه $arc\sin 3x=3x+0(3x)=3x+0(x)$

همین قسم معلوم است که $5x^3=0(x)$ از مساوات $\sin 2x\sim 2x$ استفاده نموده حاصل میداریم:

$$\sin 2x=2x+0(2x)=2x+0(x)$$

از $tg^2x\sim x^2$ خواهیم داشت:

$$tg^2x=x^2+0(x^2)=0(x)$$

و از $x^5 \sim (e^x - 1)^5$ بطور مشابه $(e^x - 1)^5 = x^5 + 0(x^5) = 0(x)$ تمام این نسبت ها درصورتیکه $x \to o$ تطبیق میشوند.

پس داریم که:

$$ln(1 + x + x^2) + arc\,sin\,3m - 5x^3 = x + 0(x) + 3(x) + 0(x) - 0(x) = 4(x) + 0(x).$$

$$sin\,2x + tg^2x + (e^x - 1)^5 = 2x + 0(x) + 0(x) = 2(x) + 0(x).$$

چنانچه: $lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x+x^2)+arc\,sin\,3x-5x^3}{sin\,2x+tg^2x+(e^x-1)^5} = lim_{x\to 0}\frac{4(x)+0(x)}{2x+0(x)}$

مگر $4x \sim 4(x) + 0(x)$ و $2x \sim 2x + 0(x)$ درصورتیکه $x \to o$ پس برحسب قضیه2 داریم $lim_{x\to 0}\frac{4(x)+0(x)}{2x+0(x)} = lim_{x\to 0}\frac{4(x)}{2x} = 2$ بدین ترتیب لیمت مطلوبه موجود و برابر به 2 است. در محاسبه لیمت توابع توسط میتود جدا ساختن قسمت اساسی نتیجه میشود که در حالت های بررسی نشده در پراگراف (8.3) بوده میگویند اجازه نیست بی نهایت کوچک را به معادل تعویض کرد.

بطور مثال: برای دریافت لیمت افاده $lim_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}$ تعویض تابع $sin\,x$ به معادل آن در صورتیکه $x \to 0$ به تابع x اشتباه خواهد بود. که میتوان دقیق آنرا در پراگراف (13.4) این کتاب مطالعه خواهیم کرد. برای دریافت لیمت های افاده شکل $u(x)^{v(x)}$ که شکل مکمل لیمت آنها در لوگارتم میباشد.

مثال ذیل را در زمینه مطالعه می نماییم.از مساوات ذیل دریافت میکنیم:

$$cos^{1/x^2}2x = e^{ln\,cos^{1/x^2}}2x \ldots\ldots (8.38)$$

در اینجا محاسبه شرط کافی لیمت را بررسی می نماییم.

$$\lim_{x\to 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 2x)}{x^2}$$

و همینطور $\ln(1-\sin^2 2x) \sim \sin^2 2x \sim -(2x)^2 = -4x^2$

پس از اینجا طبق قضیه 2 این پراگراف داریم:

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2} = -2.$$

به علت متمادیت تابع نمائی از (8.38) داریم $\lim \ln \cos^{1/x^2} 2x = -2$به این ترتیب

$$\lim_{x\to 0} \cos^{1/x^2} 2x = e^{\lim_{x\to 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x} = \frac{1}{e^2}$$

طریقه محاسبه لیمت توسط جدا ساختن قسمت اساس توابع بسیار مطمئن و ساده نظر به دیگر طریقه ها میباشد.

یک عده مشکلات فعلاً در استفاده آن موجود است و این مشکلات عبارت از نبودن یک طریقه عمومی جدا ساختن قسمت اساسی توابع میباشد که ما آنرا در پراگراف (9.13) مطالعه خواهیم کرد.

8.4. میتود جدا نمودن حصه های اساسی توابع واستفاده ازآن در محاسبه لیمت

فرضاً توابع $\beta:x\to R,\alpha:x\to R$ داده شده باشند.

اگرتابع β برای تمام $x\in X$ را به شکل ذیل نبویسیم:

$$\beta(x)=\alpha(x)+0(\alpha(x)),x\to x_0$$

پس تابع α بنام حصه اساسی تابع β یاد میشود درصورتیکه $x\to x_0$.

مثال ها.1: حصه اساسی تابع sinx درصورتیکه $x\to x_0$ برابر به x است یا

$$\sin x=x+0(x)x\to x_0$$

:2 اگر $a_n\neq 0,P_n(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ باشد پس تابع a_nx^n عبارت از حصه اساسی پولینوم $P_n(x)$ است طوریکه $x\to\infty$

همینطور $P_n(x)=a_nx^n+0(x^n)$ در صورتیکه $x\to\infty$

اگر تابع $\beta:x\to R$ داده شده باشد حصه اساسی آن درصورتیکه $x\to x_0$یک قیمت مشخص ندارد.

مطابق قضیه 1 هر تابع دلخواه α معادل به β باشد بنام حصه اساسی آن یاد میشود درصورتیکه $x\to x_0$

بطورمثال: فرضاً $\beta=x+x^2+x^3$ همینطور ازیک طرف $x^2+x^3=0(x)$

درصورتیکه $x\to 0$ پس $\beta=x+0(x)$ درصورتیکه $x\to 0$ وازیک طرف دیگر $x^3=0(x+x^2)$ درصورتیکه $x\to 0$

ازینجا $\beta=x+x^2+0(x+x^2)$ درصورتیکه $x\to 0$

درحالت اول حصه اساسی میتوان $\alpha=x$ حساب کرد.

ودرحالت دوم: $\alpha=x+x^2$ اگر یکی از آنها به شکل حصه اساسی معلوم داده شود.

پس درصورت انتخاب معقول میتوان حاصل نمودکه حصه اساسی به شکل اشاره شده یک قیمت معلوم باشد در زمینه لیمائی ذیل مطابقت دارد.

لیما: فرضاً $x_0 \in R, x \in R$ و x_0 نقطه لیمتی ست x باشد.

اگر تابع $\beta: x \to R$ درصورتیکه $x \to x_0$ شکل اساسی $A(x-x_0)^k$ ، $A \neq 0$ را بوجود بیآورد که درینجا A وK ثابت ها اند پس در اطراف چنین شکل تمام حصه اساسی بطریقه جداگانه دریافت میشود. حقیقتاً درصورتیکه $x \to x_0$ داریم:

$$A \neq 0, \beta(x) = A(x-x_0)^k + 0((x-x_0)^k)$$
$$A_1 \neq 0, \beta(x) = A_1(x-x_0)^{k_1} + 0((x-x_0)^{k_1})$$

در اینصورت: $\beta(x) \sim A(x-x_0)^k$ درصورتیکه $x \to x_0$ و $x \in X$ باشد.

داریم که:

$$1 = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x-x_0)^k}{A_1(x-x_0)^{k_1}} = \frac{A}{A_1} \lim_{x \to x_0} (x-x_0)^{k-k_1}$$

که درین حالت $A = A_1$ و $K = K_1$ مطابقت دارد.

به اثر مفهوم حصه اساسی تابع مطالعه لایتناهی کوچک ولایتناهی بزرگ به کامیابی می انجامد وبرای حل مسئله های مختلف انالیز ریاضی ازآن استفاده به عمل می آید.

همیشه با کامیابی قناعت بخش بی نهایت کوچک مرکب به شکل تحلیلی درحول نقطه داده شده با دقت بی نهایت کوچک بادرجه بسیار بلند وبسیار ساده (طوریکه تصورمیشود) تابع را تبدیل می نماید.

بطورمثال: اگر $\beta(x)$ با کامیابی به شکل $\beta(x) = A(x-x_0)^k + 0((x-x_0)^k)$ قرار داده شود به این معنی که با دقت تا بی نهایت کوچک بسیار بدرجه بلند نظربه $(x-x_0)^k$ درصورتیکه $x \to x_0$ بی نهایت کوچک $\beta(x)$ خود را در حول نقطه x مانند تابع توان دار $A(x-x_0)^k$ میبیند.

درمثال ها نشان میدهیم که میتود جداساختن حصه اساسی بی نهایت کوچک را درمحاسبه لیمت توابع چطور استفاده میشود. جهت این کار میتوان بطور وسیع از بدست آوردن نسبت معادل (8.26) استفاده نمود.

فرضاً خواسته میشود که لیمت زیرا دریافت نماید(یعنی ثبوت نمایدکه آن موجود است)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+tg^2x+(e^x-1)^5}$$

ازثبوت فوق (مراجعه نماید به : نسبت (8.26)) معادل $\ln(1+u)\sim u$ درصورتیکه $u\to 0$ داریم که:

$$\ln(1+x+x^2)\sim x+x^2$$

درصورتیکه $x\to 0$ ازینجا :(مراجعه نماید به :قضیه1).

$$\ln(1+x+x^2)=x+x^2+0(x+x^2)$$

ازینجا $0(x+x^2)=0(x)$ (چرا)

و $x^2=0(x)$ درصورتیکه $x\to 0$

همینطور: $\ln(1+x+x^2)=x+0(x)$ درصوریتکه $x\to 0$ همینطور $\arcsin 3x\sim 3x$

ازینجا: $\arcsin 3x=3x+0(3x)=3x+0(x)$ همین قسم دیده میشود که $5x^3=0(x)$ ازمساوات مجانب $\sin 2x\sim 2x$ حاصل میداریم.

$$\sin 2x=2x+0(2x)=2x+0(x)$$

از $tg^2x\sim x^2$ خواهم داشت:

$$tg^2x=x^2+0(x^2)=0(x)$$
$$(e^x-1)^5\sim x^5$$
$$(e^x-1)^5=x^5+0(x^5)=0(x)$$

بطور مشابه تمام این نسبت ها وقتی قابل اجرا است که $x\to 0$

حال داریم:

$$\ln(1+x+x^2)+\arcsin 2x-5x^3=x+0(x)+3x+0(x)-0(x)=4x+0(x)$$
$$\sin 2x+tg^2x+(e^x-1)^5=2x+0(x)+0(x)=2x+0(x)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+tg^2x+(e^x-1)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+0(x)}{2x+0(x)}$$

و $4x+0(x)\sim \mathbf{4x}$ و $2x+0(x)\sim \mathbf{2x}$ درصورتیکه $x\to 0$ وبه اساس قضیه 2 داریم که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x+0(x)}{2x+0(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2$$

به این ترتیب لیمت مطلوب موجود ومساوی به 2 است به محاسبه لیمت تابع توسط میتود جداساختن حصه های اساسی دارای شکل ذیل که این حالت در پراگراف (8.3) مورد بررسی قرار نگرفته است.

میگویند لازم نیست که نهایت کوچک را به معادل تبدیل نمود.

بطور مثال لیمت افاده دریافت میکنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}$$

اگر تابع sinx را معادل به تابع x درصورتیکه $x\to 0$ تبدیل نمایم درینصورت اشتباه بزرگ است میتود حل طبیعی چنین مسایل مشابه در پراگراف (13.4) ذکر گردیده است.

برای دریافت لیمت های افاده شکل $u(x)^{U(x)}$ بطور مشابه لیمت آنها لوگاریتم آن میباشد مثال ذیل را مطالعه می نمایم.

لیمت $\lim\limits_{x\to 0}\cos^{\frac{1}{x^2}}2x$ را دریافت می نمایم.

ازمساوات $\lim\limits_{x\to 0}\cos^{\frac{1}{x^2}}2x=e^{\ln\frac{1}{x^2}}2x...(8.38)$ دیده میشود که بطور کافی میتوان لیمت آنرا قرار ذیل دریافت نمود.

$$\lim_{x\to 0}\ln\cos^{\frac{1}{x^2}}2x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 2x)}{x^2}$$

وهمین طور

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 2x)}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=-2$$

بدین ترتیب:

$$\lim_{x\to 0}\ln\cos^{\frac{1}{x^2}} 2x=-2$$

بنابرمتمادیت تابع نمائی از (8.38) داریم که

$$\lim_{x\to 0}\cos^{\frac{1}{x^2}} 2x=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos^{\frac{1}{x^2}} 2x}=\frac{1}{e^2}$$

طریقه محاسبه لیمت توسط جداساختن حصه اساسی تابع ساده مناسب تر به عوض طریقه های دیگر میباشد بعضی مشکلات هنوزهم دراستفاده ازآن موجود است زیراکه تابه حال به صورت عموم طریقه جداساختن حصه اساسی تابع بطور کافی موجود نیست واین مشکلات را درپراگراف بعدی مطالعه خواهیم نمود. (مراجعه نماید به 13§)

§9.مشتق و دیفرانسیال

9.1.تعریف مشتق

تعریف 1: فرضاً تابع $y = f(x)$ در بعضی حوالی نقطه $x_o \epsilon R$ تعریف شده باشد وفرضاً x نقطه اختیاری این حوالی باشد، اگر نسبت $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ درصورتیکه $x \to x_0$ دارای لمت باشد ، پس در اینصورت این لیمت را بنام مشتق تابع f در نقطه x_o یاد میشود، یا همین قسم اگر $x=x_o$ باشد چنین ارائه میگردد: $\acute{f}(x_0)$

$$\acute{f}(xo) = \lim_{X \to X_0} \frac{f(x)-f(xo)}{x-xO} .... (9.1)$$

اگر $x-x_o=\Delta x$ نشان داده شود، پس تعریف (9.1) به شکل ذیل نوشته میشود:

$$\acute{f}(xo) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(xo+\Delta x)-f(xo)}{\Delta x}$$

درفرضیه $f(x_o+\Delta x) - f(x_o)=\Delta y$ متحول و مشتق آن مختصراًبه y' قرار ذیل نشان میدهد:

$$y' = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

اگر برای بعضی قیمت های x_o لیمت موجود شود یعنی :

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty \quad \text{یا} \quad \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

پس میتوان گفت درصورتیکه x=xo شود، مشتق متناهی و مشتق بی نهایت به علامه مشخص مساوی به ∞+ ویا ∞- میباشد، نشان میدهند.

درآینده ارائه (تابع دارای مشتق) به این معنی که همیشه مشتق متناهی موجود است. برای متیقین شدن به مفهوم مشتق تعریف ذیل را استخراج می نمائیم و مقطع حوالی مجاورت نقطه $x_o \epsilon R$ درحالت $x \geq x_o$, $(x \leq x_o)$ بنام طرف راست (طرف چپ) حولی نقطه X_o یاد میشود.

تعریف2: اگر تابع f در بعضی حوالی مجاورت نقطه X_o طرف راست (طرف چپ) تعریف شده و دارای لیمت متناهی، یا بی نهایت (به علامه مشخص) باشد یعنی:

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(xo+\Delta x)-f(xo)}{\Delta x} \text{ یا } \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(xo+\Delta x)-f(xo)}{\Delta x}$$

پس دراین صورت مشتق تابع f در نقطه x_o در مطابقت به نامتناهی یا بی نهایت مشتق راست (چپ)یاد میشود و چنین نشان داده میشود. $f'(x_{0^+})$ ویا $f'(x_{0^-})$ مشتق راست و چپ همین قسم بنام مشتق طرف راست در مطابقت به طرف چپ، مشتق یکطرفه یاد میشود.

ازقضیه لیمت یکطرفه (مراجعه شودبه پراگراف 5.9) نتیجه میشود که تابع f(x) در بعضی حوالی xo تعریف شده باشد دارای مشتق $f'(x_o)$ میباشد، تنها و فقط تنها وقتیکه $f'(x_{0^+})$ و $f'(x_{0^-})$ موجود باشد.

$$f'(x_{0^-}) = f'(x_{0^+})$$

که دراین حالت: $f'(x_o) = f'(x_{0^-}) = f'(x_{0^+})$

اگر تابع f(x) به وسیله فورمل تعریف شده باشد، و در فواصل نقاط آن مشتق پذیر باشد(زیراکه مشتق در انجام این فاصله طبعاً به مشتق یکطرفه مطابقت میکند).

طوریکه معلوم است ،همین قسم تابع در فاصله داده شده تعریف شده و توسط $f'(x)$ نشان داده میشود. اگر $y=f(x)$ باشد، پس به عوض $f'(x_o)$ چنین مینویسند: $y'|_{X=X_0}$.

محاسبه مشتق تابع بنام دیفرانسیال گیری یاد میشود.

مثالها1: $y = C$ ، (C ثابت است) اگر $\Delta y = C-C = 0$ ، پس $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

که به این ترتیب: $C' = 0$

2: $y=\sin x$ داریم :

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin {\Delta x}/_2$$

زیراکه:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta X \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta y}{2}\right) \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

به این ترتیب : $(\sin x)' = \cos x$

3: $y=\cos x$

همینطور $\Delta y = cos(x+\Delta x) - cosx = -2\, sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) sin\, {\Delta x}\big/{2}$

پس داریم :

$$\lim_{\Delta X\to 0} c\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta X\to 0} sin\,(x+\frac{\Delta y}{2}) \lim_{\Delta X\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -sinx$$

به این ترتیب (cosx)‘ = -sinx

4: $y = a^x$ داریم که:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

زیرا که:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

ازینجا به علت فورمل(8.17) حاصل میداریم:

$$\lim_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta X\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\, ln\, a$$

به این ترتیب $(a^x)' = a^x\, ln\, a$ و باالخصوص $(e^x)' = e^x$ مساوات اخیر نشان میدهد که عدد e خواص قابل ملاحظه دارد.

تابع نمایی به قاعده e دارای مشتق میباشد که به خود تابع مطابقت میکند. در انالیز ریاضی ازاین خواص e در تابع طاقت دار و لوگارتمی به خوبی استفاده می شود و در محاسبات مطمین میباشد.5: $y = x^n$

n عدد طبیعی است که در قانون بینوم نیوتن به عوض توان بکار برده شده است.

اگر $\Delta x \neq 0$ باشد، چون تمام حاصل جمع قسمت راست مخرج Δx بالای توان با طاقت طبیعی به صفر تقرب میکند ، پس در این صورت داریم:

$$lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta n} = nx^{n-1}$$

به این ترتیب $(X^n)' = nx^{n-1}$

در آینده نشان خواهیم داد که این فورمول وقتی صادق است که عدد حقیقی اختیاری باشد.

9.2 دیفرانسیال توابع

تعریف 3: تابع $y = f(x)$ دربعضی حولی (X_o) نقطه $x_o \epsilon R$ تعریف شده باشد و $x = x_o$ اگر تابع درین نقطه تزاید نماید ، بنام دیفرانسیال گیری یاد میشود. پس در اینصورت داریم که:

$$\Delta y = f(xo + \Delta x) - f(xo)$$

$xo + \Delta x \in U(Xo)$ وبه شکل ذیل مینویسیم

$$\Delta x \to 0 \, , \Delta y = A. \Delta x + 0(\Delta x) \, ... \, (9.2)$$

$\overset{(1)}{A}$ عدد ثابت است.[1]

1.درتعین نقطه x_0 عدد A دریک تعداد اعداد ثابت است و Δx مربوط نیست البته به تغیرات نقطه x_0 عدد A تغیر میخودرد.

تابع خطی $A\Delta x$ (ازتحول $A\Delta x$) بنام دیفرانسیال تابع f در نقطه x_o یادمیشود و چنین نشان میدهند. $df(x_o)$ و یا مختصر dy مینویسند.

به این ترتیب: $\Delta x \to 0$, $\Delta y = dy + 0(\Delta x)$ و $.dy = A\Delta x$

تابع Δx برای هر قیمت Δx و باالخصوص $\Delta x = 0$ تعریف شده است و تابع

$0(\Delta x) = \Delta y - A\Delta x$ تعریف گردیده است، دراینجا عدد A در این نقطه برابر به صفراست.

یعنی: $o(0) \underset{(9.2)}{=} (\Delta y - A\Delta x)\big|_{\Delta x=0} = 0$

همینطور طبق تعریف سمبول (0 کوچک) چنین تابع $\varepsilon(\Delta x)$ موجود میباشد که در تمام حولی نقاط $\Delta x=0$ (وهمین قسم در خود این نقطه) تعریف شده که برای تمام $\Delta X = 0$ ازین حولی مساوات ذیل صادق است:

$0(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$... (9.3)

و: $lim_{\Delta x \to 0}\, \varepsilon(\Delta x) = 0$ ....(9.4)

چون درتمام حولی لیمت گرفته میشود پس ازینجا نتیجه میشود که:

$\varepsilon(0) = 0$... (9.5)

اگر نقطه ای که درآن لیمت تابع گرفته میشود متعلق به ستی باشد که درآن لیمت گرفته شود و این لیمت موجود باشد، پس دراینصورت تابع درین نقطه متمادی است(مراجعه نمائید به : پراگراف 5.5).

یاد آور میشویم که دیفرانسیال dy = AΔX طوریکه هر تابع خطی برای هرقیمت ΔX ، $-\infty < \Delta x > +\infty$ تعریف شده باشد، دراین صورت تزاید تابع $\Delta y = f(x_0 + \Delta X) - f(x_0)$ میباشد. بررسی طبعاً ممکن است، تنها برای چنین ΔX که برای $X_o + \Delta X$ درساحه تعریف تابع f واقع باشد صورت میگیرد. اگر A≠0 باشد، پس در این صورت dy≠0 دیفرانشل گیری توابع در نقطه X_o چنین معنی میدهد که با دقت بی نهایت کوچک با درجه بسیار بلند فرضاً $f(x_o) = y_0$ به اساس رابطه (9.2) قیمت آنرا مینویسیم:

$$\Delta y = f(x) - y_0$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = A(x - x_0)$$

حاصل می نماییم که:

$$f(x) = y0 + \Delta(x - x_0) + 0(x - x_0)$$

و همینطور اگر تابع$f(x)$ در نقطه X_o دیفرانشیل پذیر باشد، پس در اینصورت $x \to x_o$ دیفرانشیل آن با دقعیت تا بی نهایت کوچک با درجه بسیار بلند (بلند تر) نظربه $x - x_o$ در نزدیکی x_o برابر به تابع خطی میباشد ،یا به عباره دیگر درین حالت تابع در حولی xo

نقطه x_o " مثل تابع خطی" $y0 + A(x-x_o)$ دیده میشود. و این خطا

درتغییر تابع نظربه تابع خطی تفاضل $x - x_o$ کمتر میباشد. نسبت این خطا به تفاضل

$x - x_o$ افزوده میشود، پس دراینصورت دیفرانشیل تابع آن دو متحوله یعنی نقطه x و

متحول dx میباشد، که $dy = A(x)dx$ حال ارتباط بین دیفرانشیل درنقطه و موجودیت مشتق

در عین نقطه را واضیح میسازیم.

قضیه1: برای اینکه تابع در بعضی نقاط X_o دیفرانشیل پذیر باشد، لازم و کافی است تا تابع

دراین نقطه مشتق داشته باشد.

ثبوت شرط لازمی: فرضاً تابع f در نقطه X_o دیفرانشیل پذیر باشد، پس در این صورت

داریم که:

$$\Delta x \to 0\,, \Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$$

وقتیکه:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0(\Delta x)}{\Delta x} = A$$

همینطور مشتق تابع $f'(Xo)$ موجود و برابر به A میباشد.

ازینجا:

$$dy = f'(Xo)dx$$

ثبوت شرط کافی: فرضاً مشتق $f'(Xo)$ موجود باشد، پس در این صورت لیمت آن موجود

میباشد.

یعنی :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(Xo)$$

وقتیکه اگر: $\Delta x \neq 0\ ,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(xo) + \varepsilon(\Delta x)$

باشد که دراینجا $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ مساوات ذیل صادق میباشد:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta X \text{ ، } \Delta x \neq 0$$

پس در این صورت به علت مساوات (9.2) درصورتیکه $A = f'(x_0)$ باشد، تابع f درنقطه X_o دیفرانشیل پذیر میباشد.

خاطرنشان میسازیم که درقضیه 1 راجع به مشتق متناهی بحث مفصل صورت گرفت به این ترتیب تابع f(x) تحت دیفرانشیل درنقطه X_o دارای مشتق متناهی f'(x) مساوی میباشد.

ازثبوت فوق نتیجه میشود که ضریب A در تعریف دیفرانشیل (مراجعه نمائید به: 9.2) یک قیمت مشخص میباشد مثل $A = f'(x_o)$ و خود دیفرانشیل تابع درنقطه داده شده آن نیز دارای یک قیمت مشخص میباشد و از لیما پراگراف 8.4 راجع به یگانگی قسمت اساسی شکل تابع $A(x - x_0)R$ که بی نهایت کوچک است، درصورتیکه $x - x_o$ ، نیز فوقاً نتیجه میشود وهمینطور به علت قضیه1، $y' = \frac{dy}{dx}$ است.

قسمت راست صورت کسر دیفرانشیل تابع و مخرج کسر دیفرانشیل متحول(ارگومنت) را نمایش میدهد. فورمول(9.2) برای تزاید تابع طبق قضیه 1 و فورمول(9.3) ممکن است به شکل ذیل نوشت:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \ldots (9.6)$$

دراینجا شرط (9.4) و همین قسم شرط (9.5) تطبق میشود، یعنی:

$\varepsilon(0) = 0 \ , lim\, \varepsilon(\Delta x) = 0$...(9.7)

پس دراین صورت $\varepsilon(\Delta x)$ تابع درنقطه صفر متمادی است. فورمول $dy = f'(x_0)dx$ امکان موجودیت دیفرانسیل تابع را میدهد ، اگرمشتق را از پراگراف 9.1 حاصل نماییم:

dc = 0 (C ثابت است)

$d\, cosx = -sinxdx$

$dsinx = cosxdx$

$da^x = a^x linadx$

$de^x = e^x dx$ بخصوص

$dx^n = nx^{n-1}dx$ (n عدد طبیعی است)

درنتیجه ارتباط بین دیفرانسیال گیری و متمادیت در نقطه داده شده واضح گردید.

قضیه2: اگر تابع f در بعضی نقاط دریفرانشیل پذیر باشد، پس در این صورت تابع دراین نقطه متمادی است.

نتیجه 2: اگر تابع در بعضی نقاط دارای مشتق باشد، پس درآنصورت تابع دراین نقطه متمادی است.

ثبوت: فرضاً تابع f درنقطه x_o دیفرانشیل پذیر باشد، پس دراین صورت درین نقطه

$\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$ در صورتیکه $\Delta x \to 0$متمادی است.

داریم که : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0(\Delta x) = 0$

که متمادیت تابع f را معنی میدهد، درصورتیکه $x = x_o$ باشد. نتیجه متمادیت تابع از قضیه 1و2 سرچشمه میگیرد.

توجه نمایید که اگر تابع در نقطه دارای مشتق بی نهایت باشد، پس دراین صورت تابع میتواند دراین نقطه منفصل باشد.

تمرین1: مثال تابع را ترتیب دهید که دربعضی نقاط دارای مشتق بی نهایت بوده و منفصل دراین نقاط باشد.

یاد آور میشویم که بیان عکس قضیه 2 درست نیست ، زیارکه در اینصورت از متمادیت تابع f در نقطه داده شده دیفرانشیل بوجود نمی آید. یا اینکه تساوی (مراجعه نمائید به: قضیه 1) دارای مشتق درین نقطه میباشد. مثال ذیل این ادعا را بیان میکند.

مثال تابع $f(x) = (x)$ طوریکه دیده میشود در نقطه $x_o = 0$ متمادی است مگر دارای مشتق دراین نقطه نمیباشد.

در حقیقت وقتیکه $x \geq 0$ باشد داریم که$y = (x) = x$ ازینجا برای نقطه $x_o = 0$ حاصل می نمایم:

$\Delta y = \Delta x$

همین قسم : $\acute{f}_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

بطو مشابه درصورتیکه $X \leq 0$ باشد داریم که: $y(x) = -x$

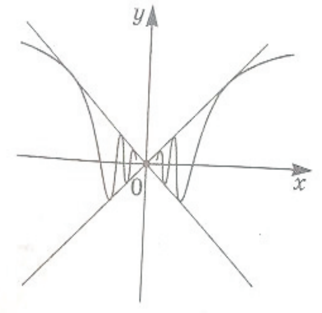
ازاینجا برای نقطه $x_o = 0$ حاصل مینمایم : $\Delta y = - \Delta x$

همین قسم: $\acute{f}_-(0) = lim \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$

این خود ثبوت است که تابع $f(x) = |x|$ درصورتیکه $x = 0$ مشتق ندارد، ولی یکی ازاین مشتقات دراین نقطه موجود میشود ، یا مشتق راست و یا چپ و نیز یاد آور میشویم در صورتیکه $x > 0$ مساوات $(|x|)' = x' = 1$ بجا خواهد بود و در صورتیکه $x < 0$ در مطابقت به $(|x|)' = (-x') = -1$ ازاینجا برای هر $x \neq 0$ فورمول $|x|' = signx$ صادق است.

مثال بعدی نشان میدهد که تابع f دراین نقطه میتواند متمادی باشد، ولی هیچ نوع مشتق ندارد .

2: فرضاً شکل(3.8):
$$f(x) = \begin{cases} xsin\frac{1}{x} \text{ درصورتیکه } & x \neq 0 \\ 0 \text{ درصورتیکه } & x = 0 \end{cases}$$



شکل 38

پس در آنصورت در نقطه X = 0 داریم $\Delta y = \Delta x sin\frac{1}{2}$

ازینجا $|\Delta x| \leq = |\Delta y|$ و همینطور $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

پس درآنصورت تابع مورد بررسی در صورتیکه X = 0 باشد به عوض $\frac{\Delta y}{\Delta x} = sin\frac{1}{\Delta x}$

وهمینطور تابع $sin\frac{1}{x}$ در نقطه $x_o = 0$ دارای لیمت چپ و راست نمیباشد.

(مراجعه نمائید به : مثال2 در پراگراف 5.4) پس درآنصورت تابع f(x) در طوریکه x = 0 باشد دارای مشتق نمیباشد.

تمرین2: مفاهیم دیفرانسیال پذیری تابع راست (چپ) را درنقطه داده شده بیان نمایید، وثبوت کنید که دیفرانسیال گیری راست(چپ) درنقطه داده شده معادل می باشند.

3: ثابت نمائید که اگر تابع در بعضی نقاط دارای مشتق راست(چپ) باشد، پس دراین صورت دراین نقاط تابع متمادی راست(چپ) میباشد.

اگر تابع درهرنقطه بعضی فواصل(درهرنقطه این فواصل دیفرانسیال پذیر) باشد، پس دراین صورت میگوییم که تابع f دارای مشتق میباشد، یا درفاصله متذکره دیفرانسیال پذیر میباشد.

9.3 مفهوم هندسی مشتق و دیفرانسیال

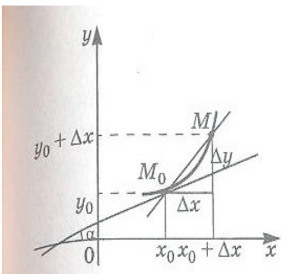
مفهوم مشتق و دیفرانسیال تابع در نقطه داده شده مربوط به مفهوم مماس گراف تابع در نقطه میباشد.

برای اینکه این ارتباط واضح گردد ، قبل از همه مماس را تعریف می نماییم.

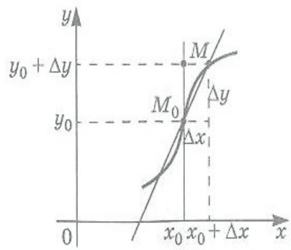
فرضاً تابع $y = f(x)$ در انتروال (a , b) تعریف شده باشد و دراین نقطه $X_o \epsilon (a , b)$ متمادی باشد.

فرضاً $y_0 = f(x_0)$, $M_0 = (x_0 , y_0)$, $x_0 + \Delta x \epsilon (a,b)$

$M = (x_0 + \Delta x \ , y_0 + \Delta y)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



شکل 39



شکل 40

حال وتر $M_o M$ را رسم میکنم (شکل 40) که دارای معادله ذیل میباشد:

$y = R(\Delta x)(x - x_o) + y_o$ ....(9.8)

دراینجا: $R(\Delta X) = \frac{\Delta x}{\Delta y} ...$ (9.9)

نشان میدهد که درصورتیکه $\Delta x \to 0$ فاصله $|M_0\ M|$ از نقطه M_0 تا نقطه M به صفر تقرب میکند (درین حالت میگوییم که نقطه M تقرب میکند به نقطه M_0 و مینویسم:

$$M \to M_0$$

پس بنابر متمادیت تابع f در صورتیکه $X = X_0$ داریم $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ همین قسم در صورتیکه $\Delta X \to 0$ پس:

$$|Mo\ M| = .$$

تعریف4: اگر لیمت متناهی $\lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x) = R_0$ موجود شود، پس در این صورت معادله مستقیم قرار ذیل است:

$$y = Ro(x - x_0) + y_0 \ldots.(9.10)$$

از معادله $y = R(\Delta x)(x - x_0) + y_0$ در صورتیکه $\Delta x \to 0$ شکل (39) حاصل میگردد و بنام (میل) مماس درگراف تابع f درنقطه $(x_0\ , y_0)$ یاد میشود. اگر $\lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x) = \infty$ شود، پس در این صورت معادله مستقیم (شکل 40) معادله(9.11)......$x = x_0$، $\Delta x \to 0$ و معادله وتر که به شکل $\frac{y}{R(\Delta X)} = x - x_0 + \frac{y}{R(\Delta x)}$ نوشته میشود، بنام مماس (عمودی) در گراف تابع f درنقطه $(x_0\ , y_0)$ یاد میشود.

مستقیم های (9.10) درحالت لیمت متناهی $\lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x)$ و(9.11) در حالت لیمت بی نهایت بنام موقعیت لیمت مستقیم (9.8) یاد میشود، به علت تعریف داده شده فوق ، تعریف

مماس در گراف تابع f را می توان بترتیب ذیل تعمیم داد : وتر $M_o M$ درصورتیکه $\Delta x \to 0$ ویاهمین قسم که $M \to M_o$ بنام گراف مماس تابع f درنقطه M_o یاد میشود.

حال یاد آور میشویم که به علت مساوات (9.9) موجودیت لیمت متناهی

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} R(\Delta x)$ معنی موجودیت مشتق متناهی $f'(x_0) = R$ رامیدهد. همین قسم اگر برای تابع f در نقطه X_o مشتق متناهی وجودداشته باشد پس معادله مماس در گراف تابع f در نقطه $(x_o \ , \ f(x_o))$ شکل ذیل را دارد.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \ldots (9.12)$$

دراینجا $y = f(X_o)$ اگر همین قسم $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ باشد، پس دراین صورت داریم که: $f(X_o) = \infty$ به علت (9.9) $\lim_{\Delta x \to 0} R(\Delta x) = \infty$ و همین قسم (مراجعه نمائید به : 9.11) معادله مماس شکل $x_o = x$ را دارد.

طوریکه از هندسه تحلیلی معلوم است ، ضریب $f'(x_0)$ درمعادله (9.12) مساوی به تانجانت زاویه است (مراجعه نمائید به: شکل 39) که مستقیم مورد نظر به جهت مثبت محور OX آنرا تشکیل میدهد.

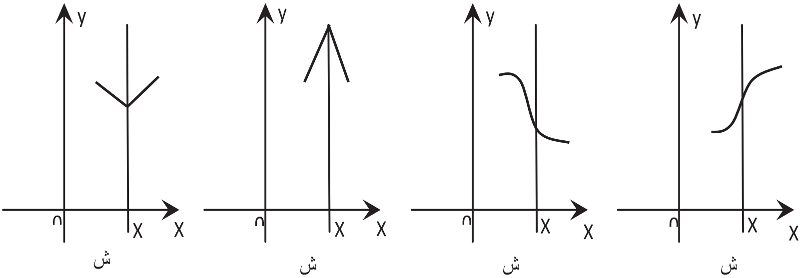
یعنی $f'(x_0) = tg \propto$ پس دراین صورت مشتق تابع در بعضی نقاط مساوی به تانجانت زاویه بین مماس و محور X و گراف تابع در نقطه باخود تابع مطابقت دارد. (مشتق تابع در یک نقطه برابر است به میل خط مماس منحنی تابع در آن نقطه میباشد).

به اساس قسمت اول حاصل جمع طرف راست معادله (9.12) داریم که افاده;

$$\Delta x = x - x_0 \quad , \quad \acute{f}(x_0)(x - x_0) = \acute{f}(x_0)\Delta x$$

عبارت از دیفرانسیل dy تابع در نقطه X_o میباشد.

همین قسم به علت مساوات (9.12) داریم $y - y_o = dy$ دراینجا y محور ترتیب مماس است، به این ترتیب دیفرانسیل تابع در نقطه داده شده مساوی به تزاید محور ترتیب مماس در مطابقت به نقطه گراف تابع میباشد.



تبصره: اگره نقطه X_o لیمت بی نهایت $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ موجود باشد، پس در این صورت میتوان نشان داد که این لیمت مساوی به $+\infty$ یا $-\infty$ میباشد، دراین حالت $X = X_o$ مشتق بی نهایت $y' = \infty$ یا $y' = -\infty$ موجود میشود و گراف تابع $y = f(x)$ در حول نقطه X_o دارای شکل 41 و 42 میباشد، و همین قسم حالتی ممکن است که لیمت$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ شود که عبارت از بی نهایت بدون علامه میباشد. و همین قسم دراین نقطه مشتق با علامه بی نهایت و متناهی و جود ندارد و $\acute{f}(x_0) = \infty$ است و میتواند اندک باشد.

بطور مثال : اگر تصادفاً درنقطه X_o مشتق بی نهایت یکطرفه با علامه مختلف موجود شود پس در حول نقطه X_o گراف تابع دارای شکل 43 و 44 میباشد.

مثال: مماس پا رابول $y = x^2$ در نقطه با مختصات (1 , 1) رادریافت میکنم مطابق

پراگراف 9.1 (مراجعه نمائید به : مثال 5) $\acute{y} = 2x$ ازاینجا $\left(\acute{y}\Big|_{x=1}^{x=2} \right)$ به علت

فورمول (9.12) مماس دارای معادله y = 2(X–1)+1 میباشد. $\Delta x \to 0$

پس دراینصورت داریم که y = 2x – 1

اگر تابع f درنقطه X_o دیفرانسیال پذیر باشد، پس دراینصورت فورمول (9.5) $A = \acute{f}(x_0)$

قرار میدهیم (مراجعه نمائید به: قضیه پراگراف بعدی) داریم :

$$f(x) = y_0 + \acute{f}(x_0)(x - x_0) + 0(x - x_0)$$

$X \to X_o$ یعنی: مطابق (9.12) $(y_{1<ac} = \acute{f}(x_0)(x - x_0) + y_0)$ حاصل میداریم

$f(x) - y_{1<ac} = 0(x - x_0)$, $x \to x_0$ به این ترتیب میل مماس در گراف تابع

توسط این خواص بوجود می آید، گراف تفاصل محور ترتیب دراین مماس عبارت از کمیتی

است بی نهایت کوچک با درجه بلند تر با مقایسه تزاید ارگومنت میباشد، $X \to X_o$ برعکس

اگر مستقیم غیر عمود موجود شود دراینصورت:

$$y_{np} = A(x - x_0) = y_0 \ldots (9.13)$$

که از نقطه (x_o , y_o) میگذرد، طوریکه:

$$X \to x_0 , f(x) - y_{np} = 0(x - x_0) \ldots (9.14)$$

پس در این صورت داریم که:

$$x \to x_0\,, \Delta y = f(x) - y_0 = A(x - x_0) + 0(x - x_0)$$

همین قسم تابع f درنقطه X_o دیفرانسیال پذیر میباشد. (مراجعه شود. 9.2) و $A = \acute{f}(x_0)$ (مراجعه شود به قضیه1) پس در این صورت مستقیم متذکره به مماس اصابت میکند (9.12) این ترتیب شرط (9.14) لازم و کافی است تا مستقیم (9.13) میل مماس در گراف تابع f(x) در نقطه $(x_o\,, y_o)$ داشته باشد.

ازاینحا نتیجه میشود که این مماس یکتا است (نتیجه اخیر اینست که دیفرانسیال تابع fیکتا است یا مماس در گراف تابع در تقطه داده شده یکتا است).

9.4 مفهوم فزیکی مشتق و دیفرا نسیال توابع

فرضاً تابع f(X) در بعضی مجاورت نقطه X_o تعریف شده باشد،همان طوریکه در بالا توسط فورمول نشان داده شده است، استفاده میکنیم:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0). \quad \text{و} \quad \Delta x = x - x_0$$

فرضاً برای تشخیص $\Delta x > 0$ به نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برابر به تغییرات متحول y در قطعه خط $[x_0, x_0 + \Delta x]$ به نسبت واحد اندازه گیری متحول X میباشد، طبیعی است که بنام قیمت متوسط تغییرات سرعت y در قطعه خط $[x_0, x_0 + \Delta x]$ نسبت به X یاد میشود، طوریکه Δx به صفر تقرب کند.

درصورت قرار دادن قطعه خط $[X_o , X_o + \Delta X]$ به نقطه X_o نسبت ${\Delta y}/{\Delta x}$ قیمت متوسط تغیرات سرعت متحول y نسبت به تحول X که در تمام قطعه خط کوچک و کوچکتر است در نقطه X_o بوجود می آید، پس تمام روایات در صورتیکه $\Delta X<0$ باشد برای قعطه خط $[X_o , X_o+\Delta X]$ صادق است. اگرلیمت $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ موجود باشد ، پس در اینصورت مشتق $\acute{f}(x_0)$ بنام تغییرات سرعت متحول y نسبت به تحول X در نقطه X_o یاد میشود.

یاد آور میشویم ، اگر درنقطه X_o مشتق $\acute{f}(x_0)$ موجود شود، پس در این صورت لیمت سرعت متوسط تغیرات y نسبت به x در قطعه خط های $[x_o - \Delta x , x_o+\Delta x]$ $\Delta x>0$ باشد، که نقطه x_o در داخل خود نظربه خصوصیت خود باقرار دادن آن به نقطه x_o (درصورتیکه $\Delta X \to 0$). مرکزیت را تشکیل می نماید.

ما درلیمت نیز مفهوم تغییرات سرعت y نظربه X در نقطه X_0 رابررسی نموده ایم، و در آن صورت داریم که $\acute{f}(x_0)$ میباشد.

حقیقتاً مفهوم سرعت متـــوسـط، تغییرات متحول y نسبت به x درقطعـه خط $[x_0 - \Delta x\ ,\ x_0+\Delta x]$ برابر است به $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ (تغییرات قسمت تقسیم شده تابع بالای تغییرات طول قطعه خط).

از اینجا : $lim_{\Delta X\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$

$$= {}^1\!/_2\,[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}] = \acute{f}(x_0)$$

جالب است ، یاد آور شویم که نسبت تفاضل $\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta)}{2\Delta x}$ قرار معلوم این تغییرات به مفهوم مشتق $\acute{f}$ درنقطه X نزدیک میشود.

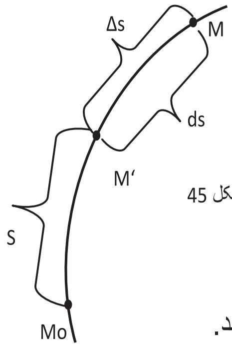
یعنی $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ (مراجعه نمائید به : پراگراف 62.6).

در تعبیر مشتق سرعت بمثابه تغییرات یک کمیت نسبت به کمیت دیگر، که در حقیقت استفاده از مشتق در مطالعه فزیک تاثیرات زیاد دارد، استفاده از دیفرانشیل نیز در تغییرات تزاید تابع رول اساسی را بازی میکند. دیفرانشیل امکانات تغییرات هر تابع رادر نقطه مطلوبه میدهد. تابع خطی بطورکلی حولی کوچکتر در نقطه X_0 میباشد. پس درا ینصورت شمارش که مربوط به تغییرات عملیه متحول میباشد ، نسبت خطی ارگومنت را بوجود می

آورد، یا به عبارت دیگر ممکن است گفته شود که تغییرات تابع مستقیماً متناسب به تغییرات ارگو منت میباشد.

یا طوریکه میگویند : عملیه یاد شده(کوچک) به اندازه برابر بوجود می آید که توسط این عملیه تزاید بی نهایت کوچک به ترتیب عالی نظر به تزاید ارگومنت بدست می آید.

فرضاً : S=s(t) قانون حرکت نقطه مادی (شکل 45) میباشد.



شکل 45

- S- طول فاصله به امتداد بعضی نقاط اولیه Mo
- T – وقت.

فرضاً : M موقعیت نقطه در لحظه زمانی t و M'

در لحظه زمانی t + Δt و Δs طول فاصله از M تا به M' میباشد.

پس در این صورت ΔS = s (t + Δt) – S(t) نسبت $\Delta s/_{\Delta t}$ در میخانیک به مفهوم قیمت

عددی سرعت متوسط حرکت نقطه در فاصله M تا M' میباشد. و $lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ قیمت عددی سرعت در نقطه M یا مفهوم عددی سرعت لحظوی در لحظه زمانی t به این ترتیبی $v=\frac{ds}{dt}$ بوده و به اساس تعریف دیفرانشیل فاصله ds = Vdt است.

همین قسم دیفرانسیال فواصل مساوی است به فاصله که ذره آنرا در اوقات کم در لحظه t تا t+Δt طی میکند . اگر این ذره به سرعت منظم حرکت کند مساوی باشد به سرعت لحظوی(به مفهوم قیمت عددی) ذره در لحظه t. همین قسم کمیت Δs حقیقتاً تغییر مکان ذره مساوی است به:

$\Delta S = ds + 0(\Delta t)$

به این ترتیب دیده میشود که از نظر میخانیکی نقطه از Δs به ds تغییر می یابد. به این معنی که ما حرکت مساوی الفاصله را مطالعه میکنیم.

2) فرضاً $q = q(t)$ مقدار برق که از مقطع عرضی لین عبور میکندt – وقت ، Δt یعنی لحظات زمانی باشد.

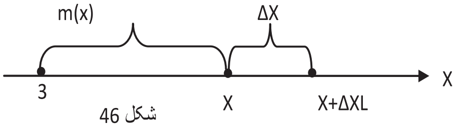
$\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ مقدار برق که از مقطع متذکره در لحظات زمانی از لحظه t تا $t + \Delta t$ عبور می نماید، پس دراین صورت $\Delta q/_{\Delta t}$ بنام قوه جریان متوسط در لحظه زمانی Δt یاد میشود و چنین نشان میدهند، I_{c_p} که لیمت آن $lim_{\Delta t\to 0}\, I_{c_p} = lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ قوه جریان برق در زمان داده شده t یا قوه جریان لحظوی به حرف I نشان داده میشود.

به این ترتیب $I = \frac{dq}{dt}$ و دیفرانسیال $dq = I\Delta t$ مساوی است به مقدار برقی که از مقطع عرضی در لحظه زمانی Δt از لین برقی عبور میکند.

اگر قوه جریان برق ثابت و برابر به قوه جریان در زمان t باشد

پس $\Delta t \to 0 \;, \Delta q \to dq = 0(\Delta t)$

3) فرضاً میله ای غیر متجانس به طول L داده شده است وفرضاً $m = m(x)$ کتله میله به طول x باشد، طوریکه $0 \le X \le L$ و از یک انجام معین اندازه شده باشد.



شکل 46

از روی شکل 46 داریم که : $\Delta m = m(x+\Delta x) - m(x)$

کتله انجام های میله که توسط نقاط محدود شده مطابق فاصله x واقع است که $x+\Delta x$ از انجام متذکره کمیت $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ بنام کثافت متوسط خطی میله در فاصله متدکره و به P_{c_p} نشان داده میشود.

لیمت $lim_{\Delta x\to 0} p_{c_p} = lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ بنام کثافت خطی میله در نقطه داده شده یاد میشود، و به حرف P نشان داده میشود و به این ترتیب $P = \frac{dm}{dx}$.

اگر کثافت ثابت باشد ، پس میله متجانس است وبه طور عموم دیفرانسیال میله غیر متجانس $dm = P\Delta x$ برابر به کتله متجانس طول Δx میله متجانس، با کثافت ثابت P برابر به کثافت میله ای بررسی شده در نقطه داده شده می باشد. طوریکه در مثال نشان داده شده است تعبیر مشتق را که بمثابه سرعت تلقی نموده یم نیز کثافت میله (سرعت) که عیناً سرعت تغییر کتله و تغییر طول میباشد رابه مفهوم بزرگ تلقی می نماییم.

9.5 قواعد مشتق گیری در ارتباط با عملیه های حسابی بالای توابع

حال فورمول هايي را برای جمع، ضرب و تقسیم مشتق حاصل می نماییم.

قضیه3: فرضاً تابع $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ در حوالی نقطه $x_0 \epsilon R$ تعریف شده است و در خود نقطه x_0 دارای مشتق میباشد ، پس در این صورت حاصل جمع آنها $f_1(x) + f_2(x)$.حاصل ضرب آنها $f_1(x)f_2(x)$. و اگر $f_2(x) \neq 0$ باشد، پس تقسیم $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ در نقطه x_0 دارای مشتق میباشد، چنانچه :

$$(y_1 + y_2)' = y'_1 + y'_2 \ldots \ (9.15)$$

$$(y_1 . y_2)' = y'_1 y_2 + y_1 y'_2 \ldots (9.16)$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y'_1 y_2 - y_1 y'_2}{y_2^2} \ldots \ (9.17)$$

(درفورمولهای (9.15) و (9.16) و(9.17) $x=x_0$)

نتیجه1: اگرتابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 دارای مشتق باشد، اگر $C \epsilon R$ باشد ،پس درآنصورت $C\,f(x)$ نیز دراین نقطه دارای مشتق میباشد.

که ازینجا : $(x = x_0)\,, (Cy)' = Cy' \ldots (9.18)$

نتیجه2: اگر تابع $y_R = f_R(x)$, $R = 1,2 \ldots, n$ در نقطه X_0 دارای مشتق باشد، پس در این صورت هر ترکیب خطی نیز دراین نقطه دارای مشتق میباشد ،طوریکه:

$$(c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n)' = c_1 y'_1 + \cdots + c_n y'_n$$

$R = 1,2 \ldots, n \quad , C_R \epsilon R$

ثبوت قضیه: فرضاً $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ درحولی $V(x_0)$ نقطه Xo معین باشد

$\Delta y_1 = f_1(xo + \Delta x) - f_1(xo)$ و $xo + \Delta x \epsilon V(xo)$

و: $\Delta y_2 = f_2(xo + \Delta x) - f_2(xo)$

ما دراینجا مختصراً ارائه ارگومنت تابع که تزاید آن تنها در نقطه Xo میباشد ، مطالعه خواهیم نمود ، اگر: $y = y_1 + y_2$ باشد، پس درآنصورت:

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_2) - (y_1 + y_2) = \Delta y_1 + \Delta y_2$$

ازاینجا در صورتیکه $\Delta x \neq 0$ باشد ، حاصل می نماییم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}$$

دراین جا گرفتن لیمت در صورتیکه $\Delta x \to 0$ وبا توجه به علت موجودیت مشتق توابع y_2 و y_1 در نقطه Xo در قسمت اول این مساوات به طرف چپ آن لیمت موجود است و مساوی به $\grave{y} + \grave{y}_1$ است پس دراین صورت مشتق y' موجود است. چنانچه $\grave{y} = \grave{y}_1 + \grave{y}_2$ باشد ، پس دراین صورت فرمول (9.15) ثبوت شد.

اگر $y = y_1 y_2$ باشد ، پس در اینصورت بطور مشابه پی هم خواهم داشت.

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1) + (y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = \Delta y_1 y_2 + y_1 \Delta y_2 + \Delta y . y_2$$

ازینجا : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2$

از موجودیت مشتق تابع $\grave{f}_2(x_0)$ در نقطه X_0 به نتیجه متمادیت تابع در نقطه Xo میرسیم.

طوریکه: $$lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

بغیر از آن: $$lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=\grave{y}_2 \quad و \quad lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}=\grave{y}_1$$

همین طور درصورتیکه $\Delta x \to 0$ لیمت را دریافت میکنیم.

ازمساوات حاصل شده داریم : $$\grave{y}=\grave{y}_1 y_2+y_1\,\grave{y}_2$$

پس در این صورت فورمول (9.16) ثبوت شد.

بلاخره اگر $y=\frac{y_1}{y_2}$ و $f_2(x_0)\neq 0$ باشد.

پس در اینصورت : $$\Delta y=\frac{y_1+\Delta y_1}{y_2+\Delta y_2}-\frac{y_1}{y_2}=\frac{\Delta y_1 y_2-y_1\Delta y_2}{(y_2+\Delta y_2)y_2}$$

و: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x}y_2-y_1\frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{(y_2+\Delta y_2)y_2}$$

ازاینجا در صورتیکه $\Delta x \to 0$ دوباره به یاد می آوریم که از موجودیت مشتق متمادیت تابع نتیجه میشود. و همین قسم :

$$lim_{\Delta x\to 0}\Delta y_2=0$$

پس حاصل میداریم که : $$\grave{y}=\frac{\grave{y}_1 y_2-y_1\,\grave{y}_2}{y_2^2}$$

پس دراین صورت فورمول (9.17) نیز ثبوت گردید.

نتیجه مستقماً از (9.11) به نتیجه رسید.

اگر $c'=0$ (مراجعه نمائید به : مثال1 درپرگراف 9.1) و نتیجه 2 را بیاد می آوریم که مستقیماً از فورمولهای (9.15) و (9.18) بر میتود استقرای ریاضی حاصل میشود.

تبصره: با استفاده از خواص لیمت های بی نهایت که با عملیه های حسابی بالای توابع ارتباط دارد (مراجعه نمائید به : پراگراف 5.10) ممکن است مطابق به خواص مشتق بی نهایت باشد.

بطور مثال : اگر مشتق متناهی $y'(X_o)$ و مشتق بی نهایت (به علامه معلوم) $\grave{y}_2(x_0)$ موجود شود ، پس در این صورت به تابع $y(x) \stackrel{\text{def}}{=} y_1(x) + y_2(x)$ در نقطه X_o مشتق به نهایت به عین علامه موجود میشود.

بطومثال: اگر $\grave{y}_2(x_0) = +\infty$ پس دراین صورت $\grave{y}(x_0) = +\infty$ حقیقتاً همینطور اگرلیمت متناهی $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$ و $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ و $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y^2}{\Delta x} = +\infty$ موجود میشود.

پس دراین صورت:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = +\infty$$

پس داریم که:

$y'(X_o)=+\infty$

مثالها:

1) فرضاً $y = e^x sinx - 2x^2 cosx$

به علت فورمولهای (9.15) ، (9.16) و (9.18) داریم که:

$$\grave{y} = (e^x sinx\grave{)} - 2(x^2 cosx\grave{)} = e^x sinx + e^x cosx - 2(2xcosx - x^2 sinx)$$

2) فرضاً : y = tgx طوریکه $tgx = \frac{sinx}{cosx}$ پس در اینصورت برحسب فورمول(9.17) داریم که:

$$\grave{y} = (\frac{sinx}{cosx}\grave{)} = \frac{cosxcosx - sinx(-sinx)}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

به این ترتیب $(tgx\grave{)} = \frac{1}{cos^2x}$

3) بطور مشابه برای y = ctgx

$$\grave{y} = (\frac{cosx}{sinx}\grave{)} = \frac{(-sinx)sinx - cosx.cosx}{sin^2x} = \frac{1}{sin^2x}$$

پس دراینصورت داریم $(ctgx\grave{)} = \frac{1}{sin^2x}$

خواص (9.15) تا (9.18) را میتوان به دیفرانسیال تابع تبدیل کرد.

در صورتیکه عین فرضیه نظربه دیفرانسیال گیری در نقطه xo باشد،

پس :

$$(d_1 y_1 + y_2) + dy_2$$

$$d(y_1 y_2) y_2 dy_2 + y_1 dy_2$$

$d(cy) = cdy$

$d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}$

بطورمثال : دیفرانسیال مشتق $y = y_1 y_2$ را محاسبه میکنیم :

$$dy = \grave{y}dx = (y_1 y_2)\grave{}dx = \grave{y}_1 y_2 dx + y_1 \grave{y}_2 dx = y_2 dy_1 + y_1 dy_2$$

همینطور : $\grave{y}_1 dx = dy_1 \quad , \quad \grave{y}_2 dx = dy_2$

بطورمشابه فورمولهای باقیمانده نیز ثبوت میشود.

9.6 مشتق تابع معکوس.

قضیه 4: فرضاً تابع $y=f(x)$ در بعضی حوالی نقطه x_o متمادی واکید مونوتونی باشد وفرضاً در صورتیکه $x=x_o$ باشد و مشتق $0 \neq \frac{df(Xo)}{dx}$ موجود باشد ، در اینصورت تابع معکوس $x = f_{y}^{-1}$ ودارای مشتق در نقطه $y_0 = f(x_0)$ میباشد.

اگر $\frac{1}{\frac{df(Xo)}{dx}} = \frac{df_{(yo)}^{-1}}{dy}$ باشد ، پس دراینصورت مشتق تابع معکوس مساوی است به کمیت معکوس مشتق تابع داده شده میباشد.

ثبوت: اگر حوالی نقطه x_o که در آن تابع f تعریف شده متمادی واکید مونوتونی باشد ، و میخواهیم تابع f را تنها دراین نقطه بررسی نماییم. دراینصورت طوریکه قبلاً در(مراجعه نمائید به : پراگراف 6.3) ثبوت گردیده که تابع معکوس تعریف شده در بعضی انتروالها متمادی است و نقطه y_0 را تشکیل میدهد و به این ترتیب حولی متذکره نقطه x_o میباشد.

همینطور اگر $\Delta x=x - x_o$ و $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$ باشد طوریکه $\Delta x \to 0$ مساوی به $\Delta y \to 0$ به این معنی که:

$$lim_{\Delta x\to 0}\, \Delta y = 0 \quad \text{برای تابع } f^{-1}$$

هرگاه $\Delta x \neq 0$ و $\Delta y \neq 0$ باشد داریم که:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

درصورتیکه $\Delta x \to 0$ ویا همین طور به بنابر گفتار بالا، در صورتیکه $\Delta y \to 0$ لیمت بخش راست موجود میشود. یعنی همین قسم لیمت بخش چپ موجود میشود.

چنانچه:

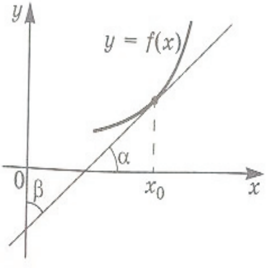
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}$$

همینطور: $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$

این قضیه ممکن است تعبیر روش هندسی را دهد (شکل 47) طوریکه واضح است $\frac{df(Xo)}{dx}=tg\propto$ دراینجا $\propto$ قیمت زاویه است که در گراف مماس تابع f در نقطه $(x_0\ ,\ y_0)$ به جهت مثبت محور ox تشکیل گردیده است و $\frac{df_{(y)}^{-1}}{dy}=tg\beta$ درینجا β قیمت زاویه است که مماس را نیز با محور oy تشکیل نموده است .

طوریکه معلوم است: $\beta=\frac{\pi}{2}-\infty$



شکل 47

همینطور:

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=tg\beta=\frac{1}{ctg\beta}=\frac{1}{ctg(\frac{\pi}{2}-\propto)}=\frac{1}{tg\propto}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

تمرین4: ثابت نمایید که اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً مونوتونی و متمادی در بعضی حولی نقطه x_0 باشد و اگر دراین نقطه تابع دارای متشق $\frac{df(x_0)}{dx}=0$ باشد ، در این صورت تابع معکوس $f^{-1}(y)$ دراین نقطه $y_0=f(x)$ دارای مشتق بی نهایت میباشد. و همین قسم اگر شرط $\frac{1}{0}=\infty$ را حساب نماییم پس آیافورمول (9.20) دراین صفحه صادق است یاخیر؟

5: مشابهت قضیه 3 را برای مشتق یکطرفه (متناهی ، بی نهایت) فورمول بندی و ثبوت نمایید.

مثالها:

1) $y=arcsnx$, $x=siny$, $\frac{-\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$, $-1\le x\le 1$

داده شده باشد با استفاده از فورمول(9.20) حاصل می نماییم:

$$\frac{dy}{dx}=(arc\ sinx)^{`}=\frac{1}{dx/_{dy}}=\frac{1}{cosy}$$

طوریکه : $\frac{-\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ پس cosy>0 است.

همینطور: $cony=\sqrt{1-sin^2y}=\sqrt{1-x^2}$ به این ترتیب $(arc\ sinx)^{`}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$-1 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq \pi , x = cosy \; , y = arc\ cosx$ (2

بطور مشابه به اساس فورمول گذشته داریم:

$$\frac{dy}{dx} = (arc\ cosx)\grave{} = \frac{1}{dx/_{dy}} = -\frac{1}{siny} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

پس در اینصورت داریم : $(arc\ cosx)\grave{} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$-\infty < x < +\infty , \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} , x = tgy \; , y = arc\ tgx$ (3

پس داریم: $\frac{dy}{dx} = (arc\ tgx)\grave{} = \frac{1}{dy/_{dx}} = cos^2y = \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2}$

و همینطور: $(arc\ tgx)\grave{} = -\frac{1}{1+x^2}$

$-\infty < x < +\infty , 0 < y < \pi , x = ctgy \; , y = arc\ tgx$ (4

دراین حالت $\frac{dy}{dx} = (arc\ ctgx)\grave{} = \frac{1}{dx/_{dy}} = -sin^2y = \frac{1}{1+ctg^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$

پس در آنصورت $(arc\ ctgx)\grave{} = -\frac{1}{1+x^2}$

5) اگر $y = log_a \text{x}$ $x = a^y$ $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

$-\infty < y < +\infty$ پس $\frac{dy}{dx} = (log_a x)\grave{} = \frac{1}{dx/_{dy}} = \frac{1}{a^y\, ln\, a} = \frac{1}{x\, ln\, a}$

پس درآنصورت داریم : $(log_a x)\grave{} = \frac{1}{x\, ln\, a}$

درحالت خاص درصورتیکه : a=e داریم $(ln\, x)\grave{} = \frac{1}{x}$

9.7 مشتق و دیفرانسیال توابع مرکب.

قضیه 5: فرضاً تابع $y = f(x)$ در نقطه xo دارای مشتق میباشد و تابع $z = f(y)$ در نقطه

$y_0 = f(x_0)$ دارای مشتق میباشد.

پس درآنصورت تابع مرکب $\phi(x) = F[f(x)]$ نیز دارای مشتق میباشد ، در صورتیکه

$x=x_o$ باشد.

چنانچه:

$$\grave{\phi}(x_0) = \grave{F}(y_0)\grave{f}(x_0) \ldots (9.21)$$

اگر تابع مرکب ϕ توسط سمبول $\phi = Fof$ (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.2) ارایه گردد پس فورمول (9.21) رامیتوان بشکل ذیل نوشت:

$$(Fof\grave{)}(x_0) = \grave{F}(f(x_0))\grave{f}(x_0)$$

درنتیجه توجه تان را به بیان موجودیت مشتق در نقطه xo تابع مرکب $F[f(x)]$ جلب میکنیم . به اساس فرضیه، ازینکه تابع مرکب مورد نظر دارای قیمت میباشد، پس دراین صورت تابع مرکب دربعضی حوالی نقطه x_o تعریف شده است با داخل کردن ارگومنت و استفاده از نوشته مشتق توسط دیفرانسیال مساوات (9.21) را میتوان به شکل ذیل نوشت:

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dz\,dy}{dy\,dx}$$

ثبوت: قبل از همه به علت خود تعریف مشتق تابع F که دربعضی حولی $U(y_0)$ نقطه y_0 تعریف شده است. وهمینطور موجودیت مشتق$\grave{f}(x_0)$ متمادیت تابع f نتیجه میشود.

پس برای حوالی متذکره $U(y_0)$ چنان حوالی $U(x_0)$ در نقطه x_0 موجود میشود که:

$f(U(x_0)) \subset U(y_0)$ است و همینطور $x \in U(x_0)$ دارای قیمت تابع مرکب F[f(x)] میباشد . طبق معمول داریم که $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$ و $\Delta z =$ $F(y) - F(y_0)$. تابع F در نقطه y_0 دارای مشتق بوده و همینطور دراین نقطه دیفرانشیل پذیر میباشد.(مراجعه نمائید به: پراگراف 9.2)

به این معنی که تزاید Δz درتمام Δy که متعلق به بعضی حوالی نقطه $\Delta y = 0$ (درصورتیکه عدداً $\Delta y=0$) باشد فورمولهای (مراجعه نمائید به: (9.6)و(9.7) به شکل ذیل قرار میدهیم:

دراینجا $\varepsilon(\Delta y)$ در تابع صفری متمادی است و $lim_{\Delta y \to 0}\, \varepsilon(\Delta y) = 0$

و هردو بخش مساوات (9.22) بالای $\Delta x \neq 0$ تقسیم می نماییم

حاصل میداریم : $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \grave{F}(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x} \ldots (9.23)$

تابع $y=f(x)$ درنقطه x_0 دارای مشتق میباشد، پس در آنصورت لیمت موجود میشود.

یعنی:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \grave{f}(x_0) \ldots (9.24)$$

از موجودیت مشتق $\grave{f}(x_0)$ متمادیت تابع y =f(x) در نقطه x_0 نتیجه میشود که:

$$lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

درصورتیکه Δx=0 باشد، داریم Δy=0. همینطور به تزاید Δy تابع مورد بررسی مانند Δx درنقطه Δx=0 متمادی است.

همینطور طبق اصول تغییرات متحولین در نسبت های لیمتی که دارای تابع متمادی میباشد(مراجعه نمائید به : پراگراف 5.16) برابر است به

$$lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0 \ldots (9.25)$$

حال از (9.23) به سراغ لیمت میریم در صورتیکه Δx→0 به اساس فورمولهای (9.24) و (9.25) فورمول تابع (9.21) را حاصل میداریم.

تبصره: فورمول (9.21) برای مشتق تابع مرکب وقتی صادق میباشد که تابع تحت مشتق به مشتق یکطرفه مطابقت نماید. اگرمشتق یکطرفه یا (دوطرفه) تابع مرکب ضرورت باشد درآن صورت طرف چپ فورمول (9.21) برای دریافت چنین مشتق تابع مرکب بجا است.

نتیجه فورمول احتمالی دیفرانشیل نظر به متحول مستقل قرار ذیل میباشد:

$$dz = \grave{f}(y_0$$

دراین فورمول $dy = \grave{f}(x)dx$ عبارت ازدیفرانسیال تابع میباشد و dx دیفرانسیال متحول مستقل میباشد.

به این ترتیب دیفرانشیل تابع دارای عین شکل میباشد.

حاصل ضرب مشتق برحسب بعضی متحولین مستقل "دیفرانشیل متحولین" به نوبت خود این متحول عبارت از متحول تابع یا متحول مستقل میباشد.

طبق فورمول:

و ازفورمول (9.21) برای مشتق تابع مرکب استفاده میکنیم، حاصل مینمایم $dz = \grave{f}(y_0)\grave{f}(x_0)dx$ و $\grave{f}(x_0)dx = dy$ پس $dz = \grave{f}(y_0)dy$.

فورمول (9.26) ممکن است چندین عبارت را بیان نماید . اگر به یاد آوریم که دیفرانسیال تابع در نقطه عبارت از تابع خطی نظربه دیفرانسیال متحول مستقل میباشد.

طبق (9.21) دیفرانشیل تابع $d\phi = \grave{F}(y)\grave{f}(x_0)dx$ میباشد.

پس دراین صورت به نتیجه تابع خطی رسیده ایم $dx = \grave{f}(x_0)dx$ که توسط دیفرانشیل df داده شده (دراینجا(y = f(x) در تابع خطی $dz = \grave{f}(y_0)dy$ که دیفرانشیل df را میدهد.

دراینجا : z = F(y) یا به عبارت دیگر دیفرانسیال مقدماتی $\phi = Fof$ عبارت از دیفرانشیل مقدماتی dF وdf میباشد. $d(Fof) = df^{o}df$

یاد آور میشویم که قضیه 5 برحسب استقرأ ریاضی بالای هرتعداد متناهی تابع تطبق میشود.

بطور مثال : برای تابع مرکب شکل z (y (x (t))) درحالت دیفرانشیل گیری تابع x(t) , z(y) , y(x) نظر به نقطه فورمول ذیل بجا خواهد بود. $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$ برای نشان دادن

مشتق z مشتق تابع مرکب $z = z(y)$ $y = y(x)$ همینطور x به حیث اندکس (شاخص) پایینی استفاده میشود، پس درآنصورت مینویسند $z\grave{}_x$ یا y حسب همان متحول که لیمت آن گرفته میشود نشان داده میشود. $z\grave{}_y$ و این کار بخاطر مختصر ساختن توابع صورت میگیرد.

فورمول (9.21) به ارائه نمودن شکل فوق چنین مینویسند: $z_x = z_y y_x$

مثالها:

1) فرضاً $y = x^a$, $x > 0$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را دریافت میکنیم.

داریم : $x^a = e^u$ دراینجا $u = a\,ln\,x$ یاد آور میشویم که $\frac{du}{dx} = \frac{a}{x}$ حاصل می نماییم.

$$\frac{dx^a}{dx} = \frac{de^u}{dx} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx} = e^u\frac{a}{x} = e^u\,ln\,x \qquad \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

همین قسم : $(x^a)^1 = ax^{a-1}$

بطور مثال : اگر $y = x^2$ پس $\grave{y} = 2x$

اگر: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ پس $\grave{y}(-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

اگر: $y = \sqrt{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$ پس $\grave{y} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

اگر: تابع $y = x^{a}$ درصورتیکه x<0 تعریف شده باشد، پس درآنصورت این قیمت نیز دارای مشتق میباشد ، یعنی:

$\grave{y} = ax^{a-1}$

2) فرضاً $y = ln|x|$ ، x≠0 باشد. وقتیکه x>0 داریم $\grave{y} = (ln\,x)\grave{} = \frac{1}{x}$ و

درصورتیکه x<0 باشد، داریم $\grave{y} = [ln(-x)]\grave{} = \frac{1}{-x}(-x)\grave{} = \frac{1}{x}$.

به این ترتیب برای هر x≠0 فورمول ذیل صادق است:

$$(ln|-x|)\grave{} = \frac{1}{x} \ldots (9.27)$$

ازاینجا برحسب اصول دیفرانشیل توابع مرکب برای هرتابع u(x) در نقطه x که درآن مشتق $\grave{u}(x)$ موجود و u(x)≠0 باشد، نسبت ذیل بجا خواهد بود:

$$(ln|u(x)|)\grave{} = \frac{\grave{u}(x)}{u(x)} \ldots (9.28)$$

تبصره 2: فورمول (9.27) رامی تواند مستقیماً برای هر x≠0 از فورمول دیفرانسیال تابع مرکب را حاصل نمود، اگر بیاد آوریم درصورتیکه x≠0 باشد مساوات $|\grave{x}| = signx$ بجا خواهد بود.

(مراجعه نمایدبه مثال 1 در اخیر پراگراف (9.2) واقعاً حاصل می نماییم $u = |x|$ برای هر X≠0 حاصل می نماییم.

$$\frac{d\,ln|x|}{dx} = \frac{d\,ln\,udu}{du\,dx} = \frac{1}{u}signx = \frac{signx}{|x|} = \frac{1}{x}$$

(3) مشتق تابع ذیل را دریافت نمایید: $y = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$, $x \neq a$ $x \neq -a$ باشد، به علت فورمول (9.28) داریم:

$$\grave{y} = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}(\frac{x-a}{x+a})^1 = \frac{1}{2a}\frac{x+ax+a-(x-a)}{x-a(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

(4) مشتق تابع $y = ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right.$ مشابه به فورمول گذشته دریافت نمایید.

$$\grave{y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}(x + \sqrt{x^2 + A})^1 = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+A}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$$

(5) فرضاً $y = ln^2 arc\ sin\ \frac{1}{x}$ ، x>1 باشد مشتق تابع این تابع را دریافت نمایید.

$$\grave{y} = (ln^2 arc\ sin\ \frac{1}{x}) = 2ln\ arc\ sin\ \frac{1}{x}(ln\ arc\ sin\frac{1}{x}\grave{)} =$$

$$2ln\ arc\ sin\ \frac{1}{x}\frac{1}{arc\ sin\frac{1}{x}}(arc\ sin\ \frac{1}{x})^1 = 2\frac{ln\ arc\ sin\frac{1}{x}}{arc\ sin\frac{1}{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}(\frac{1}{x})^1 =$$

$$-\frac{2ln\ arc\ sin\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\ arc\ sin\frac{1}{x}}$$

از اینجا دیفرانسیال مستقیماً در فورمول $dy = \grave{y}dx$ واقع است.

دیفرانسیال را ممکن است مستقیماً دریافت کرد، بااستفاده از احتمال نظربه انتخاب متحولین:

$$d(ln^2 arc\ sin\ \frac{1}{x}) = 2ln\ arc\ sin\ \frac{1}{x}d(ln\ arc\ sin\frac{1}{x}) =$$

$$2ln\ arc\ sin\ \frac{1}{x}\frac{1}{arc\ sin\frac{1}{x}}d(arc\ sin\ \frac{1}{x}) = \frac{2ln\ arc\ sin\frac{1}{x}}{arc\ sin\frac{1}{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d(\frac{1}{x}) =$$

$$\frac{-2ln\ arc\ sin\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\ arc\ sin\frac{1}{x}}dx$$

(6) توسط قضیه 5 یک بخش دیگراستعمال فورمول را استخراج میکنیم.

فرضاً $y = u^v$ درینجا u(u(x))>0 ، v = v(x) تابع داده شده بشکل $y = e^v ln\, u$ میگزاریم و $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه میکنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{v\,ln\,u}}{dx} = e^{v\,ln\,u}\frac{d}{dx}(v\,ln\,u) = u^v(\frac{dv}{dx}ln\,u + \frac{vdu}{udx} =$$

$$u^v(\frac{dv}{dx}ln\,u - v\,u^{v-1}\frac{du}{dx}$$

به این ترتیب مشتق تابع u^v مساوی است به حاصل جمع دوعامل جمع شونده که عامل اول از آنها به مشتق u^v نظر به فرضیه مطابقت میکند و u ثابت است. و دوم با مشتق u^v به فرضیه مطابقت میکند V ثابت است و توسط اصول دیفرانسیال گیری تابع مرکب ممکن است مشتق تابع داده شده غیر آشکار را دریافت نمود.

(7) فرضاً تابع دیفرانسیال پذیر y=y(x) در معادلات غیرآشکار F(x,y)=0 داده شده است (مراجعه نمائید به: پراگراف 5.2).

سوال در این جاست که چطور قرار گیرد که معادله داده شده درحقیقت بعضی توابع را تعریف میکند و آیا دیفرانسیال پذیر است؟ در زمینه درآینده معلومات ارائه خواهیم داد.

همین قسم دیفرانسیال F(x,y(x)≠0 ، مانند توابع مرکب ممکن است مشتق آنرا حساب نمود $\frac{dy}{dx}$ به خصوص مثال مشتق تابع غیر آشکار y(x) را محاسبه میکنیم.

اگر معادله $x^2 + y^2 = a^2$ داده شده، موجودیت چنین تابع بطور مثال $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ وهمین قسم $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ اگر معادله $x^2 + y^2 = a^2$ دیفرانسیال پذیر باشد ، پس

تابع y را از جنس x محاسبه میکنم در نتیجه حاصل می نماییم $2x + 2y\grave{y} = 0$ ازاینجا $y = -\frac{x}{y}$ میباشد. به مسایل مشابه درهندسه بر میخوریم، فرضاً بطور مثال : خواسته میشود که مماس به دایره $x^2 + y^2 = 25$ در نقطه (4،3) را دریافت نمایید.

ضریب زاویوی R مماس مساوی به مشتق $R = \grave{y}$ یعنی در حالت داده شده $R = -\frac{x}{y}$ برای نقطه مورد مطالعه $R = -\frac{3}{4}$. همین طور معادله مطلوبه مماس را میتوان به شکل ذیل نوشت : $y - 4 = -\frac{3(x-3)}{4}$ پس درآنصورت از میتود دیفرانشیل گیری به تابع غیرآشکار ازفورمول استخراج شده که قبلاً به دیگر فواصل صورت گرفته استفاده می نماییم.

(8) از سر تابع $y = u^v$ را مطالعه می نمایم و لوگارتم آنرا میگیریم مسئله تابع غیرآشکار

$ln\, y = v\, ln\, u$ راحاصل می نماییم و هر دوبخش این معادله را دیفرانشیل میگیریم.

داریم . $\frac{\grave{y}}{y} = \grave{v}\, ln\, u + \frac{v}{u}\grave{u}$ (افاده $((ln\, y)\grave{} = \frac{\grave{y}}{y}$ بنام مشتق تابع لوگارتمی یاد میشود(x)=y یا $\grave{y} = y(\grave{v}\, ln\, u + \frac{v}{u}\grave{u})$ با قرار دادن $y = u^v$ از سربه سراغ فورمول (9.29) میرویم. با دیگر تابع y=arc sin x که غیرآشکار است آن را مطالعه می نماییم. و معادله x=siny به دست میدهد.

و هردو بخش آنرا نظربه x دیفرانسیال میگریم، پس حاصل می نماییم که $1 = \grave{y}\, cos\, y$.

ازینجا: $\grave{y} = \frac{1}{cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

پس در آنصورت همینطور که در پراگراف 9.6 بوده است ثبوت شد.

(9) فرضاً یک تابع داده شده باشد که به فورمول مطابقت نمیکند، درآنصورت از تعریف اول مشتق استفاده می نماییم و آنرا دریافت میکنم.

بطور مثال: مشتق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x} & \text{درصورتیکه } x\neq 0 \\ 0 & \text{درصورتیکه } x=0 \end{cases}$ درصورتیکه x≠0 باشد موجودیت مشتق توسط فورمول دیفرانسیال محاسبه میشود.

$\grave{f}(x)=2xsin\frac{1}{x}.cos\frac{1}{x}$ درنقطه Xo مشتق مستقیماً دریافت میگردد.

از تعریف اول $0=\grave{f}(0)=lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=lim_{x\to 0}x\,sin\frac{1}{x}$ به این ترتیب تابع f(x) درتمام محور عددی دیفرانسیال پذیر میباشد.

تبصره: با استفاده ازقضیه 5 میتوانیم تمام فورمولهای حاصل شده رابرای مشتقات توابع اساسی تابع ابتدایی بشکل عمومی نوشت. اگر u=u(x) تابع دیفرانشیل پذیر باشد

فورمولها را میتوان قرار ذیل نوشت:

(1) $(\sin u)\grave{} = \grave{u}\cos u$

(2) $(\cos u)\grave{} = -\grave{u}\sin u$

(3) $(tg\,u)\grave{} = \frac{\grave{u}}{cos^2 u}$

(4) $(c\,tg\,u)\grave{} = -\frac{\grave{u}}{sin^2 u}$

(5) $(u^{\propto})\grave{} = \propto u^{\propto-1}, (u>0)$

$$(6) \quad (a^u)\grave{} = a^u\, u \ln u$$

$$(7) \quad (e^u)\grave{} = e^u \grave{u}$$

$$(8) \quad (\ln u)\grave{} = \frac{\grave{u}}{u} \quad ,(u > 0)$$

$$(9) \quad (\arcsin u)\grave{} = \frac{\grave{u}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(10) \quad (\arccos u)\grave{} = -\frac{\grave{u}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(11) \quad (arc\,tg\, u)\grave{} = \frac{\grave{u}}{1+u^2}$$

$$(12) \quad (arc\,ctg\, u)\grave{} = -\frac{\grave{u}}{1+u^2}$$

از فورمولهای فوق معلوم گردید که " درصورتیکه u=x " مشتق تابع ابتدائی اساسی عبارت از تابع ابتدائی میباشد.

بصورت کل فورمولهای حاصل شده امکان آنرا میدهد که مشتق و دیفرانسیال هر تابع ابتدائی درحالتي که اگر این مشتق موجود باشد، پس ازاینجا نتیجه میشود که هرتابع ابتدائی در تمام نقاط ساحه تعریف خود دارای مشتق میباشد. مثال : تابع ابتدائی که درتمام نقاط دومین خوددیفرانسیال ندارد،عبارت $|x| = \sqrt{x^2}$ و نیز دارای مشتق درنقطه x=0 نمیباشد(مراجعه نمائید به: پراگراف 9.2)

تمرین6: آیا ممکن است فورمول $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ را ثبوت کرد؟ درصورتیکه $dy\neq 0$ باشد تنها بالا dy و $\frac{dz}{dx}$ ضرب و تقسیم نمایید. آیا میتوانید فورمول $\frac{1}{dy/dx}=\frac{dx}{dy}$ را ثبوت کنید؟

در صورتیکه $dx\neq 0$ باشد صورت و مخرج کسر $\frac{dx}{dy}$ را بالای dx تقسیم کنید.

(7) واضح سازید که تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{درصورتیکه } x\neq 0 \\ 0 & \text{درصورتیکه } x=0 \end{cases}$ درنقطه y=0 متمادی است و آیا مشتق در این نقطه وجوددارد یا خیر؟

و آیا میتواند مشتق یکطرفه داشته باشد؟

9.8 توابع هایپربولیک و مشتقات آنها

تعریف 5: توابع $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ و $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ را بنام کوساین هایپربولیک و ساین هایپربولیک یاد میشود و توسط سمبول های chx و shx نشان داده میشود.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

فورمول (9.29) … … $ch^2x - sh^2x = 1$ همیشه صادق است.

حقیقتاً:

$$ch^2x - sh^2x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

شکل پارامتريك هایپربول در فارمول ذیل نشان داده شده است :

$$y = a\sin t \ , \ x = a\cos t .....(9.31)$$

که معادلات شکل پارامتريك دايره را میدهد .

بصورت عموم ، اگر اطراف فارمول هاي (9:30) مربع شده و يكي از ديگر تفريق شوند و از فرمول (9:29) استفاده شود ، پس در آنصورت حاصل میکنیم :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

پس این معادلـه مسـاوي بـه معادلـه هـاپیربول استوانوی میباشد . بطـور تحلیلـي از(9:31) بـه نتیجـه میرسیم کـه x و y معادلـه $x^2 - y^2 = a^2$ را صـدق میکنـد ، پـس معادلـه فوق معادلـه دایره میباشد . مشتق سینوس و کوسینوس هاپیربولیك را دریافت مي نماییم :

یادآورمیشویم که:

$$\left(-e^{-x}\right)^1 = -e^{-x}$$

پس داریم که :

$$(chx)^1 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^1 = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$$

$$(shx)^1 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

بـه ایـن ترتیـب $(shx)^1 = chx$, $(chx)^1 = shx$ و نسـبت $\frac{chx}{shx}$, $\frac{shx}{chx}$ در مقایسـه بـا سـینوس و کوسـینوس عـادي بنـام تانجانـت و کوتانجانـت هاپیربولیـك یـاد میشـوند و چنـین مینویســند : $\frac{shx}{chx} = thx$, $\frac{chx}{shx} = cthx$ تــابع معکــوس هاپیربولیــك ســینوس shx و هاپیربولیك کوسینوس chx به $archx$ و $archx$ نشان داده میشود و چنین میخوانند (آرک سینوس ، آرک کوسینوس)

تـابع معکـوس هاپیربولیـك آرک سینوس ($archx$) و هاپیربولیك آرک سینوس ($archx$) از طریق توابع لوگارتمي و غیر ناطق ارائه میگردد .

بـــراي دريافـــت تـــابع معكـــوس shx چنـــين مينويســـيم : $y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ بشـــكل $e^{2x}-sye^{x}-1=0$ و حل ميكنيم و رابطـه بشكل مربـع e^{x} را مينويسيم و جذر منفي را حذف مينماييم (e^{x} منفي نمي باشد) ازينجا حاصل ميداريم :

$$e^{x}=y+\sqrt{y^{2}+1}$$
$$x=avshy=1n(y+\sqrt{y^{2}+1})$$

تابع $archy$ يك قيمته بوده و در تمام محور عددي متمادي ميباشد .

دقيقاً براي $y=chx$ مربع معادله e^{x} حاصل ميگردد .

از اينجا :

$$e^{2x}-2ye^{x}+1=0$$
$$e^{x}=y\pm\sqrt{y^{2}-1}$$

در نتيجه : $x=archy=\left|n\right|\pm\sqrt{y^{2}-1}$ تـابع $archy$ بـراي تمام $y\geq 1$ معين بـوده و دو قيمته ميباشد (به جز از قيمت y=1)

تمـــرين 8: مشـــتق تـــابع thx , $cthx$ را محاســـبه نمـــوده و گرافهـــاي t توابـــع $y=chx$, $y=shx$, $y=thx$, $y=cthx$ را ترسيم نموده و نيـز مشـتق توابـع معكـوس آنها را دريافت نماييد .

10.§ مشتقات ودیفرانسیال های ترتیب عالی

10.1: مشتقات ترتیب عالی

تعریف1: فرضاً تابع f(x) درانتروال (a, b) معین است.

ودرهرنقطه $x \in (a,b)$ دارای مشتق $f'(x)$ میباشد وفرضاً $x_0 \in (a,b)$ باشد اگر $x = x_0$ و $f'(x)$ مشتق تابع f(x) باشد وتابع $f'(x)$ خودش درنقطه x انتروال (a, b) مشتق پذیر باشد یعنی درین نقطه دارای مشتق باشد بنابرین مشتق ذکر شده بنام مشتق دومی ویا (مشتق ترتیب دوم) تابع y=f(x) درنقطه x_0 یاد میگردد یعنی مشتق از مشتق تابع بنام مشتق دوم تابع یاد میگردد وچنین نشان داده میشود $f''(x_0)$ یا $f^2(x_0)$ به این ترتیب مشتق دوم $y'' = (y')'$ را نیز میتوان ارائه نمود یا میتوان توسط سمبول ارگومنت $f''(x_0) =' [f(x)]_{x=x_0}$ نشان داد. وبطور مشابه مشتق ترتیب دلخواه توسط سمبول y^n نشان داد طوریکه n=1,2,.... باشد.

اگر فرض گردد که مفهوم مشتق (n-1) ام حاصل گردد ومشتق (n-1) ام درنقطه x انتروال (a,b) مشتق پذیر باشد پس مشتق مذکور بنام مشتق n ام ویا مشتق ترتیب n تابع y=f(x) یاد گردیده.

پس به اساس تعریف رابطه که مشتق n ام را ارائه می نماید دارای شکل ذیل میباشد

$$y^n = [y^{(n-1)}]$$

برای تعین مشتق n ام درنقطه x_0 میتوان آنرا به شکل لیمت چنین تحریرنمود.

$$n = 1, 2, ..., f^n{}_{(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

فرضیه را خاطر نشان میسازیم که درآن تابع f درنقطه x_0 دارای مشتق ترتیب nام میباشد. بنابر آخرین تعریف نتیجه میشود که اگر دربعضی حوالی نقطه x_0 تابع f دارای مشتق ترتیب (n-1)ام بوده درصورتیکه n>1 باشد وتمام مشتقات ترتیب پائین تر از k<n-1 بوده که درین صورت خود تابع دربعضی حوالی نقطه x_0 معین میباشد.

به این سبب تمام مشتقات ترتیب پائین تر که کوچک از (n-1) باشد دربعضی حوالی متمادی است ودر هرنقطه دارای مشتق میباشد.

(مراجعه نماید به : قضیه 1 و 2 درپراگراف 9.2) تمام روش درین جا به شکل طبیعی بوده انتقال شده که بنام مشتق یک طرفه ترتیب عالی یاد میشود که هر خواننده آنرا میتوان مستقلانه معین نماید.

تعریف2: تابع متمادی بنام Pn بار بروی مستقیم دیفرانسیل پذیر یاد میشود اگر درتمام نقاط روی مستقیم دارای دیفرانسیل متمادی تا ترتیب n ام باشد طوریکه (n=1,2,.....) باشد.

حقیقتاً به اساس تعریف موجودیت مشتق ترتیب n ام مورد بررسی روی مستقیم واحتمال موجودیت مشتق ترتیب (n-1)ام را درآن به اندازه هرتابع کیفی دربعضی نقاط نتیجه میشود طوریکه فوقاً از آن تذکر بعمل آمده تابع درین نقطه متمادی بوده ومشتق ترتیب (n-1)ام متمادی روی مستقیم میباشد.

حقیقتاً طبق تعریف موجودیت مشتق ترتیب n ام درفاصله مورد بررسی وموجودیت مشتق ترتیب (n-1) ام رادرآن فرض میکند به همین ترتیب از موجودیت مشتق هر تابع دربعضی نقاط نتیجه میشود:

تابع درنقطه دارای مشتق ترتیب (n-1)ام بوده ودرفواصل داده شده متمادی است. بطورهم مانند درحالت n>1 باشد پس متمادیت تابع را درفواصل متذکره مشتق ترتیب n-2 وغیره را به اثبات میرسانند.

مثال1: $y = x^3, y' = 3x^2, y'' = 6x, y^{(3)} = 6$

2: مشتق n ام تابع نمائی $y = a^x$ را محاسبه می نمایم طوریکه پی درپی مشتق آنرا گرفته درآنصورت خواهیم داشت:

$$y = a^x, y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a, y^{(3)} = a^x \ln^3 a$$

بصورت عموم بنابر حسب استقرای ریاضی بشکل ساده چنین مینویسند:

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a$$

(درحالت خاص) $(e^x)^{(n)} = e^x, n = 0,1,.....$

3: مشتق y=sinx را محاسبه می نمایم طوریکه پی درپی مشتق آنرا میگیریم حاصل مینمایم.

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y^{(3)} = -\cos x, y^{(4)} = \sin x$$

به همین قسم مشتق آن تکرار میشود.تابه آخرین درجه عملیه را ادامه میدهیم.برای اینکه نتیجه به شکل یک فارمول نوشته شود یاد آور میشویم که:

برای مشتق گیری تابع y=sinx به ارگومنت این تابع $\frac{\pi}{2}$ را علاوه می کنیم یعنی:

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

زیراکه :

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$$

برحسب استقراء: $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ ......n=1,2, وغیره.

4: برای y=cosx یاد آور میشویم که: $-\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

بطور هم مانند فورمول ذیل را حاصل می نمایم: $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), n = 1, 2, ...$

10.2: مشتقات ترتیب عالی جمع وضرب توابع

قضیه 1: فرضاً توابع $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ دارای مشتقات ترتیب n ام درنقطه x_0 باشد پس توابع

$y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ و $y_1 y_2 = f_1(x) f_2(x)$ نیز دارای مشتقات ترتیب n ام درنقطه x_0 میباشد.یعنی:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} ....(10.1)$$

$$(y_1 y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} y_2 + C_n^1 y_1^{(n-1)} y_2^{(1)} + C_n^2 y_1^{(n-2)} y_2^{(2)} + y_1 y_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} = C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)} ...(10.2)$$

درینجا C_n^k عدد است از n عناصر k(k=0,1,2....n) ترکیب یافته است فارمول (10.2) فارمول لینیزبوده وبطور سمبولیک میتوان چنین نوشت: $(y_1y_2)^{(n)}=(y_1+y_2)^{\{n\}}$ اندکس $\{n\}$به این معنی که افاده $(y_1+y_2)^{\{n\}}$ هم مانند بینوم نیوتن نیوتن بشکل مجموع همراه با ضریب فارمول بینومیلی نوشته میشود.وتنها درجه مشتق توابع y_1 و y_2 مطابق به ترتیب تغیر نمی خورد.

(مراجعه نماید به : (10.2)). فورمول های (10.1) و (10.2) به اساس استقرای ریاضی ثبوت میشود درصورتیکه n=1 باشد که برای مشتق ترتیب اول آنها در پراگراف 9.5 ثبوت شده اند.

فرضاً این فورمول ها برای مشتق ترتیب n ام واضیح باشد.حال آنها را مطابق مشتق ترتیب n+1 ثبوت میکنیم.

درحالت جمع توابع داریم:

$$(y_1+y_2)^{(n+1)}=[(y_1y_2)^{(n)}]'=(y_1^{(n)}+y_2^{(n)})^1=(y_1^{(n)})^1+(y_2^{(n)})^1=y_1^{(n+1)}+y_2^{(n+1)}$$

فورمول (10.2) ثبوت شد.درحالت ضرب توابع استخراج فورمول آن کمی مشکل است.

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=[(y_1y_2)^{(n)}]'=\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}\right]'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)}+y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{K=0}^{n}C_n^k y_1^{(n+1-k)}y_2^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}$$

درینجا ما از $C_n^0=C_n^n=1$ استفاده نمودیم حال اندکس را درجمع کردن مجموع دوم تغیر میدهیم k=p-1 حال اندکس جدید p درعملیه جمع میتواند از 1 تا n تغیر نماید. بعدازآن از حاصل جمع بدست آمده عامل جمعی باید مفهوم هم جنس مشتق را دو بدو یکجا میسازیم واندکس عمومی عملیه جمع را توسط p نشان میدهیم درآنصورت خواهیم داشت:

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{p=1}^{n}(C_n^p+C^{p-1}{}_n)....y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}$$

از ینجا یاد آور میشویم که: $C_n^p+C_n^{p-1}=C_n^p+1$ وهمچنان $C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1$

حاصل میداریم $(y_1y_2)^{(n+1)}=y_1^{(n+1)}y_2^{(0)}+\sum_{p=1}^{n}C_n^p+y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}+y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}=\sum_{p=0}^{n+1}C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}$

نتیجه: اگر C ثابت بوده y=f(x) تابع مشتق پذیر ترتیب nام درنقطه x_0 باشد ، پس تابع cf(x) نیز دارای مشتق ترتیب n ام میباشد درصورتیکه $x = x_0$ شود بجا خواهد بود که:

$$C(y)^{(n)} = Cy^{(n)}....(10.3)$$

حقیقتاً اگر در فورمول (10.2) $y_1 = C$ و $y_2 = y$ حاصل گردد پس فورمول (10.3) بدست می آید.جهت این کار مثال ذیل را به بررسی میگرم:فرضاً $y = x^3 \sin x$ توسط فورمول لیبنیزمشتق $y^{(0)}$ را دریافت میکنیم.

$$(x^3 \sin x)^{(10)} = x^3 \sin(x + 10\frac{\pi}{2}) + 10.3x^2 \sin(x + 9\frac{\pi}{2}) + 10.9.3x \sin(x + 8\frac{\pi}{2}) + 10.9.8.\sin(x + 7\frac{\pi}{2}) =$$
$$= -x^3 \sin x + 30x^2 \cos x + 270x \sin x - 270 \cos x.$$

10.3: مشتقات ترتیب های عالی توابع مرکب معکوس توابع ، توابع معکوس و توابع که به صورت پارامتری داده شده باشند.فرضاً تابع Y=y(x) دارای مشتق دوم درنقطه x_0 باشد.

و Z=z(y) دارای مشتق دوم درنقطه $y_0 = y(x_0)$ باشد پس تابع مرکب Z[y(x)] درصورتیکه $x = x_0$ باشد دارای مشتق دوم میباشد.

چنانچه $z'_{xx} = z''_{yy} y'^2_x + z'_y y''_{xx} ...(10.4)$ حقیقتاً به هراندازه که مشتقات $y''(x_0)$ و $z''(y_0)$ موجود شود به همان اندازه نیز $y'(x_0)$ و $z'(y_0)$ موجود میشود.

لینیز (1716-1664) فیلسوف وریاضیدان آلمانی

y_0 متمادی میباشند.

زیرا که دربعضی حوال نقطه x_0 تابع مرکب Z=z[y(x)] تعریف شده است ودیفرانسیل آنرا میگیریم. برای آسانی کار شکل تابع را به ارگومنت نشان میدهیم درآنصورت داریم: $z'_x = z'_y y'_x$ یعنی برحسب x چند بار دیفرانسیل آنرا میگیریم:

$$z''_{xx} = (z'_y)'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy} y'^2_x + z'_y y''_{xx}$$

بطور مشابه مشتقات ترتیب های عالی توابع مرکب مطابق فرضیه محاسبه میگردد.

این میتود همین طور امکان ثبوت موجودیت ودریافت مشتقات ترتیب های عالی از توابع معکوس را میدهد.

فرضاً تابع y=y(x) متمادی واکیداً مونوتونی دربعضی حوال نقطه x_0 میباشد.

(مراجعه نماید به پراگراف (9.6)): فرضاً درصورتیکه $x = x_0$ ودارای مشتق y' و y'' طوریکه $y'(x_0) \neq 0$ باشد همینطور تابع معکوس x=x(y) که دارای مشتق دوم درنقطه $y_0 = y(x_0)$ باشد میتواند پیش از علامه y' و y'' مشتقات تابع y(x) درصورتیکه $x = x_0$ شود افاده گردد.وهمینطور میتواند هم مانند ترتیب عالی به ارگومنت افاده گردد.مطابق پراگراف 9 §4 (مراجعه نماید به : پراگراف 9.6) بجا خواهد بود $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ که نظربه y مشتق هر دوبخش محاسبه میگردد وبه بخش اول برگردانیده میشود بدین ترتیب اصول دیفرانسیل مرکب حاصل میگردد.

$$x''_{yy} = (x'_y)y' = (\frac{1}{y'_x})x'_y = \frac{y''_{xx}}{y'^2_x}.\frac{1}{y''_x} = \frac{y''_{xx}}{y'^3}$$

که به همینطور مطابق به فرضیه مشتقات ترتیب عالی برای تابع معکوس نیز محاسبه میگردد. ودرحالت خاص بطور هم مانند میتوان تابع داده شده را نیز بنام پارامتریک یاد نمود.

تعریف3: فرضاً توابع x=x(t) و y=y(t) دربعضی حوالی نقطه t_0 تعریف شده باشند ویکی ازآنها بطورمثال x=x(t) متمادی واکیداً مونوتومی درحوالی متذکره باشد پس در آن صورت تابع معکوس x(t) تابع t=t(x) دربعضی حوالی نقطه $x_0 = x(t_0)$ دارای مفهوم $y(t_{(x)})$ میباشد این تابع y ازx بوده وبنام فارمول داده شده x=x(t) و y=y(t) تابع پارامتریک یاد میشود.

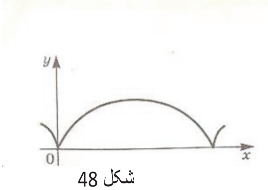
فارمولی برای دیفرانسیل گیری اگر توابع x(t) و y(t) درنقطه (t_0) مشتق پذیر طوریکه $x'(t_0) \neq 0$ باشد پس تابع داده شده پارامتریک y=t(x) نیز درنقطه $x_0 = x(t_0)$ دارای مشتق میباشد یعنی $y'_x = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} ...(10.5)$ به همین ترتیب برحسب اصول دیفرانسیل گیری توابع مرکب بجا خواهد بود که به ارگومنت افاده گردد یعنی $y'_x = y'_t t'_x ....(10.6)$ همین طور برحسب اصول دیفرانسیل گیری توابع معکوس داریم $tx' = \dfrac{1}{x'_t} ...(10.7)$ازفورمول (10.6) و (10.7) فورمول (10.5) نتیجه میشود.اگر موجودیت $x''_{tt}(t_0)$ و $y''_{tt}(t_0)$ باشد پس $y''_{xx}(x_0)$ موجود میشود یعنی:

$$y''_{xx} = (y'_x)'x = (\frac{y'_t}{x'_t})t \qquad t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}$$

بطور هم مانند مشتقات عالی توابع داده شده پارامتریک محاسبه میگردد درزمینه مثال توابع داده شده پارامتریک رابه بررسی میگیریم.

$$x = a[t - \sin t], y = a[t - \cos t], [a \neq 0, -\infty < t < +\infty .....(10.8)$$

که گراف این تابع درشکل (48) داده شده است.



شکل 48

فرضاً اگر $a > 0$ باشد پس تابع x(t)=a(t-sint) اکیداً متزاید شونده میباشد وفرضاً اگر $\Delta t > 0$ باشد پس خاطر نشان میسازیم که:

$$a < \sin\frac{\Delta t}{2} < \frac{\Delta t}{2}$$

درآنصورت داریم که:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = a\{\Delta t - [\sin(t + \Delta t) - \sin t]\}$$
$$= a[\Delta t - 2\cos(t + \frac{\Delta t}{2})\sin\frac{\Delta t}{2}] > a(\Delta t - 2.1.\frac{\Delta t}{2} = 0$$

که نشان دهنده تابع x(t) اکیداً متزاید شونده مونوتومی میباشد.به علت اینکه تابع معکوس آن یک قیمت موجود میشود یعنی t(x)

$$x'_t = a(1 - \cos t) = 2a\sin^2\frac{t}{2} \geq 0$$
$$y'_t = a\sin t$$

که درین حالت x'_t به صفر رجعت میکند وآن تنها درشکل

داریم: $t=2k\pi, k=0,\pm1,\pm2$ به این خاطر اگر $t\neq 2k\pi$ شود پس به اساس قاعده دیفرانسیل گیری تابع داده شده پارامتریک داریم:

$$y'_z=\frac{y'_x}{x'_t}=\frac{\sin t}{2\sin\frac{2t}{t}}=ctg\frac{t}{2}$$

$$y''_{xx}=(ctg\frac{t}{2})^1_x=(ctg)^1_t\frac{1}{x'_t}=-\frac{1}{2\sin\frac{2t}{2}}.\frac{1}{2a\sin\frac{2t}{2}}=\frac{1}{4a\sin\frac{4t}{2}}$$

10.4: دیفرانسیل های ترتیب عالی

درلکچرهای بعدی جهت بهتر مطمئین شدن به موضوع به عوض سمبول دیفرانسیل گیری d میتوان حرف δ را نوشت پس درآنصورت به عوض dx, dy میتوان $\delta x,\delta y$ را نوشت.

فرضاً y=f(x) درانتروال (a, b) دیفرانسیل پذیرباشد طوریکه معلوم است دیفرانسیل آن عبارت است از $dy=f'(x)dx$ که بنام دیفرانسیل اول یاد میشود ومربوط به دومتحول x و dx میباشد.

اگر تابع $f'(x)$ درناحیه تعریف خود دربعضی نقاط $x_0\in(a,b)$

دیفرانسیل پذیر باشد، پس در آنصورت دیفرانسیل آن درین نقطه dy میباشد. درین جا چنین تابع را نظربه x بررسی می نمایم (دربعضی فورمول های dx) اگر برای ارائه آن از سمبول δ استفاده شود شکل ذیل را بخود میگیرد.

$$\delta(dy)=\delta[f'(x)dx]'\Big|_{x=x_0}=[f(x)dx]'\Big|_{x=x_0}\delta x=f''(x_0)dx\delta x$$

تعریف4: مفهوم دیفرانسیل $\delta(dy)$ عبارت از دیفرانسیل اول دربعضی نقاط x_0 درصورتیکه $dx=\delta x$ باشد پس دیفرانسیل از دیفرانسیل به نام دیفرانسیل دوم تابع f درین نقطه یاد میشود وبه حروف d^2y ارائه میگردد یعنی:

$$d^2y=f''(x_0)dx^2....(10.9)$$

(بطریق dx^2 وبه $(dx)^2$ نشان داده میشود یعنی $(dx)^n$ نه $n\in N, dx^n$ وبه صورت عموم بطریق $d(x^n)$ به شکل $d^2x=0$ خاطرنشان میسازیم که به علت این تعریف زیراکه دیفرانسیل آن تحولات $dx=\Delta x$ همیشه ثابت محاسبه میشود.

به ترتیب هم مانند درین حالت وقتیکه مشتقات (n-1) ترتیب $y^{(n-1)}$ را درنقطه x_0 یا معادل ان دیفرانسیل میگیریم درین صورت $x=x_0$ بوده ومشتقات nام ترتیب $y^{(n)}$ بوجود می آید که دیفرانسیل nام ترتیب $d^n y$ تابع y=f(x) درنقطه x_0 مثل دیفرانسیل $\delta(d^{n-1}y)$ از دیفرانسیل (n-1) ترتیب $d^{n-1}y$ که $\delta x=dx$ بوجود می آید.

یعنی: $$d^n y=\delta(d^{n-1}y)\delta x=dx$$

درینصورت نشان می دهیم که مطابق فارمول های (10.10) ، n=1,2,... ، $d^n y=y^n dx^n$ که ثبوت آنرا به استقرا ریاضی واگذار میشویم که برای n=1 و n=2 ثابت است.

فرضاً اگر این فارمول برای دیفرانسیل های ترتیب n-1 درست باشد یعنی $d^{n-1}y=y^{n-1}dx^{n-1}$ پس درآنصورت طبق تعریف داده شده فوق برای محاسبه دیفرانسیل های ترتیب nام $d^n y$ لازم است تا دراول دیفرانسیل آنرا محاسبه نمود (ما انرا به سمبول δ نشان میدهیم) از $d^{n-1}y$ داریم که:

$$\delta(d^{n-1}y)=\delta(y^{(n-1)}dx^{n-1})=(y^{n-1}dx^{n-1})\delta x=y^{(n)}\delta x dx^{n-1}$$

وبعداً حاصل میگردد که $\delta x=dx$ پس $d^n y=\delta(d^{n-1}y\big|\delta x=dx=y^{(n)}dx^n$ ازفورمول (10.10)

نتیجه میشود که: $y^{(n)}=\dfrac{d^n y}{dx^n}...(10.11)$ درینجا چندین خواص دیفرانسیل های ترتیب عالی رایاد آور میشویم.

$$1^o.d^n(y_1+y_2)=d^n y_1+d^n y_2$$

$$2^o.d^n(y_1 y_2)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k dy_1^{n-k}dy_2^k$$

وبه شکل سمبولیک میتوان چنین نوشت:

$$d^n(y_1 y_2)=(dy_1+dy_2)^{\{n\}}$$

درینجا افاده (dy_1+dy_2) هم مانند فارمول نیوتن نوشته میشود پس درآنصورت شکل ذیل رابخود میگیرد.

$$C_n^k d^{n-k}y_1 d^k y_2$$

بدین ترتیب برای هر تابع کیفی داریم که: $d^o u = u^{(0)} dx^0 = u$ این خاصیت مستقیماً طبق فارمول ترتیب nام از مشتقات نتیجه میشود.مراجعه نماید به: فارمول های (10.1) ، (10.2) ، (10.3) و (10.10) تبصره: فورمولهای (10.10) و (10.11) باهم مطابقت دارند.که به صورت عموم میگویند : درصورتیکه n>1 باشد (باتفاوت از خاصیت n=1) درآنصورت تنها وتنها x متحول غیر مستقل است.ودرحالت دیفرانسیل های ترتیب عالی x متحول مستقل است که درین صورت کار اندکی مشکل میشود.

فرضاً Z=z(y) و Y=y(x) باشد درین صورت تابع Z[y(x)] دارای مفهوم مرکب بوده وتوابع z(y) و y(x) دوباره دیفرانسیل گیری می نمایم وآنصورت $dz = z'ydy$ ودیفرانسیل گیری باردوم آنقدر به سادگی به سمبول δ نزدیک نمیشود.پس در آنصورت خوانده میشود d(dz) وبا الترتیب نوشته میشودکه $\delta(dz)\delta x = dx$ (که در پراکتیک همیشه چنین میباشد) زیراکه درینجا تابع $\delta(dz)$ تحت دیفرانسیل دانسته میشود.

یعنی: $dz = z'_y(y)dy = z'_y[y(x)y'_x(x)dx$

درحالت حاصل میداریم که:

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_y dy) = d(z'_y)dy + z'_y d(dy) = z''_{yy} dy^2 + z'_y d^2 y ...(10.12)$$

(ما به اساس فارمول 9.26 نوشتیم که $dz'_y = z''_{yy} dy$)(پس درآنصورت از دیفرانسیل ثابت استندرد میکنیم).با مقایسه فورمول های (10.9) و (10.12) دیده میشود که این فارمولها درحد دوم متفاوت میباشند. وهمین طوربه صورت عموم میگویند که $d^2 y \neq 0$ که اصلاً مشتق دوم را برای توابع مرکب بدست می آوریم.

یعنی $z''_{xx} = z''_{yy} y'^2 + z'_y y''_{xx}$

که قبلاً بدست آورده بودیم (مراجعه نماید به: (10.4))

به این ترتیب مطمئین میتوانیم که مشتقات ودیفرانسیل های ترتیب عالی توابع مرکب را محاسبه نمایم.

Book Name	Mathematical Analysis I
Author	Said Yousuf Manowal
Publisher	Balkh Medical Faculty
Website	www.ba.edu.af
Number	1000
Published	2012
Download	www.ecampus-afghanistan.org

This Publication was financed by the German Academic Exchange Service **(DAAD)** with funds from the German Federal Foreign Office.

Administrative and Technical support by **Afghanic** organization.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it.

Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your text books please contact us:

Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul

Office: 0756014640

Email: wardak@afghanic.org

ISBN: 9789936200883

Message from the Ministry of Higher Education

In the history, book has played a very important role in gaining knowledge and science and it is the fundamental unit of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of Higher Education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and based on educational standards,new learning materials and textbooks should be published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers of Higher Education Institutions and I am very thankful to them who have worked for many years and have written or translated textbooks.

I also warmly welcome more lecturers to prepare textbooks in their respective fields. So, that they should be published and distributed among the students to take full advantage of them.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and updated learning materials in order to better educate our students.

At the end, I am very grateful to the German Federal Foreign Office, the German Academic Exchange Service (DAAD) and all those institutions and people who have provided opportunities for publishing medical textbooks.

I am hopeful that this project should be continued and publish textbooks in other subjects too.

Sincerely,

Prof. Dr. Obaidullah Obaid

Minister of Higher Education

Kabul, 2012

Publishing of textbooks & support of medical colleges in Afghanistan

Honorable lecturers and dear students,

The lack of quality text books in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging the students and teachers alike. To tackle this issue we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. In the past two years we have successfully published and delivered copies of 60 different books to the medical colleges across the country.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-1014) states:

"Funds will be made ensured to encourage the writing and publication of text books in Dari and Pashto, especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state-of- the-art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this, it would not be possible for university students and faculty to acquire updated and accurate knowledge"

The medical colleges' students and lecturers in Afghanistan are facing multiple challenges. The out-dated method of lecture and no accessibility to update and new teaching materials are main problems. The students use low quality and cheap study materials (copied notes & papers), hence the Afghan students are deprived of modern knowledge and developments in their respective subjects. It is vital to compose and print the books that have been written by lecturers. Taking the critical situation of this war torn country into consideration, we need desperately capable and professional medical experts. Those, who can contribute in improving standard of medical education and public health throughout Afghanistan, thus enough attention, should be given to the medical colleges.

For this reason, we have published 60 different medical textbooks from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh & Kabul medical colleges. Currently we are working on to publish 60 more different medical textbooks, a sample of which is in your hand. It is to mention that all these books have been distributed among the medical colleges of the country free of cost.

As requested by the Ministry of Higher Education, the Afghan universities, lecturers & students they want to extend this project to non-medical subjects like (Science, Engineering, Agriculture, Economics & Literature) and it is reminded that we publish textbooks for different colleges of the country who are in need.

As stated that publishing medical textbooks is part of our program, we would like to focus on some other activities as following:

1.Publishing Medical Textbooks
This book in your hand is a sample of printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of Higher Education Institutions, there is need to publish about 100 different textbooks each year.

2.Interactive and Multimedia Teaching
In the beginning of 2010, we were able to allocate multimedia projectors in the medical colleges of Balkh, Herat, Nangarhar, Khost & Kandahar. To improve learning environment the classrooms, conference rooms & laboratories should also be equipped with multimedia projectors.

3.Situational Analysis and Needs Assessment
A comprehensive need assessment and situation analysis is needed of the colleges to find out and evaluate the problems and future challenges. This would facilitate making a better academic environment and it would be a useful guide for administration and other developing projects.

4.College Libraries

New updated and standard textbooks in English language, journals and related materials for all important subjects based on international standards should be made available in the libraries of the colleges.

5.Laboratories

Each medical college should have well-equipped, well managed and fully functional laboratories for different fields.

6.Teaching Hospitals (University Hospitals)

Each medical college should have its own teaching hospital (University Hospital) or opportunities should be provided for medical students in other hospitals for practical sessions.

7.Strategic Plan

It would be very nice if each medical college has its own strategic plan according to the strategic plan of their related universities.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We assure them quality composition, printing and free of cost distribution to the medical colleges.

I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

We are very thankful to the German Federal Foreign Office & German Academic Exchange Service (DAAD) for providing funds for 90 different medical textbooks and the printing process for 50 of them are ongoing. I am also thankful to Dr. Salmaj Turial from J. Gutenberg University Mainz/Germany, Dieter Hampel member of Afghanic/Germany and Afghanic organization for their support in administrative & technical affairs.

I am especially grateful to GIZ (German Society for International Cooperation) and CIM (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past two years in Afghanistan.

In Afghanistan, I would like cordially to thank His Excellency the Minister of Higher Education, Prof. Dr. Obaidullah Obaid, Academic Deputy Minister Prof. Mohammad Osman Babury and Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Associate Prof. Dr. Gul Hassan Walizai, the universities' chancellors and deans of the medical colleges for their cooperation and support for this project. I am also thankful to all those lecturers that encouraged us and gave all these books to be published.

At the end I appreciate the efforts of my colleagues Dr. M. Yousuf Mubarak, Abdul Munir Rahmanzai, Ahmad Fahim Habibi, Subhanullah and Hematullah in publishing books.

Dr Yahya Wardak
CIM-Expert at the Ministry of Higher Education, November, 2012
Karte 4, Kabul, Afghanistan
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org
wardak@afghanic.org

Translated Book: Mathematical Analysis I

About the Book

The boook by the name of " Mathematical Analysis I", translated by Pohandoi Said Yusuf Manowal in 2012, is a well known book in the subject matter which was published by the Russian Federation Public University in 2006. The book has 400 pages in total. Its unique features are as follows. First of all, its concepts are well organized in a way that can be easily understood by the reader. In addition, its concepts are congruent with the higher education mathematics curriculum. Moreover, it consists of good examples that support student's understandng of a concept. Also, it has good exercises at the end of the each chapter. Most importantly, the book can easily be read by other than math and science students. The interested readers can use the book to improve their knowledge in the subject. The book also takes into account the contemporary and effective way of presenting mathematical concepts that are introduced during the last decade. This book starts with the axiomatic analysis of real numbers that provides the logical basis for the subject. Without having this logical basis, one can go astray from the main objective of mathematical analysis. Therefore, studying real numbers through an axiomatioc lens can provide better opportunities to understand concepts such as limit, derivative and integral of a function, which are presented in the remaining of the book. Finally, the concepts presented in this book are new and meet national and international academic standards.

بیوگرافی مختصر

پوهندوی سید یوسف مانووال فرزند جمعه گل در سال (1336) در ولایت زیبائی وهمیشه بهار ننگرهار ولسوالی چپرهار قریه مانو در یك خانواده متدنی متولد گردیده ام تعلیمات متوسطه را در متوسطه چپر تکمیل نموده و از آن متوسطه بدرجه اعلی فارغ ودرسال 1350 از طرف دولت به تخنیکم نفت گاز مزار شریف جهت تحصیل معرفی ودر سال 1354 بدرجه اعلی از تخنیکم متذکره فارغ ودوباره به حیث استاد در کادر آن تخنیکم مقرر گردیده ام .
چون تحصیلات بنده ناقص بوده بدینوسیله جهت اخذ لیسانس از طرف دولت در سال 1372 به پوهنحی تعلیم وتربیه پوهنتون بلخ بهص دیپارتمنت ریاضیات معرفی ودر سال 1357 از آن پوهنحی از دیپارتمنت ریاضیات بدرجه اعلی به سویه لسانس فارغ التحصیل گردیده ام ودر سال 1379 به حیث استاد در پوهنحی تعلیم وتربیه پوهنتون بلخ دیپارتمنت ریاضیات جذب کردیده ام ودر سال 1387 در کشور تاجکستان در شهر دشنبه از پوهنتون صدرالدین عینی از پوهنحی ریاضیات به سویه ماستر بدرجه اعلی فارغ گردیده ام و فعلا نیز در پوهنحی تعلیم وتربیه پوهنتون بلخ در دیپارتمنت ریاضیات به حیث استاد وظیفه مینمایم .