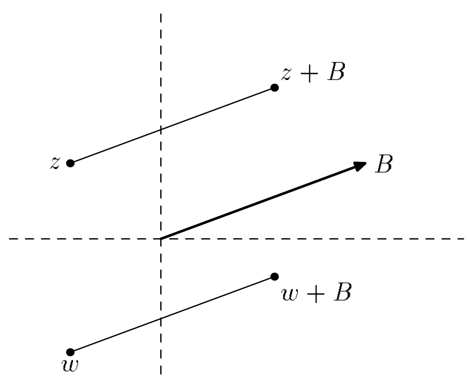
اعداد مختلط و تبدیلات صفحه

کاربردهای متنوعی برای اعداد مختلط وجود دارد. در اینجا به ارائه یک نمونه از این کاربردها می‌پردازیم. صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ یا معادلاً $\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. به کمک اعداد مختلط به بررسی تبدیل‌های "انتقال"، "دوران" و "تجانس" از صفحه خواهیم پرداخت. انتقال را به این مفهوم می‌گیریم که همهٔ نقاط صفحه در یک امتداد و به یک مقدار حرکت کنند. به طور دقیق‌تر، برای بردار ثابتی B، هر نقطه به اندازهٔ B حرکت می‌کند. از آنجا که جمع اعداد مختلط متناظر با جمع بردارها تعریف شد، می‌توان انتقال را تابعی $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ به شکل

$$T(z) = z + B \qquad (۱)$$

تلقی کرد که در آن B یک عدد مختلط ثابت است. بدین ترتیب اگر $B_۱$ و $B_۲$ دو عدد مختلط ثابت

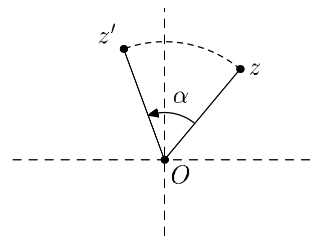


باشند حاصل دو انتقال متوالی با $B_۱$ و $B_۲$ عبارت است از:

$$z \longrightarrow z + B_۱ \longrightarrow (z_۱ + B_۱) + B_۲ = z + (B_۱ + B_۲)$$

یعنی انتقال به وسیله $B_۱ + B_۲$.

حال دوران را در نظر می‌گیریم و نخست دوران حول مبدأ مختصات، یعنی $\underline{۰}$، را بررسی می‌کنیم. برای هر زاویهٔ α، مقصود از دوران حول $\underline{۰}$ به زاویهٔ α تبدیلی است که هر نقطه z را به نقطه‌ای z' می‌فرستد که فاصلهٔ آن از مبدأ برابر فاصله z از مبدأ است ولی زاویه از خط واصل از $\underline{۰}$ به z به خط واصل از $\underline{۰}$ به z' برابر مقدار ثابت α است. توجه داشته باشید که همواره طبق قرارداد، مقادیر مثبت α در جهت مثلثاتی (ضد عقربه ساعت) منظور می‌شود. با توجه به تعریف حاصل‌ضرب اعداد مختلط، اگر



$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک دوران حول مبدأ مختصات باشد، داریم:

$$R(z) = cis(\alpha) \cdot z \qquad (۲)$$

که α مقداری ثابت است. حال اگر بخواهیم دوران زاویه α حول نقطهٔ دلخواهی $z_۰$ را با اعداد مختلط نمایش دهیم به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست انتقالی به اندازهٔ $(-z_۰)$ انجام می‌دهیم که $z_۰$ را به $\underline{۰}$ منتقل کند، سپس دوران زاویهٔ α حول $\underline{۰}$ را انجام می‌دهیم (ضرب کردن در $cis(\alpha)$)، و بالاخره با انتقال به وسیلهٔ $z_۰$، نقطه اولیهٔ $z_۰$ را به مکان اولیه‌اش باز می‌گردانیم. بدین ترتیب دوران زاویه α حول $z_۰$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$z \longrightarrow z - z_۰ \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_۰) \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_۰) + z_۰ \qquad (۳)$$

پس فرمول دوران زاویهٔ α حول $z_۰$ به صورت زیر نیز داده می‌شود:

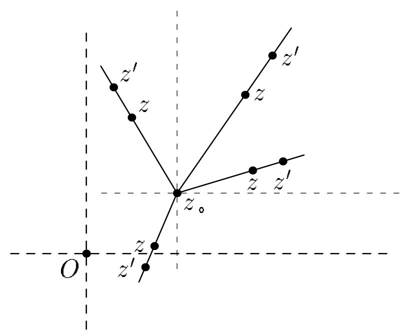
$$z \longrightarrow cis(\alpha) \cdot (z - z_۰) + z_۰ = cis(\alpha) \cdot z + (۱ - cis(\alpha)) \cdot z_۰ \qquad (۴)$$

توجه کنید که چون $(۱ - cis(\alpha)) \cdot z_۰$ یک عدد مختلط ثابت است، بلافاصله نتیجه می‌شود که

(۵ــ۱) هر دوران در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب دوران حول $\underline{\circ}$ با همان زاویه و یک انتقال نوشت.

بالعکس اگر متوالیاً یک دوران زاویهٔ α، $\alpha \neq ۲k\pi$، حول $\underline{\circ}$ و سپس یک انتقال صورت گیرد، ادعا می‌کنیم حاصل یک دوران زاویهٔ α حول نقطه‌ای $z_\circ$ خواهد بود. چنین ترکیبی به صورت $cis(\alpha) \cdot z + B$ خواهد بود. چون فرض کرده‌ایم $\alpha \neq ۲k\pi$، داریم $\cos(\alpha) \neq ۱$ پس اگر $z_\circ$ را به صورت $\frac{B}{۱-cis(\alpha)}$ تعریف کنیم، داریم $cis(\alpha) \cdot z + B = cis(\alpha) \cdot z + (۱ - cis(\alpha)) \cdot z_\circ$ که طبق (۴) دوران زاویهٔ α حول $z_\circ$ است.

حال تبدیل تجانس را در نظر می‌گیریم. اگر عدد حقیقی نامنفی k داده شده باشد و $z_\circ$ یک نقطه در صفحه باشد، مقصود از تجانس به مرکز $z_\circ$ با ضریب k این است که هر نقطه z روی نیم‌خط واصل از $z_\circ$ به z به نقطه‌ای z' حرکت می‌کند که فاصله‌اش از $z_\circ$، k برابر فاصله z از $z_\circ$ است.



چون فاصله $z_\circ$ از $z_\circ$ صفر است و $k \cdot \circ = \circ$، مرکز تجانس تحت اثر تجانس ثابت باقی می‌ماند. برای به‌دست آوردن فرمولی برای تجانس، نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که مرکز تجانس مبدأ مختصات، $\underline{\circ}$، است. در این حالت روشن است که نقطه z به نقطهٔ kz فرستاده می‌شود (ضرب عدد k در "بردار" z). بدین ترتیب تابع تجانس به مرکز $\underline{\circ}$ با ضریب k، $H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$، عبارت است از:

$$H(z) = kz \qquad (۵)$$

برای تجانس نسبت به مرکز دلخواه $z_\circ$، به روشی مشابه دوران حول $z_\circ$ عمل می‌کنیم، یعنی نخست با انتقال $(-z_\circ)$ در صفحه، نقطهٔ $z_\circ$ را به $\underline{\circ}$ منتقل می‌کنیم، سپس تجانس فوق، H، را انجام می‌دهیم و

بالاخره حاصل را به اندازهٔ $z_\circ$ انتقال می‌دهیم:

$$z \longrightarrow z - z_\circ \longrightarrow k(z - z_\circ) \longrightarrow k(z - z_\circ) + z_\circ \qquad (٦)$$

یعنی تابع تجانس به مرکز $z_\circ$ و ضریب k را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$z \longrightarrow k(z - z_\circ) + z_\circ = kz + (1 - k)z_\circ \qquad (۷)$$

از آنجا که $(1 - k)z_\circ$ عددی ثابت است داریم

(۵—۲) هر تجانس در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب تجانس حول $\circ$ با همان ضریب و یک انتقال نوشت.

در اینجا نیز عکس مطلب درست است. فرض کنید نخست تجانس با ضریب $k \neq 1$ انجام گیرد و سپس یک انتقال با بردار B. در این صورت حاصل اثر بر نقطهٔ z عبارت است از $kz + B$. چون $k \neq 1$، $\frac{B}{1-k}$ تعریف شده است و اگر آن را $z_\circ$ بنامیم داریم $kz + B = kz + (1 - k)z_\circ$ که طبق (۷) تجانس با ضریب k به مرکز $z_\circ$ است. حال اگر به فرمول‌های کلی انتقال، دوران و تجانس، که توسط (۱)، (۴) و (۷) ارائه شده‌اند، نظر کنیم، ملاحظه می‌کنیم که هر سه، تابع‌های درجه یک نسبت به z تعریف می‌کنند. اکنون نشان می‌دهیم که عکس این مطلب نیز صحیح است، یعنی هر تابع درجه یک $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ در واقع ترکیبی از این سه نوع تبدیل است. فرض کنید تابع $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ به صورت

$$f(z) = Az + B \qquad (۸)$$

داده شده است که در آن A, B اعداد مختلط ثابت باشند. اگر $A = \circ$ که همهٔ نقاط صفحه به نقطهٔ ثابت B فرستاده می‌شوند و این، تجانس به مرکز B با ضریب $k = \circ$ است.

فرض کنید $A \neq \circ$، می‌توان نوشت:

$$A = |A| cis(\alpha) \qquad (۹)$$

پس f را می‌توان به صورت ترکیب زیر نوشت:

$$z \xrightarrow{\text{دوران حول } \circ} cis(\alpha) \cdot z \xrightarrow{\text{تجانس به مرکز } \circ} |A| cis(\alpha) \cdot z \xrightarrow{\text{انتقال}} |A| cis(\alpha) \cdot z + B \qquad (۱۰)$$

یعنی هر تابع درجه یک، ترکیب یک دوران حول ۰، یک تجانس به مرکز ۰، و یک انتقال است. همچنین چون عمل ضرب جابجایی است، می‌توان ترتیب دوران و تجانس را تعویض کرد.

در واقع اکنون می‌بینیم که ترکیب (۱۰) یا یک انتقال است و یا ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز مشترک:

حالت اول: $A = ۱$ در این صورت تابع به $z \longrightarrow z + B$ خلاصه می‌شود که یک انتقال است.

حالت دوم: $A \neq ۱$ در این صورت نشان می‌دهیم که نقطه‌ای $z_۰$ وجود دارد به طوری که $z \longrightarrow Az + B$ ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز $z_۰$ است. یک چنین نقطهٔ $z_۰$ باید در رابطهٔ $Az_۰ + B = z_۰$ صدق کند چون مرکز دوران و تجانس ثابت می‌ماند، پس معادلاً $(۱ - A)z_۰ = B$ و چون $A \neq ۱$ فرض شده است، $z_۰ = \frac{B}{۱-A}$ به‌دست می‌آید. حال نشان می‌دهیم که این نقطه فی‌الواقع ویژگی مورد نظر را دارد، یعنی $z \longrightarrow Az + B$ ترکیب دوران و تجانس حول $z_۰$ است. داریم:

$$Az + B = A(z - \frac{B}{۱ - A}) + B + \frac{AB}{۱ - A} = A(z - z_۰) + z_۰$$

با نوشتن $A = |A|cis(\alpha)$ ملاحظه می‌کنیم که این تابع ترکیب دوران با زاویه α و تجانس با ضریب $|A|$ حول $z_۰$ است.

بالاخص دو حالت زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم:

اگر $A \neq ۱$ و $|A| = ۱$، تابع $z \longrightarrow Az + B$ دوران به زاویه $cis(arg(A))$ حول $z_۰ = \frac{B}{۱-A}$ است.

اگر $A \neq ۱$ و $A \geq ۰$، تابع $z \longrightarrow Az + B$ تجانس با ضریب A حول $z_۰ = \frac{B}{۱-A}$ است.

مثال ۱. فرض کنید $T_۱ : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ دوران به زاویه α حول $z_۱$ و $T_۲ : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ دوران به زاویهٔ β حول $z_۲$ است. در این صورت ترکیب $T_۲ \circ T_۱$ چگونه تبدیلی است؟

داریم $T_۱(z) = cis(\alpha) \cdot z + B_۱$ و $T_۲(z) = cis(\beta) \cdot z + B_۲$. پس

$$\begin{aligned} T_۲ \circ T_۱(z) &= T_۲(cis(\alpha) \cdot z + B_۱) + B_۲ \\ &= cis(\beta) \cdot cis(\alpha) \cdot z + cis(\beta) \cdot B_۱ + B_۲ \\ &= cis(\alpha + \beta) \cdot z + (cis(\beta) \cdot B_۱ + B_۲) \end{aligned}$$

که در اینجا $cis(\beta) \cdot B_۱ + B_۲$ یک عدد مختلط ثابت است. اگر $\alpha + \beta = ۲k\pi$، یا $\cos(\alpha + \beta) = ۱$

این تبدیل یک انتقال با مقدار $cis(\beta)\cdot B_۱ + B_۲$ است. اگر $\alpha+\beta \neq ۲k\pi$، تبدیل فوق یک دوران به زاویه $\alpha+\beta$ حول $z_۰ = \frac{cis(\beta)\cdot B_۱+B_۲}{۱-cis(\alpha+\beta)}$ می‌باشد.