اعداد مختلط (۱)

§ ۱. مقدمه

در دو جلسهٔ گذشته پیرامون اعداد حقیقی صحبت کردیم. دیدیم که مفهوم عدد در رابطه با شمارش و اندازه‌گیری کمیت‌ها پدید آمد و نخست به آنچه امروز اعداد گویای مثبت می‌نامیم محدود بود. لیکن ضرورت تجربهٔ علمی توسعهٔ مفهوم عدد را ایجاب کرد به قسمی که اعداد گویا و اعداد منفی نیز به عنوان "عدد" شناخته شدند و مجموعهٔ این مفاهیم، امروز مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، خوانده می‌شود.

در طی کوشش‌هایی که در قرن شانزدهم میلادی مبذول حل معادلات درجه سه می‌گشت معلوم شد که مفهوم عدد حقیقی هنوز دستخوش کاستی‌هایی است که این کوشش‌ها را دچار معضل می‌سازد. با اندکی بازسازی تاریخ، این موضوع را اکنون بررسی می‌کنیم. هر معادلهٔ درجه ۳ برحسب x با ضرایب حقیقی را می‌توان پس از تقسیم کردن بر ضریب جملهٔ $x^۳$ به صورت زیر نوشت:

$$x^۳ + ax^۲ + bx + c = ۰ \qquad (۱)$$

با یک جایگزینی ساده می‌توان جملهٔ درجهٔ دوم را حذف کرد. اگر قرار دهیم $x = t - \frac{a}{۳}$، معادله (۱) به شکل

$$t^۳ + pt + q = ۰ \qquad (۲)$$

در می‌آید که در آن p, q عبارت‌هایی برحسب ضرایب a، b و c هستند. حال کوشش می‌کنیم معادلهٔ

(۲) را حل کنیم. اگر بنویسیم $t = u + v$، داریم

$$
\begin{aligned}
&(u+v)^{۳} + p(u+v) + q = ۰ \\
&u^{۳} + v^{۳} + (۳uv + p)(u+v) + q = ۰
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

برای هر زوج u, v که در این معادله صدق کند، یک جواب $t = u + v$ برای (۲) به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن چنین زوجی نخست مشاهده می‌کنیم که (۳) یک معادله با دو مجهول است که انتظار داریم معمولاً بی‌نهایت جواب داشته باشد.

با افزودن یک رابطهٔ دیگر میان u, v، سعی می‌کنیم به جواب مشخصی برسیم. قرار می‌دهیم:

$$uv = -\frac{p}{۳} \quad \text{یا} \quad ۳uv + p = ۰ \qquad (۴)$$

که در این صورت (۳) و (۴) به صورت دستگاه زیر در می‌آیند:

$$
\begin{cases}
u^{۳} + v^{۳} = -q \\
u^{۳}v^{۳} = -\frac{p^{۳}}{۲۷}
\end{cases}
\qquad (۵)
$$

حال با داشتن مجموع و حاصل‌ضرب دو کمیت $u^{۳}$ و $v^{۳}$ می‌توانیم یک معادله درجه دوم بنویسیم که ریشه‌هایش $u^{۳}$ و $v^{۳}$ باشند:

$$z^{۲} + qz - \frac{p^{۳}}{۲۷} = ۰ \qquad (٦)$$

پس

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^{۲} + \frac{۴}{۲۷}q^{۳}}}{۲}$$

دو جواب z مقادیر $u^{۳}$ و $v^{۳}$ هستند، پس با گرفتن کعب آنها و با استفاده از $t = u + v$، جواب (۲) به‌دست می‌آید:

$$t = \sqrt[۳]{\frac{-q + \sqrt{q^{۲} + \frac{۴}{۲۷}p^{۳}}}{۲}} + \sqrt[۳]{\frac{-q - \sqrt{q^{۲} + \frac{۴}{۲۷}p^{۳}}}{۲}} \qquad (۷)$$

این فرمول که به فرمول کاردانو[1] معروف است ظاهراً دستور کامل حل معادلات درجه ۳ است، ولی کمی دقت در مورد عبارت فوق و استفادهٔ عملی از آن دو مشکل را برملا می‌سازد:

---

[1] جیرو لامو کاردانو Girolamo Cardano (۱۵۷٦–۱۵۰۱) دانشمند ایتالیایی که گفته می‌شود این فرمول و روش حل فوق را در واقع از ریاضیدان ایتالیایی دیگری نیکولو تارتالیا Niccoló Tartaglia (۱۵۵۷–۱۴۹۹) با قسم به مخفی نگاهداشتن آن دریافت کرده است.

۱) یک معادلهٔ درجه دوم، $ax^2+bx+c=0$، ممکن است هیچ، یک یا دو جواب داشته باشد. وجود $\pm$ در فرمول جواب، یعنی $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ بیانگر امکان وجود دو جواب است. معادلات درجه ۳ ممکن است تا سه جواب حقیقی داشته باشند ولی فرمول (۷) ظاهراً فقط یک جواب را به‌دست می‌دهد. در عمل این مشکلی نیست زیرا که اگر مثلاً یک جواب $t=\alpha$ برای (۲) در دست باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$t^3+pt+q=(t-\alpha)(t^2+At+B)$$

و با بررسی $t^2+At+B=0$ جواب‌های احتمالی دیگر پیدا خواهند شد. با این حال به نظر می‌رسد فرمول (۷) از عمومیتی مشابه فرمول حل معادلات درجه دوم برخوردار نیست. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$t^3-3t+2=0$$

عبارت t^3-3t+2 را می‌توان به صورت $(t-1)^2(t+2)$ نوشت، پس جواب‌های معادلهٔ بالا عبارتند از $-2, 1, 1$. حال اگر فرمول کاردانو را به‌کار گیریم، با توجه به $p=-3$ و $q=2$ داریم:

$$t=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{-1}=-2$$

و فقط یکی از جواب‌ها حاصل می‌شود.

۲) مشکل جدی‌تری را که منجر به توسعهٔ مفهوم عدد و پذیرفتن اشیایی به شکل $\sqrt{-1}$ به عنوان "عدد" شد با ذکر یک مثال تشریح می‌کنیم. معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$t^3-6t+4=0 \qquad (8)$$

مشاهده کنید که $t=2$ در این معادله صدق می‌کند، پس می‌توان جمله $(t-2)$ را فاکتورگیری کرد و داریم:

$$t^3-6t+4=(t-2)(t^2+2t-2)$$

با قرار دادن $t^۲ + ۲t - ۲ = ۰$ کلیهٔ جواب‌های معادله (۸) به‌دست می‌آیند:

$$t = ۲ \quad , \quad -۱ \pm \sqrt{۳}$$

از طرفی دیگر از فرمول (۷) داریم:

$$t = \sqrt[۳]{\frac{-۴ + \sqrt{-۱۶}}{۲}} + \sqrt[۳]{\frac{-۴ - \sqrt{-۱۶}}{۲}}$$

اگر $\sqrt{-۱۶}$ به $۴\sqrt{-۱}$ خلاصه کنیم خواهیم داشت:

$$t = \sqrt[۳]{-۲ + ۲\sqrt{-۱}} + \sqrt[۳]{-۲ - ۲\sqrt{-۱}} \qquad (۹)$$

این عبارت در ظاهر هیچ یک از سه جواب ذکر شده نیست و به علاوه از نظر معنی مشکوک است زیرا که تاکنون برای $\sqrt{-۱}$ معنایی قایل نشده‌ایم. ریاضیدانان قرن شانزدهم متوجه شدند که می‌توان به محاسبهٔ صوری زیر متوسل شد. فرض کنید $\sqrt{-۱}$ معنی دارد یا حداقل می‌توان با آن محاسبات عادی جبری را انجام داد. در این صورت توجه کنید که بنابر اتحاد $(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$:

$$\begin{aligned}(۱ + \sqrt{-۱})^۳ &= ۱ + ۳\sqrt{-۱} - ۳ - \sqrt{-۱} \\ &= -۲ + ۲\sqrt{-۱}\end{aligned}$$

و مشابهاً داریم $(۱ - \sqrt{-۱})^۳ = -۲ - ۲\sqrt{-۱}$، پس (۹) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$t = ۱ + \sqrt{-۱} + ۱ - \sqrt{-۱} = ۲$$

یعنی علیرغم این که برای $\sqrt{-۱}$ معنایی قایل نیستیم، اگر با آن به صورت یک عدد عملیات جبری انجام دهیم، جواب معادله را به‌دست خواهیم آورد! کاردانو در کتاب خود مقادیری مانند $\sqrt{-۱}$ را "اعداد مجازی" قلمداد می‌کرد که هر چند خود عدد نیستند و لیکن رفتار جبری مشابه اعداد دارند و به کمک آنها می‌توان به حقایقی در مورد اعداد رسید، همچنان که پذیرفتن اعداد منفی در جبر راه را برای بررسی مقادیر مثبت هموارتر می‌کند.

طی دو تا سه قرن مفهوم $\sqrt{-۱}$ و امثال آن تدریجاً جای خود را در ریاضیات یافت و تعبیر معنایی دقیقی برای آن ارائه شد. اولین افرادی که تعبیری هندسی برای $\sqrt{-۱}$ ارائه دادند مساح نروژی کاسپار وسل[۲] و حسابدار سوییسی ژان روبر آرگان[۳] بودند ولی بررسی جامع و دقیق این گونه عدد و خواص جبری آنها در آثار ریاضیدان بزرگ آلمانی گاؤس[۴] به کمال رسید[۵]. روش امروزی برخورد با "اعداد مختلط" روش گاؤس است. پس از بررسی اعداد مختلط در بخش‌های آینده، حل معادلات درجه ۳ را مجدداً بررسی کرده نشان خواهیم داد روشی که برای حل معادلات درجه ۳ ارائه کردیم اگر در چارچوب اعداد مختلط انجام گیرد، روشی کامل است و به یافتن کلیه جواب‌های معادله منجر می‌شود.

§ ۲. معرفی اعداد مختلط

اعداد حقیقی را در تناظر یک به یک با نقاط یک خط راست قرار داده‌ایم. حال صفحهٔ مختصاتی xy را در نظر می‌گیریم و محور x در آن را به عنوان جایگاه اعداد حقیقی تثبیت می‌کنیم، یعنی عدد حقیقی x را به نقطهٔ $(x, ۰)$ نمایش می‌دهیم. با گذر از این خط به تمام صفحه به تعمیمی از مفهوم عدد حقیقی خواهیم رسید که در برگیرنده اعداد حقیقی است. برای دو نقطهٔ $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ از صفحه مفهوم مجموع و حاصل‌ضرب را طوری تعریف خواهیم کرد که اگر به "اعداد حقیقی"، یعنی زوج‌های $(x, ۰)$ و $(x', ۰)$ محدود شود، همان مفهوم مجموع و حاصل‌ضرب معمولی، یعنی $(x + x', ۰)$ و $(xx', ۰)$ را به‌دست دهد.

(۲-۱) جمع برای $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ تعریف می‌کنیم:

$$z + z' = (x + x', y + y')$$

---

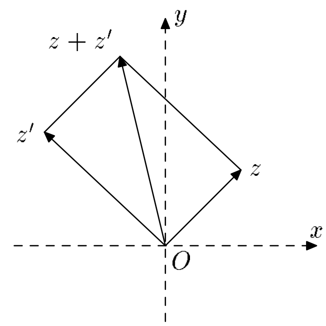
[۲] Caspar Wessel

[۳] Jean Robert Argand

[۴] Carl Friedrich Gauss

[۵] برای مطالعه سیر تاریخی تحول مفهوم عدد مختلط به فصل ۳ کتاب زیر مراجعه کنید:
Ebbinghaus, H. D., et al **Numbers**, Springer 1991.

بدین ترتیب نقاط $\underline{\circ} = (\circ, \circ)$، z، z' و $z + z'$ چهار رأس یک متوازی الاضلاع را تشکیل می‌دهند و عمل جمع نقاط همان جمع برداری برای بردارهای ساطع از مبدأً مختصات است (شکل ۱).



(۲—۱—۱) <u>خواص جمع</u>

(۲—۱—۱) <u>تعویض پذیری</u> (<u>جابجایی</u>) $z + z' = z' + z$.

(۲—۱—۲) <u>شرکت‌پذیری</u> $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$.

(۲—۱—۳) <u>عنصر بی‌اثر</u> نقطه $\underline{\circ} = (\circ, \circ)$ (و فقط این نقطه) دارای این ویژگی است که

$$z + \underline{\circ} = \underline{\circ} + z = z$$

(۲—۱—۴) <u>عنصر قرینه</u> برای $z = (x, y)$، <u>قرینه</u> یا <u>منفی</u> z به صورت

$$-z = (-x, -y)$$

تعریف می‌شود و (یگانه نقطه) دارای این ویژگی است که:

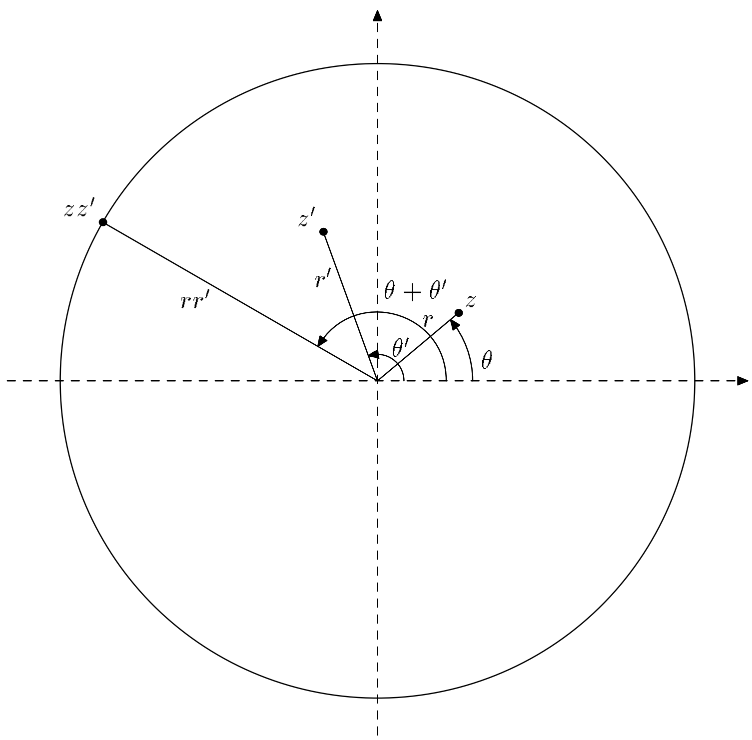
$$z + (-z) = (-z) + z = \underline{\circ}$$

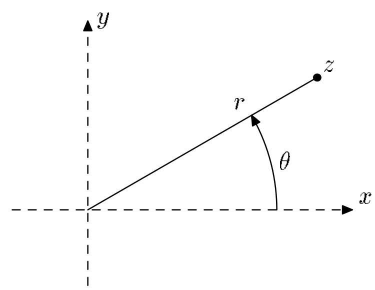
خواص فوق‌الذکر همه به سادگی از این نتیجه می‌شوند که ویژگی متناظر برای هر مؤلفه، که عدد حقیقی است، برقرار است.

(۲—۱) <u>ضرب</u> تعریف حاصل‌ضرب $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ در آغاز دور از ذهن به نظر خواهد رسید ولی تدریجاً موضوعیت آن روشن خواهد شد. نخست توجه کنید که بر خلاف مجموع که

مؤلفه به مؤلفه تعریف شد، چنین تعریفی برای حاصل‌ضرب متضمن بروز خواصی خواهد شد که دور از خواص مأنوس اعداد حقیقی است. اگر $z \cdot z'$ را به صورت (xx', yy') تعریف کنیم، نتیجه می‌شود که $(۱, ۰) \cdot (۰, ۱) = (۰, ۰)$، یعنی حاصل‌ضرب دو عنصر غیر صفر، صفر می‌شود، که خلاف خواص جبری اعداد حقیقی است. خواص حاصل‌ضربی که تعریف خواهیم کرد شبیه‌تر به خواص ضرب اعداد حقیقی است و با حاصل‌ضرب اعداد حقیقی سازگار خواهد بود، یعنی حاصل‌ضرب $(x, ۰) \cdot (x', ۰)$ برابر $(xx', ۰)$ می‌شود.

برای $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$، $z \cdot z'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. zz' نقطه‌ای در صفحه خواهد بود که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر حاصل‌ضرب فواصل z و z' از مبدأ است. پس اگر فاصلهٔ z و z' از مبدأ به ترتیب r و r' باشد، $z \cdot z'$ روی دایرهٔ شعاع rr' به مرکز <u>۰</u> قرار خواهد داشت.





اگر z یا z' صفر باشد، r یا r' صفر خواهد شد و در نتیجه لزوماً $zz' = ۰$. حال فرض می‌کنیم $z \neq \underline{۰}$ و $z' \neq \underline{۰}$. در این صورت θ را برابر زاویهٔ از نیم‌خط مثبت محور x به نیم‌خط واصل $\underline{۰}$ به z می‌گیریم و به همین ترتیب θ' را برای z' در نظر می‌گیریم. اکنون zz' را آن نقطه روی دایرهٔ شعاع rr' حول $\underline{۰}$ می‌گیریم که زاویهٔ از نیمه مثبت محور x به شعاع حامل آن برابر $\theta + \theta'$ باشد.

(۲—۲—۱) <u>خواص ضرب</u>

(۲—۲—۱—۱) <u>تعویض‌پذیری</u> (جابجایی) $z \cdot z' = z' \cdot z$.

(۲—۲—۱—۲) <u>شرکت‌پذیری</u> $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$.

(۲—۲—۱—۳) <u>عنصر بی‌اثر</u> نقطهٔ $(۱, ۰)$ (و فقط این نقطه) دارای این ویژگی است که

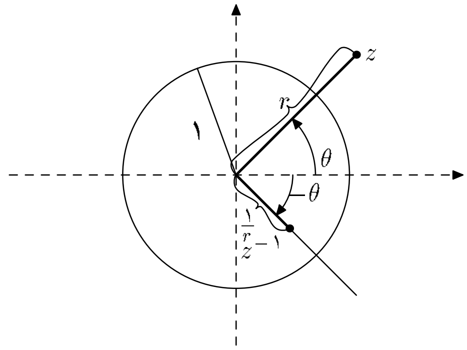
$$z \cdot (۱, ۰) = (۱, ۰) \cdot z = z$$

(۲—۲—۱—۴) <u>عنصر معکوس</u> برای هر $z \neq \underline{۰}$ عنصری (منحصر به فرد) z' وجود دارد که

$$z \cdot z' = z' \cdot z = (۱, ۰)$$

اثبات دو خاصیت اول کاملاً سرراست است. برای (۲—۲—۱—۳)، در مورد $(۱, ۰)$ داریم $r = ۱$ و $\theta = ۰$ و حکم نتیجه می‌شود. بالاخره برای عنصر معکوس ضربی، اگر $z \neq \underline{۰}$، فاصله z از $\underline{۰}$، یعنی r، ناصفر است، آنگاه z' با فاصله $r^{-۱}$ و زاویهٔ $(-\theta)$ یگانه نقطه‌ای است که در شرایط صدق می‌کند

(شکل ۳)



زوج (r,θ) که به نقطهٔ $z=(x,y)$ نسبت داده شد (شکل ۲ (الف)) مختصات قطبی نقطهٔ z خوانده می‌شوند. مؤلفه r، فاصله از مبدأ، به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود ولی θ یگانه نیست، با افزودن هر مضرب صحیح (2π) به θ، یک مقدار قابل قبول دیگر به‌دست می‌آید. r را به $|z|$ (قدر مطلق z) و θ را گاهی به $arg(z)$ نمایش می‌دهند. توجه کنید که برای همهٔ نقاط روی یک نیم‌خط ساطع از $\underline{0}$، $arg(z)$ برابر است. مثلاً $arg(z)=\frac{\pi}{2}$ نقاط $(0,y)$، $y>0$؛ $arg(z)=\pi$ نقاط $(x,0)$، $x<0$، $arg(z)=\frac{3\pi}{2}$ نقاط $(0,y)$ با $y<0$ را نمایش می‌دهند.

در (۲—۱—۱) و (۲—۲—۱) خواص جمع و ضرب خلاصه شد. برای تکمیل خواص جبری، رابطهٔ $+$ و $\cdot$ نیز مطرح است که در زیر می‌آید:

(۲—۳) قانون پخشی برای z, z', z'' داریم:

$$z\cdot(z'+z'') = (z\cdot z'')+(z\cdot z'')$$

$$(z+z')\cdot z'' = (z\cdot z'')+(z\cdot z'')$$

قبل از اثبات قانون پخشی، بعضی نتایج به‌دست آمده تا این لحظه را بررسی می‌کنیم.

(۲—۴) نمادگذاری مجموعه نقاط صفحه با عمل جمع و ضرب فوق را به $\mathbb{C}$ نمایش داده، مجموعه اعداد مختلط می‌نامیم. به این ترتیب هر زوج (x,y) یک عدد مختلط خوانده می‌شود. توجه کنید که $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب معمول آن یک زیردستگاه $\mathbb{C}$ است، یعنی اگر عناصر $\mathbb{R}$ را به $(x,0)$ نمایش دهیم، مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی، به عنوان عدد حقیقی یا عدد مختلط یکی است. در

مورد حاصل‌ضرب $z = (x, ۰)$ و $z' = (x', ۰)$، توجه کنید که اگر x و x' هم علامت باشند، داریم $arg(z) = arg(z') = ۰$ یا $arg(z) = arg(z') = \pi$، پس در هر دو حالت $arg(z \cdot z') = ۰$ و چون $xx' > ۰$، $xx' = |zz'|$، پس $(x, ۰) \cdot (x', ۰) = (xx', ۰)$. در حالتی که x و x' مختلف العلامت باشند، $arg(zz') = \pi$، $xx' < ۰$ و xx' یگانه نقطه با $arg = \pi$ است که فاصلهٔ آن از ۰ برابر $|z||z'| = -xx'$ می‌باشد، پس مجدداً $(x, ۰) \cdot (x', ۰) = (xx', ۰)$.

بارزترین نتیجه فوری تعریف جمع و ضرب برای نقاط صفحه وجود جذر برای (-۱) است. چون فاصله $(-۱, ۰)$ از مبدأ برابر واحد است، فاصله هر جذر احتمالی آن از مبدأ باید ۱ باشد. از طرفی دیگر $arg(-۱, ۰) = \pi$، و دقیقاً دو نقطهٔ $(۰, ۱)$ و $(۰, -۱)$ ویژگی مورد نظر را دارند:

$$(۰, ۱) \cdot (۰, ۱) = (-۱, ۰)$$

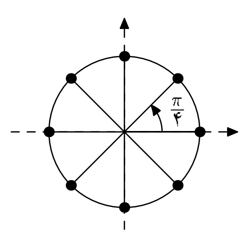
$$(۰, -۱) \cdot (۰, -۱) = (-۱, ۰)$$

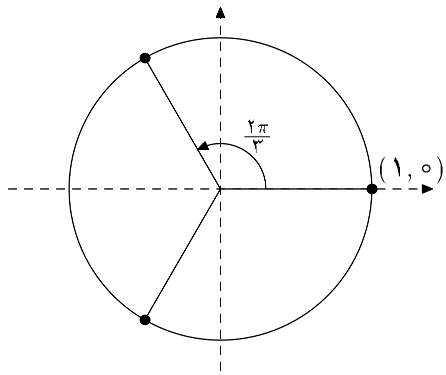
نقطهٔ $(۰, ۱)$ را به i نمایش می‌دهند، پس $-i = (۰, -۱)$ و $\pm i$ جذرهای (-۱) (یا $(-۱, ۰)$) هستند. نتیجه این که عدد ۱ (یا $(۱, ۰)$) دارای چهار ریشهٔ چهارم است، یعنی ± ۱ و $\pm i$.

به طور کلی ۱ دارای n ریشهٔ n ام است. از تعریف ضرب نتیجه می‌شود که n نقطهٔ زیر که به طور متساوی الفاصله روی دایرهٔ واحد توزیع شده‌اند ریشه‌های n ام ۱ می‌باشند:

$$(۱, ۰), (\cos\frac{۲\pi}{n}, \sin\frac{۲\pi}{n}), (\cos\frac{۴\pi}{n}, \sin\frac{۴\pi}{n}), \ldots, (\cos\frac{(n-۱)۲\pi}{n}, \sin\frac{(n-۱)۲\pi}{n})$$

در شکل ۴ (الف) ریشه‌های سوم ۱ و در شکل ۴ (ب) ریشه‌های هشتم ۱ نمایش داده شده‌اند.





جهت ارجاع‌های بعدی توجه کنید که ریشه‌های سوم ۱ عبارتند از:

$$(۱, ۰)$$

$$(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = (\cos\frac{۲\pi}{۳}, \sin\frac{۲\pi}{۳})$$

$$(-\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = (\cos\frac{۴\pi}{۳}, \sin\frac{۴\pi}{۳})$$