سری فوریه

تا این مرحله با چندجمله‌ای‌های تیلور به عنوان حربهٔ تقریب توابع و سری تیلور به عنوان روش نمایشی برای خانوادهٔ بزرگی از توابع آشنایی پیدا کرده‌ایم. هر یک از این دو، از مجموع عناصر ساختی $(x-a)^n$ با ضرایب مناسب تشکیل شده‌اند. یک خصوصیت مهم تقریب به وسیلهٔ چندجمله‌ای تیلور "موضعی" بودن آن است بدین معنی که هرچه x به a نزدیک‌تر باشد، تقریب دقیق‌تر است و با دور شدن x از a باید معمولاً تعداد جملات را به شدت افزایش داد تا تقریب معقولی حاصل شود. روش‌های تقریب و روش‌های نمایش دیگری نیز برای توابع موجود است که در اینجا به مهمترین آنها موسوم به چندجمله‌ای فوریه و سری فوریه می‌پردازیم. دو ویژگی متمایزکنندهٔ این روش در مقابل روش چندجمله‌ای و سری تیلور به این شرح‌اند:

یکی اینکه تقریب به وسیله چندجمله‌ای‌های فوریه به نوعی سرتاسری است یعنی معمولاً هیچ نقطهٔ خاصی از دامنه، "مرکز تقریب" نیست، بلکه فاصلهٔ عمومی بین نمودار تابع و نمودار تقریب به مفهومی که ذکر خواهد شد کوچک می‌شود، و نکته دوم اینکه این روش حربهٔ مهمی برای بررسی پدیده‌های تناوبی و تقریباً تناوبی مانند پدیده‌های موجی است.

فرض کنید $T>0$ داده شده است، قرار می‌دهیم $\omega=\frac{2\pi}{T}$. تابع‌های $\sin m\omega x$ و $\cos m\omega x$، m: عدد صحیح، همه دورهٔ تناوب T دارند. اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع با دورهٔ تناوب T باشد، هدف ما نمایش f به صورت یک سری با عناصر ساختی $\sin n\omega x$ و $\cos n\omega x$. مقصود از یک سری مثلثاتی با دورهٔ تناوب T، عبارتی به شکل زیر است:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_m\cos m\omega x+b_m\sin m\omega x) \qquad (1)$$

جملهٔ ثابت را به جای a_0 به $\frac{a_0}{2}$ نمایش داده‌ایم که بعداً هماهنگی کاملی در فرمول محاسبهٔ a_m ها ایجاد شود. فرض کنید بتوان مقدار تابع f را به صورت مجموع بالا نمایش داد:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x) \tag{2}$$

سعی می‌کنیم با یک "بحث اکتشافی" رابطهٔ a_m ها و b_m ها را با f مشخص کنیم. از فرمول‌های انتگرالی زیر که به سادگی از فرمول‌های مثلثاتی حاصل‌ضرب سینوس با سینوس، سینوس با کسینوس و کسینوس با کسینوس نتیجه می‌شوند استفاده خواهیم کرد:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos m\omega x)(\sin n\omega x) dx = 0 \tag{3}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x) dx = \begin{cases} 0 & m =\neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x) dx = \begin{cases} 0 & m =\neq n \\ \frac{T}{2} & m = n \end{cases} \tag{5}$$

توجه کنید که اگر به‌جای بازهٔ انتگرال‌گیری $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ از هر بازهٔ دیگر به طول دورهٔ تناوب، مثلاً $[0, T]$، نیز استفاده کنیم همان نتایج (۳)، (۴) و (۵) به‌دست می‌آیند. استفاده از بازهٔ متقارن $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ این حسن را دارد که در موارد خاص که بعداً به تابع‌های فرد یا زوج برمی‌خوریم بعضاً انتگرال‌گیری ساده‌تر می‌شود. همچنین توجه کنید که داریم:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos m\omega x dx = 0 \quad , \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin m\omega x dx = 0 \tag{6}$$

محاسبهٔ a_m ها و b_m ها را اکنون بدین طریق پیش می‌بریم. نخست از دو طرف (۲) روی بازهٔ $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{a_0}{2} T + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) dx$$

در طرف راست بالا انتگرال مجموع یک سری مطرح است. همان طور که قبلاً در بحث سری‌های تیلور بحث شد، به طور کلی نمی‌توان نوشت $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$ ولی در اینجا چون فقط یک بحث اکتشافی را دنبال می‌کنیم، این جابجایی انتگرال و مجموع نامتناهی را انجام می‌دهیم. نهایتاً قضیه‌ای ذکر خواهیم کرد که نتیجهٔ به‌دست آمده را توجیه می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{a_0}{2}T + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x + b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega x)dx)$$

طبق (۶) مقدار هر یک از انتگرال‌های سمت راست صفر است، پس:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \qquad (7)$$

چون طول بازهٔ $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ برابر T است، اگر این محاسبه توجیه‌پذیر باشد، نتیجه گرفته‌ایم که جملهٔ ثابت یعنی $\frac{a_0}{2}$، برابر میانگین تابع f در یک دوره تناوب است. این نتیجه را با مقدار جملهٔ ثابت سری تیلور مقایسه می‌کنیم. در مورد سری تیلور $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$، جملهٔ ثابت، یعنی a_0 برابر $f(a)$ است. تمایز بین سری تیلور و سری فوریه در همین گام آشکار می‌شود. در مورد سری تیلور، a_0 به عنوان تقریب درجه 0 تابع، فقط به مقدار تابع در نقطهٔ a توجه دارد، در حالی که در مورد سری فوریه، جملهٔ ثابت میانگین همهٔ مقادیر تابع در یک بازهٔ به طول T (دورهٔ تناوب f) می‌باشد.

با همین روش به مقادیری آزمایشی برای سایر ضرایب دست می‌یابیم. اگر برای $n > 0$ ثابت، دو طرف (۲) را در $\cos n\omega x$ ضرب کرده و روی $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ از دو طرف انتگرال بگیریم، مجدداً با جابجایی انتگرال و $\sum_{m=1}^{\infty}$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega x dx + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x)dx) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}(b_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x)dx) \end{aligned}$$

با توجه به فرمول‌های (۳)، (۴) و (۶) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x dx = a_n \cdot \frac{T}{2}$$

یا معادلاً

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x)\cos n\omega x dx \qquad (۸)$$

توجه کنید که (۷) حالت خاص (۸) به‌ازای $n = ۰$ است. به این دلیل بود که جمله ثابت را به $\frac{a_۰}{۲}$ نمایش دادیم. همین طور اگر دو طرف (۲) را در $\sin n\omega x$ ضرب کرده و روی $[-\frac{T}{۲}, \frac{T}{۲}]$ انتگرال‌گیری کنیم، با جابجایی مشابه و با استفاده از فرمول‌های (۳)، (۵) و (٦)، نتیجه می‌گیریم که

$$b_n = \frac{۲}{T}\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x)\sin n\omega x dx \qquad (۹)$$

قضیه‌ای در زیر خواهیم آورد، که اثبات آن از بحث ما خارج است، ولی تحت شرایط مناسب صحت فرمول‌های (۸) و (۹) را توجیه می‌کند. تابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را قطعه قطعه $C^۱$ می‌نامیم در صورتی که شرط زیر برقرار باشد: افرازی $a = a_۰ < a_۱ < \cdots < a_k = b$ وجود دارد که تحدید f به هر $]a_{i-۱}, a_i[$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است و به علاوه در هر a_i، تابع f و مشتق آن، تابع f'، دارای حد چپ و راست هستند (در نقطهٔ $a = a_۰$ فقط حد راست، و در نقطهٔ $b = a_k$، فقط حد چپ مطرح است).

(۳٦–۱) قضیه. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تناوبی با دورهٔ تناوب T و در بازهٔ تناوب خود قطعه قطعه $C^۱$ است و $\omega = \frac{۲\pi}{T}$، در این صورت سری:

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

که در آن a_n و b_n طبق فرمول‌های (۸) و (۹) تعریف شده‌اند دارای ویژگی زیر است.

الف) در هر نقطهٔ x که تابع f پیوسته باشد، مجموع سری بالا برابر $f(x)$ است.

ب) در هر نقطهٔ ناپیوستگی x برای تابع f، مجموع سری بالا برابر میانگین حد چپ و راست تابع f است. □

سری بالا را سری فوریهٔ تابع f می‌نامند. مجموع متناهی

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{N}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \qquad (۱۰)$$

تقریب فوریهٔ مرتبهٔ N تابع f خوانده می‌شود.

(۲–۳۶) چند مثال

(۱–۲–۳۶) تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & ۲k\pi < x < (۲k+۱)\pi, k\in\mathbb{Z} \\ ۰ & (۲k-۱)\pi < x < ۲k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

در هر $x=m\pi$، $m\in\mathbb{Z}$، مقدار $f(x)$ را برابر مقدار ثابت دلخواهی c قرار می‌دهیم. این مقدار اثری بر بحث نخواهد داشت. این تابع تناوبی با دورهٔ ۲π است و در شکل ۱ نمایش داده شده است:

?

در این مثال داریم $T=۲\pi$ و $\omega=۱$. نقاط ناپیوستگی f و f' مضارب π هستند (f' در این نقاط تعریف نشده است). ضرایب a_n و b_n را از (۸) و (۹) محاسبه می‌کنیم:

$$a_n=\frac{۲}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos nx dx=\begin{cases} ۱ & n=۰ \\ ۰ & n>۰\end{cases}$$

و

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{۲}{۲\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin nx dx=-\frac{۱}{n\pi}\cos nx|_{۰}^{\pi} \\ &= -\tfrac{۱}{n\pi}((-۱)^n-۱)=\begin{cases} ۰ & n \text{ زوج} \\ \frac{۲}{n\pi} & n \text{ فرد}\end{cases}\end{aligned}$$

بنابراین سری فوریه تابع f بدین صورت است:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}(\sin x+\frac{\sin ۳x}{۳}+\frac{\sin ۵x}{۵}+\cdots)$$

توجه کنید که هر یک از تابع‌های تشکیل‌دهندهٔ سری بالا پیوسته (در واقع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر) است ولی مجموع سری در بعضی نقاط پیوسته نیست! طبق قضیه در هر نقطهٔ $x\neq n\pi$، مجموع سری بالا برابر ۱ یا ۰ است (بسته به این که انتهای چپ بازه مضرب زوج یا فرد π باشد) و در $x=n\pi$ برابر میانگین حد راست و چپ، یعنی $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. مطلب اخیر را می‌توان با توجه به اینکه $\sin n\pi=۰$ مستقیماً مشاهده کرد. اینکه چگونه مجموع بالا به یک تابع ناپیوستهٔ پله‌ای میل می‌کند می‌توان با رسم

تقریب‌های فوریهٔ متوالی f مشاهده کرد (شکل ۲).

?

(۳٦–۲–۲) تابع $\phi : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $\phi(x) = |x|$ در نظر می‌گیریم و آن را به طور تناوبی با دورهٔ تناوب ۲ به تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ادامه می‌دهیم (شکل ۳).

?

در اینجا $T = 2$ و $\omega = \pi$. تابع f زوج است، پس برای هر n، $f(x)\sin n\pi x$ فرد است و انتگرال آن روی بازهٔ $[-1, 1]$ برابر صفر می‌شود، پس $b_n = 0$ برای هر n. برای محاسبهٔ a_n ها داریم:

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} |x| \cos n\pi x dx = 2\int_{0}^{1} x \cos n\pi x dx$$

برای $n = 0$، داریم $a_0 = 1$، برای $n > 0$ از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \cos n\pi x dx &= \tfrac{1}{n\pi} x \sin n\pi x|_0^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{n\pi} \sin n\pi x dx \\
&= \tfrac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x|_0^1 \\
&= \tfrac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \\
&= \begin{cases} 0 & n > 0 \text{ زوج} \\ -\frac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد} \end{cases}
\end{aligned}$$

بنابراین سری فوریه به شکل زیر است:

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots)$$

چون این تابع پیوسته است، مجموع سری بالا همه جا برابر $f(x)$ است. بالاخص در $x = 0$ داریم:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots)$$

یا

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \tag{11}$$

تمرین. از (۱۱) نتیجه بگیرید که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

همان طور که در مثال بالا مشاهده کردیم اگر تابع f زوج باشد همهٔ ضرایب b_n صفر هستند. به همین ترتیب برای تابع فرد، همهٔ ضرایب a_n صفر می‌شوند. مقصود از یک سری فوریه کسینوسی سری فوریه‌ای است که همه b_n های آن صفر باشند، و یک سری فوریهٔ سینوسی، سری فوریه‌ای است که در آن $a_n = 0$ برای هر n.

بحث ما تا این لحظه ممکن است این تصور را القاء کرده باشد که کاربرد سری فوریه فقط در مورد تابع‌های تناوبی است. در واقع اگر $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی قطعه قطعه C^1 باشد، می‌توان سری فوریه را در مورد آن به‌کار برد. شیوهٔ عمل این است که ϕ را بیرون $[a,b]$ به طور تناوبی ادامه می‌دهیم تا تابعی تناوبی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به‌دست آید و f را به صورت مجموع یک سری فوریه می‌نویسیم. اگر دامنهٔ این سری به $[a,b]$ محدود شود مجموع آن به صورت حکم قضیهٔ (۳۶−۱) نمایش ϕ است. در واقع ϕ را می‌توان به شیوه‌های گوناگون به طور تناوبی ادامه داد. به عنوان مثال:

(۳۶−۳) سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی $\phi : [0, A] \longrightarrow \mathbb{R}$

فرض کنید ϕ روی $[0, A]$ قطعه قطعه C^1 باشد. اگر برای $x \in [-A, 0[$ تعریف کنیم

$$\phi(x) = \phi(-x) \tag{۱۲}$$

تابعی زوج روی $[-A, A]$ به‌دست می‌آید. این تابع را با دورهٔ تناوب $T = 2A$ روی $\mathbb{R}$ ادامه می‌دهیم و تابع حاصل را f می‌نامیم. f تابعی زوج است و دارای ضرایب فوریهٔ زیر می‌باشد:

$$b_n = 0 \quad , \quad a_n = \frac{2}{A}\int_0^A \phi(x)\cos\frac{\pi}{A}nx\,dx \tag{۱۳}$$

سری فوریهٔ حاصل شده در $[0, A]$ نمایش ϕ است (با منظور کردن میانگین حدهای راست و چپ در نقاط ناپیوستگی).

به همین ترتیب، اگر به جای (۱۲)، تداوم ϕ به $[-A, 0[$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\phi(x) = -\phi(-x) \tag{۱۴}$$

و مقدار ϕ را در 0 نادیده بگیریم (که به هر حال اثری بر مقادیر انتگرال ندارد) ما ادامه ϕ با دورهٔ تناوب $T = 2A$ به سرتاسر $\mathbb{R}$ یک تابع فرد به‌دست می‌آید. برای ضرایب فوریه داریم:

$$a_n = 0 \quad , \quad b_n = \frac{2}{A}\int_0^A \phi(x)\sin\frac{\pi}{A}nx\,dx \tag{15}$$

سری فوریهٔ با این ضرایب در $[0, A]$ نمایش ϕ است (البته در مضارب A، مجموع سری فوریه برابر صفر می‌شود. چرا؟). **تمرین.** برای $\sin x$ یک سری فوریهٔ کسینوسی روی $[0, \pi]$ بنویسید و برای $\cos x$، یک سری فوریهٔ سینوسی روی $[0, \pi]$.

در آغاز اشاره کردیم به این که چندجمله‌ای‌های فوریه نوعی تقریب سرتاسری برای تابع ارائه می‌کنند. در این زمینه قضایای متعددی وجود دارد که یکی از ساده‌ترین آنها را ذکر می‌کنیم. مجموع متناهی (۱۰) را به ϕ_N نمایش دهید. تحت شرایط قایل شده در قضیهٔ (۳۶—۱) برای تابع f، می‌توان ثابت کرد که:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x) - \phi_N(x)|^2 dx\right) = 0 \tag{16}$$

این مطلب گویای این واقعیت است که در یک دورهٔ تناوب، مساحت بین نمودار f و نمودار تقریب‌های فوریهٔ آن به تدریج کوچکتر شده و به صفر میل می‌کند.