سری تیلور و سری توانی (۳)

یکی از پراستفاده‌ترین نمایش‌های تابعی به صورت سری تیلور، نمایش تابع $f(x) = (۱ + x)^\alpha$، $|x| < ۱$، α عدد حقیقی دلخواه، است. این نمایش را نیوتن در آغاز تحقیقات خود در حساب دیفرانسیل و انتگرال کشف کرد و تعمیمی از اتحاد $(a+b)^n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ است.

(۳۵–۱) سری دوجمله‌ای فرض کنید α یک عدد حقیقی داده شده است. تابع:

$$f(x) = (۱ + x)^\alpha = \exp(\alpha \ln(۱ + x))$$

برای $x > -۱$ تعریف شده است و ترکیب بالا نشان می‌دهد که در این دامنه دارای مشتق از هر مرتبه است. نخست سری تیلور f را در $a = ۰$ می‌نویسیم و سپس نشان می‌دهیم این سری در $|x| < ۱$ به خود تابع همگراست. مشتقات f به سادگی محاسبه می‌شوند:

$$f'(x) = \alpha(۱ + x)^{\alpha-۱}, \ldots, f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - ۱)\cdots(\alpha - k + ۱)(۱ + x)^{\alpha-k} \tag{۱}$$

بنابراین سری تیلور f در $a = ۰$ به صورت زیر است:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - ۱)\cdots(\alpha - n + ۱)}{n!} x^n = ۱ + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - ۱)}{۲!} x^۲ + \cdots \tag{۲}$$

ضریب $\frac{\alpha(\alpha-۱)\cdots(\alpha-n+۱)}{n!}$ را گاهی به $\binom{\alpha}{n}$ نمایش می‌دهند زیرا که در واقع برای عدد صحیح $\alpha > n$، داریم $\frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-۱)\cdots(\alpha-n+۱)}{n!}$. شعاع همگرایی سری توانی (۲) را محاسبه می‌کنیم. از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\binom{\alpha}{n+۱}|}{|\binom{\alpha}{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - n|}{n + ۱} = ۱$$

پس شعاع همگرایی برابر ۱ است. مجموع سری فوق را در $|x| < 1$ به $g(x)$ نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم $g(x) = f(x)$. برای این کار از روشی غیر مستقیم استفاده می‌کنیم که در موارد مشابه دیگر نیز گاهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. طبق قضیهٔ (۳۴–۱)، قسمت (الف)، می‌توان از g در $]-1, 1[$ جمله به جمله مشتق گرفت و داریم:

$$g'(x) = \alpha + \alpha(\alpha - 1)x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$xg'(x) = \alpha x + \alpha(\alpha - 1)x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3 + \cdots$$

پس با جمع جملات هم مرتبه داریم:

$$\begin{aligned}(1 + x)g'(x) &= \alpha + \alpha((\alpha - 1) + 1)x + \alpha(\tfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} + (\alpha - 1))x^2 + \cdots \\ &= \alpha[1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots] \\ &= \alpha g(x)\end{aligned}$$

بدین ترتیب تابع g در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$|x| < 1 \quad , \quad (1 + x)g'(x) = \alpha g(x) \tag{3}$$

اگر بنویسیم $y = g(x)$، با توجه به اینکه در $|x| < 1$، $1 + x \neq 0$، می‌توان نوشت:

$$|x| < 1 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \alpha \frac{y}{1 + x} \tag{4}$$

طبق قضیهٔ اساسی وجود و یگانگی جواب معادلهٔ دیفرانسیل عادی، این دستگاه به‌ازای شرط آغازی ($y = 1$، $x = 0$) جواب یگانه دارد. از طرفی دیگر تابع $f(x) = (1 + x)^\alpha$ واجد این شرط آغازی است و با مشتق‌گیری ملاحظه می‌شود که در (۴) صدق می‌کند، پس در واقع ثابت کرده‌ایم که:

$$|x| < 1 \quad , \quad g(x) = (1 + x)^\alpha$$

یعنی سری تیلور تابع $f(x) = (1 + x)^\alpha$ در $|x| < 1$ به خود تابع میل می‌کند.

(۲—۳۵) چند مثال

(۱—۲—۳۵) اگر $\alpha = p$ یک عدد صحیح مثبت باشد، برای $f(x) = (۱ + x)^p$ مشتقات از مرتبهٔ بزرگتر از p صفر می‌شوند و در واقع بسط دوجمله‌ای مأنوس

$$(۱ + x)^p = \sum_{k=۰}^{p} \binom{p}{k} x^k$$

به‌دست می‌آید. این نمایش در واقع برای هر x حقیقی برقرار است.

(۲—۲—۳۵) برای $\alpha = -p$، n عدد صحیح مثبت، داریم

$$|x| < ۱ \quad , \quad \begin{aligned} \frac{۱}{(۱+x)^p} &= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{p(p+۱)\cdots(p+n-۱)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \binom{n+p-۱}{n} x^n \end{aligned} \tag{۵}$$

که $\binom{n+p-۱}{n} = \frac{(n+p-۱)!}{(p-۱)!n!}$. سری (۵) در محاسبهٔ تقریبی عبارتی به صورت $\frac{۱}{(a+h)^p}$ که در آن $|h|$ نسبت به $|a|$ کوچک است مؤثر واقع می‌شود. برای $|h| < |a|$ داریم $|\frac{h}{a}| < ۱$، پس:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{(a+h)^p} &= \left(\frac{۱}{a^p}\right) \frac{۱}{(۱+\frac{h}{a})^p} \\ &= \left(\frac{۱}{a^p}\right) \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \binom{n+p-۱}{n} \left(\frac{h}{a}\right)^n \end{aligned}$$

یا:

$$|h| < |a| \quad , \quad \frac{۱}{(a+h)^p} = \frac{۱}{a^p} - \frac{ph}{a^{p+۱}} + \frac{p(p+۱)h^۲}{۲a^{p+۲}} - + \cdots \tag{۶}$$

برای $|h|$ بسیار کوچک، حتی تقریب خطی

$$\frac{۱}{(a+h)^p} - \frac{۱}{a^p} \simeq \frac{ph}{a^{p+۱}} \tag{۷}$$

برای بسیاری مقاصد بسنده می‌کند.

لازم به ذکر است که این مثال خاص، یعنی $\alpha = -p$، را می‌توانستیم از مشتق‌گیری مکرر سری هندسی مربوط به تابع $\frac{۱}{۱+x}$ نیز به‌دست آوریم.

(۳۵–۲–۳) حالت $\alpha = -\frac{۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{۱+x}} = ۱ - \frac{۱}{۲}x + \frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۲}{۳})}{۱ \times ۲}x^{۲} + \frac{(-\frac{۱}{۲})(-\frac{۲}{۳})(-\frac{۵}{۲})}{۱ \times ۲ \times ۳}x^{۳} + \cdots$$

با جایگزینی $-x$ به جای x داریم:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{۱-x}} = ۱ + (\frac{۱}{۲})x + \frac{(۱ \times ۳)}{(۲ \times ۴)}x^{۲} + \frac{(۱ \times ۳ \times ۵)}{(۲ \times ۴ \times ۶}x^{۳} + \cdots$$

و اگر $x^{۲}$ را جایگزین x کنیم

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = ۱ + (\frac{۱}{۲})x^{۲} + \frac{(۱ \times ۳)}{(۲ \times ۴)}x^{۴} + \frac{(۱ \times ۳ \times ۵)}{(۲ \times ۴ \times ۶}x^{۶} + \cdots \qquad (۸)$$

حال با استفاده از انتگرال‌گیری جمله به جمله، قضیهٔ ۳۴–۱، ب، داریم:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \sin^{-۱} x = x + (\frac{۱}{۲})\frac{x^{۳}}{۳} + (\frac{(۱ \times ۳)}{(۲ \times ۴)}\frac{x^{۵}}{۵} + \cdots \qquad (۹)$$

که سری تیلور $\sin^{-۱} x$ در $a = ۰$ است.

در اینجا لازم است به عملیات جبری بین سری‌های توانی اشاره‌ای داشته باشیم. فرض کنید دو سری توانی حول a، $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-a)^n$ به شعاع همگرایی $\rho_۱$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n(x-a)^n$ به شعاع همگرایی $\rho_۲$ داده شده باشند. فرض کنید سری اول در $|x-a| < \rho_۱$ به $f(x)$ و سری دوم در $|x-a| < \rho_۲$ به $g(x)$ میل می‌کند. برای $\rho = \min\{\rho_۱, \rho_۲\}$ و $|x-a| < \rho$، هر دو سری همگرا هستند، پس با توجه به اینکه سری مجموع جملات متناظر دو سری همگرا، به مجموع حد دو سری میل می‌کند، داریم:

$$|x-a| < \rho \quad , \quad \sum_{n=۰}^{\infty}(a_n + b_n)(x-a)^n = f(x) + g(x) \qquad (۱۰)$$

برای به‌دست آوردن یک سری توانی که به $f(x)g(x)$ میل کند به طریق زیر عمل می‌کنیم. توجه کنید که برای اینکه حاصل‌ضرب دو جملهٔ سری‌های توانی داده شده از درجهٔ n باشد لازم و کافی است که مجموع اندیس‌های ضرایب برابر n شود. تعریف می‌کنیم:

$$c_۰ = a_۰b_۰, c_۱ = a_۰b_۱ + a_۱b_۰, \ldots, c_n = a_۰b_n + a_۱b_{n-۱} + \cdots + a_nb_۰ \qquad (۱۱)$$

سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ را حاصل‌ضرب کوشی دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ می‌نامند.

(۳–۳۵) گزاره. برای $|x-a| < \rho$، که $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$، حاصل‌ضرب کوشی به $f(x)g(x)$ همگراست.

برهان. داریم $|c_n| \leq |a_0||b_n| + \cdots + |a_n||b_0|$، پس:

$$|c_0| + |c_1||x-a| + \cdots + |c_n||x-a|^n \leq (|a_0| + \cdots + |a_n||x-a|^n)(|b_0| + \cdots + |b_n||x-a|^n)$$

از طرفی دیگر سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ به‌ازای $|x-a| < \rho$ همگرای مطلق هستند، پس طرف راست نامساوی بالا کراندار است. نتیجه اینکه مجموع‌های جزیی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ نیز به طور مطلق همگرا هستند. بنابراین می‌توان مجموع جملات $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ را جابجا کرد بدون اینکه در مجموع تغییری حاصل شود. $\square$

می‌توان ثابت کرد که اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho_1$ و $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ در $|x-a| < \rho_2$، و $g(x) \neq 0$ به‌ازای هر x در $|x-a| < \rho_2$، آنگاه $\rho > 0$ وجود دارد که $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ در $|x-a| < \rho$ تحلیلی است. در این صورت با نوشتن $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ و با استفاده از حاصل‌ضرب کوشی، می‌توان با مقایسهٔ ضرایب دو طرف $f(x) = g(x)h(x)$، ضرایب c_n را محاسبه کرد. این مطلب را با یک مثال نشان می‌دهیم.

مثال. فرض کنید می‌دانیم $\tan x$ در $a = 0$ تحلیلی است، چند ضریب اول سری تیلور آن را در $a = 0$ محاسبه کنید. محاسبهٔ مستقیم از طریق مشتق‌گیری و محاسبهٔ ضرایب $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ به سرعت افزایش n پیچیده می‌شود. به جای آن می‌نویسیم

$$\sin x = (\cos x)(\tan x)$$

پس اگر $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ بسط تیلور $\tan x$ در $a = 0$ باشد داریم:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots)(t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \cdots)$$

با محاسبهٔ حاصل‌ضرب کوشی طرف راست و برابر قرار دادن ضرایب آن با ضرایب متناظر طرف چپ داریم:

$$\begin{aligned}
0 &= t_0 \\
1 &= t_1 \\
0 &= t_2 - \tfrac{1}{2}t_0 \\
-\tfrac{1}{6} &= t_3 - \tfrac{1}{2}t_1 \\
0 &= t_4 - \tfrac{1}{2}t_2 + \tfrac{1}{4!}t_0 \\
\tfrac{1}{120} &= t_5 - \tfrac{1}{2}t_3 + \tfrac{1}{4!}t_1 \\
\vdots &\;\vdots\; \vdots
\end{aligned}$$

می‌توان این دستگاه را از بالا به پایین حل کرد و متوالیاً ضرایب t_n را به‌دست آورد:

$$t_0 = 0 \;,\; t_1 = 1 \;,\; t_2 = 0 \;,\; t_3 = \frac{1}{3} \;,\; t_4 = 0 \;,\; t_5 = \frac{2}{15} \;,\; \ldots$$

توجه کنید که چون $\tan x$ یک تابع فرد است، مشتقات آن از مرتبهٔ زوج همه فرد هستند و در $a = 0$ برابر صفر می‌شوند، بنابراین در سری تیلور $\tan x$ در $a = 0$ فقط جملات درجهٔ فرد ظاهر می‌شوند. در بالا ضرایب را تا درجهٔ ۵ محاسبه کردیم:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \qquad (12)$$

(۴—۳۵) محاسبهٔ حد به کمک سری تیلور

بسیاری از محاسبات حدی که در مباحث مقدماتی از طریق استفادهٔ مکرر از روش‌هایی مانند قاعدهٔ هوپیتال حل می‌شوند می‌توان به سادگی با توجه به سری تیلور انجام داد. به مثال زیر توجه کنید

مثال. می‌خواهیم $\lim_{x\to 0} \frac{x^6\cos x - x^5 \sin x}{x^8}$ را محاسبه کنیم. محاسبه این حد از طریق قاعدهٔ هوپیتال هشت بار مشتق‌گیری می‌طلبد ولی توجه کنید که:

$$\begin{aligned} x^6\cos x - x^5\sin x &= x^6(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots) - x^5(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots) \\ &= (-\frac{1}{2} + \frac{1}{6})x^8 + (\text{جملات توان } 10 \text{ در } x \text{ به بالا}) \end{aligned}$$

بنابراین برای $x \neq 0$ داریم:

$$\frac{x^6\cos x - x^5\sin x}{x^8} = (-\frac{1}{3}) + (\text{جملات توان } 2 \text{ در } x \text{ به بالا})$$

بنابراین حد عبارت بالا وقتی x به 0 میل کند برابر $-\frac{1}{3}$ است.