

اعداد حقیقی (۲)

صحبت جلسه گذشته با این سؤال به پایان رسید که اگر c_0 یک عدد طبیعی یا صفر باشد و هر c_i ، $i = 1, 2, \dots$ یک رقم، یعنی عددی از مجموعه $\{0, 1, \dots, 9\}$ ، آیا می‌توان عبارت:

$$c_0/c_1c_2c_3\dots \quad (1)$$

را یک "عدد" تلقی کرد؟ برای اینکه این سؤال معنی داشته باشد باید دو چیز روشن شود:

الف) مقصود از عبارت بالا چیست؟

ب) مقصود از یک عدد چیست؟

در مورد سؤال (ب)، جواب ریاضیدانان باستان را می‌دانیم و فعلاً همین جواب را مبنای قرار می‌دهیم. مقصود از یک عدد، نسبت طول‌های دو پاره‌خط است. بالاخص اگر پاره‌خطی را به عنوان واحد انتخاب و تثبیت کنیم، طول‌های همه پاره‌خط‌های ممکن، مجموعه اعداد (مثبت) را تشکیل می‌دهند. به این ترتیب اگر نیم‌خطی H انتخاب کنیم، مبدأ آن را o بنامیم و نقطه‌ای دیگر را به عنوان نقطه واحد، 1 ، اختیار کنیم، تناظری یک به یک میان نقاط این نیم‌خط و اعداد (مثبت) منظور می‌شود. بدین ترتیب که هر نقطه c روی این نیم‌خط، پاره‌خطی از o تا c تعریف می‌کند (شکل ۱) که طول این پاره‌خط نسبت به واحد اختیار شده عدد متناظر است. البته در اینجا ادراک هندسی، شهودی قابل اعتماد تلقی می‌گردد. بدین ترتیب فرض می‌کنیم در مورد مفهوم خط راست و طول مناقشه‌ای نیست، برداشت همه انسان‌ها از این مفاهیم یکسان است، و کارکردن با این مفاهیم به مشکل منطقی منجر

نمی‌شود. باید توجه داشت که از نظر دانشمندان باستان، هندسه یک شاخهٔ علم طبیعی بود و اصول متعارف متکی بر ادراک انسان مجاز شمرده می‌شدند.

در مورد (الف)، اکنون کوشش خواهیم کرد برای (۱) معنایی قابل شویم. اگر به جای سه نقطه (ادامه نامحدود) در (۱) عبارت $c_0/c_1 \dots c_n$ را در نظر بگیریم، این عبارت مفهومی دقیق و روشن دارد:

$$C_n = c_0/c_1 \dots c_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n}$$

یک n خاص تثبیت می‌کنیم. اگر عبارت (۱) یک عدد باشد، این عدد قطعاً باید دست کم به اندازه C_n باشد زیرا که افزودن ارقام c_{n+1} به بعد نمی‌تواند آن را کوچکتر سازد. ولی عددی که ممکن است توسط (۱) بیان شود حداکثر چقدر بزرگتر از C_n می‌تواند باشد؟ این عدد نمی‌تواند از $\frac{1}{10^n}$ بزرگتر از C_n باشد زیرا که در آن صورت می‌بایست رقم n ام پس از اعشار از c_n بزرگتر شود. بنابراین:

$$C_n \leq c_0/c_1 c_2 c_3 \dots \leq C_n + \frac{1}{10^n} \quad (2)$$

رابطه (۲) باید به‌ازای هر n برقرار باشد. بدین ترتیب $c_0/c_1 c_2 c_3 \dots$ در صورت وجود، عددی است که در نامساوی (۲) به‌ازای هر n صدق می‌کند، $n = 0, 1, 2, \dots$.

(۱-۲) لم. حداکثر یک عدد ممکن است در نامساوی (۲) به‌ازای هر n صدق کند.

اثبات. اگر دو عدد c و c' وجود داشته باشند که به‌ازای هر n در بازه $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$ قرار گیرند، فاصلهٔ این دو عدد از هر $\frac{1}{10^n}$ کوچکتر است. چون با بزرگ گرفتن n ، $\frac{1}{10^n}$ را می‌توان به دلخواه کوچک ساخت، فاصله c و c' باید از هر عددی کوچکتر باشد، پس $c = c'$. \square

اکنون می‌بینیم که وجود عددی با ویژگی (۲) متضمن چیست. چنین عددی باید در همهٔ بازه‌های $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$ قرار گیرد. توجه کنید که چون

$$C_0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \dots$$

$$C_0 + 1 \geq C_1 + \frac{1}{10} \geq C_2 + \frac{1}{10^2} \geq \dots$$

این بازه‌ها تو در تو هستند:

$$\dots \subset [C_2, C_2 + \frac{1}{10^2}] \subset [C_1, C_1 + \frac{1}{10}] \subset [C_0, C_0 + 1]$$

هر بازه طولی $\frac{1}{10^n}$ بازه سمت راست خود دارد و عدد فرضی $c_0/c_1c_2\dots$ باید در همه این بازه‌ها قرار گیرد. شهود ما از "پیوسته بودن" نیم خط H حکم می‌کند که این دنباله انقباضی بازه‌های بسته باید به یک تک نقطه روی نیم خط H متقارب شود که باید به ناچار همان نقطه $c_0/c_1c_2\dots$ باشد که در همه این بازه‌ها قرار دارد. این تصور هندسی قابل اثبات نیست بلکه جزئی از ادراک ما از پیوسته بودن خط راست است. به این دلیل این حکم را به عنوان یک اصل وضع می‌کنیم:

(۲-۲) اصل تمامیت (صورت اول). عددی (منحصر به فرد) وجود دارد که در همه نامساوی‌های (۲)، به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ صدق می‌کند. (در واقع به زودی خواهیم دید که، بالعکس، هر نقطه روی H نمایشی به شکل $c_0/c_1c_2c_3\dots$ مختوم یا نامختوم، دارد).

بدین ترتیب، طبق اصل تمامیت، $c_0/c_1c_2c_3\dots$ نمایشگر یک عدد (و فقط یک عدد، طبق لم ۱-۲) است. همچنان که در جلسه قبل دیدیم در میان این اعداد فقط آنهایی که مختومه هستند، یعنی $c_n = 0$ از یک n به بعد، و آنهایی که مالا متناوب می‌شوند نمایشگر اعداد گویا، یعنی کسرهای $m, n, \frac{m}{n}$ عدد طبیعی، هستند. سایر اعداد را ناگویا یا اصم می‌نامند. بنابراین با اتکاء به اصل تمامیت می‌توان اعداد ناگویای فراوانی ارائه کرد.

نکته زیر، که به عنوان مثال ارائه می‌شود، نتیجه مستقیم اصل تمامیت و لم ۱-۲ است:

مثال. می‌خواهیم عدد زیر را بررسی کنیم:

$$1/999\dots$$

پس در اینجا $c_0 = 1$ و $c_i = 9$ به ازای هر $i \geq 1$. طبق اصل تمامیت این قطعاً یک عدد است و در همه نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$1/\underbrace{9\dots 9}_n \leq 1/999\dots \leq 1/\underbrace{9\dots 9}_n + \frac{1}{10^n} = 2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

از طرفی دیگر عدد ۲ نیز در همین نامساوی به ازای هر n صدق می‌کند. بنابراین طبق ۱-۲ داریم:

$$1/999\dots = 2$$

تمرین. فرض کنید $c_n < 9$ و $c_i = 9$ به ازای هر $i > n$. به روش مثال قبل ثابت کنید عدد

$$c_0/c_1\dots c_n 999\dots$$

برابر $(c_0/c_1\dots c_{n-1})(c_n + 1)$ است.

در اینجا لازم است برای تکمیل بحث نشان دهیم هر عدد، یعنی هر عضو H ، به صورت اعشاری مختوم یا نامختوم قابل نمایش است. اگر c عضوی از H باشد، دو عدد صحیح متوالی $c_0 + 1$ و c_0 می‌توان یافت که $c_0 \leq c < c_0 + 1$. اگر بازه $[c_0, c_0 + 1]$ را به صورت زیر به 10^0 زیربازه مجزا تجزیه کنیم:

$$[c_0, c_0 + \frac{1}{10^0}] \cup [c_0 + \frac{1}{10^0}, c_0 + \frac{2}{10^0}] \cup \dots \cup [c_0 + \frac{9}{10^0}, c_0 + 1]$$

عدد c در یک و تنها یکی از این 10^0 بازه قرار دارد، مثلاً c عضو $[c_0 + \frac{c_1}{10^0}, c_0 + \frac{c_1+1}{10^0}]$ ، $0, 1, \dots, 9$ است. که در این صورت می‌توان نوشت:

$$c_0 + \frac{c_1}{10^0} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10^0} + \frac{1}{10^0}$$

به همین ترتیب بازه $[c_0 + \frac{c_1}{10^0}, c_0 + \frac{c_1}{10^0} + \frac{1}{10^0}]$ را به 10^1 بازه به طول $\frac{1}{10^1}$ تجزیه کرده و نتیجه می‌گیریم که رقمی c_2 وجود دارد به طوری که:

$$c_0 + \frac{c_1}{10^0} + \frac{c_2}{10^1} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10^0} + \frac{c_2}{10^1} + \frac{1}{10^1}$$

با ادامه این عمل، اگر در گامی، c دقیقاً برابر نقطه انتهایی سمت چپ شود، مثلاً $c = c_0 + \frac{c_1}{10^0} + \dots + \frac{c_k}{10^k}$ داریم $c = c_0/c_1\dots c_k$. در غیر این صورت این فرایند متوقف نمی‌شود و خواهیم داشت:

$$c_0 + \frac{c_1}{10^0} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq c < c_0 + \frac{c_1}{10^0} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\leq c_0 + \frac{c_1}{10^0} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

عددی که در هر همه این نامساوی‌ها صدق کند، طبق تعریف به $c_0/c_1c_2c_3\dots$ نمایش دادیم. معمولاً اصل تمامیت به شکل معادل دیگری ارائه می‌شود که مجردتر است، کلی‌تر به نظر می‌رسد و وابستگی ظاهری (۲-۲) به مبنای عددنویسی 10 را ندارد. ضمن ارائه این صورت اصل تمامیت، نشان خواهیم داد که در واقع دو صورت معادل‌اند. توجه داشته باشید که تصویر هندسی ما از مجموعه اعداد، اکنون نقاط روی یک نیم‌خط H است. نقطه آغازی این نیم‌خط را 0 نامیدیم و امتداد نیم‌خط را معمولاً به طرف راست می‌گیریم (شکل ۱). به این ترتیب رابطه ترتیبی $a < b$ از نظر هندسی بدین معنی است که b در طرف راست a قرار دارد. از این پس از نماد متداول برای بازه‌ها نیز استفاده خواهیم کرد. بدین ترتیب اگر a و b در H باشند، $[a, b] = \{x \in H \mid a \leq x \leq b\}$ ، $[a, b[= \{x \in H \mid a \leq x < b\}$ و به همین ترتیب $]a, b]$ و $]a, b[$ تعریف می‌شوند. اگر S زیرمجموعه‌ای از H باشد، عدد M را یک کران بالا برای S می‌نامیم در صورتی که:

$$s \leq M \text{ برای هر عضو } s \text{ از } S$$

بعضی زیرمجموعه‌های S دارای کران بالایی هستند و بعضی نیستند. مثلاً برای هر یک از دو بازه $[a, b]$ و $]a, b[$ هر عدد M که $M \geq b$ یک کران بالایی برای مجموعه است، ولی مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, \dots\}$ کران بالایی ندارد. عدد M_0 را کوچکترین کران بالایی برای مجموعه S می‌نامیم در صورتی که:

الف) M_0 یک کران بالا برای S باشد.

ب) به ازای هر کران بالای M برای مجموعه S داشته باشیم $M_0 \leq M$.

توجه کنید که، در صورت وجود، کوچکترین کران بالا منحصر به فرد است زیرا که اگر M_0 و M_1 هر دو کوچکترین کران بالا برای مجموعه S باشند باید داشته باشیم $M_0 \leq M_1$ و $M_1 \leq M_0$ ، پس $M_1 = M_0$.

(۲-۳) اصل تمامیت (صورت دوم). اگر برای زیرمجموعه ناتهی S از H کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای S یک کوچکترین کران بالایی (منحصر به فرد) وجود دارد.

لازم به تذکر است که کوچکترین کران بالایی مجموعه S ممکن است عضو S باشد یا نباشد. مثلاً برای هر دو مجموعه $[1, 2]$ و $[1, 2[$ ، عدد ۲ کوچکترین کران بالا است که عضو $[1, 2]$ می باشد ولی عضو $[1, 2[$ نیست.

اکنون نشان می دهیم که دو صورت اصل تمامیت معادل هستند به این مفهوم که اگر هر یک را بپذیریم، دیگری از اصل پذیرفته شده قابل اثبات است.

نخست نشان می دهیم صورت اول، صورت دوم را نتیجه می دهد. بدین ترتیب S را مجموعه ای ناتهی از H می گیریم که کران بالایی دارد و برای آن کوچکترین کران بالایی را ارائه می کنیم. هر عضو S را به صورت اعشاری نمایش می دهیم. چون S کران بالا دارد، در بین اجزاء صحیح این نمایش های اعشاری بزرگترین وجود دارد (در غیر این صورت برای هر عدد طبیعی n ، S عضوی بزرگتر از n خواهد داشت و S دارای کران بالایی نخواهد بود). بزرگترین جزء صحیح در میان اعضای S را c_0 می نامیم. حال S_1 را زیرمجموعه S می گیریم که از اعضای با جزء صحیح c_0 تشکیل شده است و به رقم اول پس از اعشار اعضای S_1 نگاه می کنیم. این رقم باید یکی از اعداد $0, 1, \dots, 9$ باشد. بزرگترین رقم اول پس از اعشار موجود میان اعضای S_1 را c_1 می نامیم. حال S_2 را زیرمجموعه S_1 می گیریم که اعضایش با c_0/c_1 شروع می شوند و به رقم دوم پس از اعشار در میان عناصر S_2 نگاه می کنیم. بزرگترین رقم موجود را c_2 می نامیم و عمل بالا را ادامه می دهیم. حال $c = c_0/c_1c_2c_3\dots$ طبق اصل تمامیت یک عدد است و از روش ساخت c مشخص است که:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ادعا می کنیم c کوچکترین کران بالایی برای مجموعه S است. اینکه c کران بالایی برای S است از نامساوی های سمت چپ نتیجه می شود، در واقع در هر مرحله رقم n ام c بزرگترین رقم موجود در بین عناصر S انتخاب شد. به علاوه کران بالایی کوچکتری از c برای S وجود ندارد زیرا که اگر $c' = c'_0/c'_1c'_2c'_3\dots$ کوچکتر از $c = c_0/c_1c_2c_3\dots$ باشد، در یک مرحله رقم متناظر، c'_n باید کوچکتر از c_n باشد. اگر این رویداد برای اولین بار به ازای $n = k$ رخ دهد، عناصری از S وجود دارند که رقم k ام آنها بزرگتر از c'_k است، پس c' از بعضی عناصر S کوچکتر است و نمی تواند کران بالا برای S

باشد.

بالعکس ثابت می‌کنیم صورت دوم اصل تمامیت، صورت اول را نتیجه می‌دهد. یعنی ثابت می‌کنیم هرگاه c_0 یک عدد صحیح از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots\}$ باشد و c_i ها یک مجموعه ارقام، یعنی اعضای مجموعه $\{0, 1, \dots, 9\}$ ، آنگاه عددی c وجود دارد که:

$$(3) \quad c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

برای این کار، مجموعه T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \{c_0, c_0/c_1, c_0/c_1c_2, \dots\}$$

این مجموعه کران بالا دارد (مثلاً $1 + c_0$)، پس طبق صورت دوم اصل تمامیت، دارای کوچکترین کران بالایی است که به c نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم این عدد c در نامساوی‌های (3) صدق می‌کند. اینکه c کران بالایی برای S است نشان می‌دهد c از هیچ یک از $c_0/c_1 \dots c_n$ ها کوچکتر نیست، یعنی نامساوی‌های سمت چپ برقرارند. حال اگر نامساوی‌های سمت راست برقرار نباشند عدد صحیحی k وجود دارد که

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} < c$$

ولی $c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}$ از همه عناصر T بزرگتر است (توجه کنید که $c_0/c_1 \dots c_k < c_0/c_1 \dots c_{k+1} \dots c_n < \frac{1}{10^k}$) بنابراین یک کران بالایی برای T کوچکتر از c یافت شده است که خلاف انتخاب c به عنوان کوچکترین کران بالایی T است. بدین ترتیب صورت اول اصل تمامیت از صورت دوم نتیجه می‌شود.

در اینجا لازم است از "اعداد منفی" نیز صحبت شود. از نظر تاریخی پذیرفتن اعداد منفی به عنوان عدد قرن‌ها طول کشید و در واقع اعداد منفی کمابیش همراه با "اعداد موهومی" که در جلسات بعد مطرح خواهند شد در قرن شانزدهم میلادی طی توسعه بیشتر علم جبر به عنوان "عدد" پذیرفته شدند. ساده‌ترین راه معرفی اعداد منفی تداوم نیم خط H به سوی چپ به یک خط راست کامل است. قرینه

هر عضو x در H را به " $-x$ " نمایش می‌دهیم، عملیات جبری مانوس را اعمال می‌کنیم و رابطه ترتیب $a < b$ به معنای a در طرف چپ b قرار دارد را منظور می‌کنیم. مجموعه اعداد مثبت، منفی و صفر که بدین طریق به دست می‌آیند مجموعه اعداد حقیقی می‌نامیم و به \mathbb{R} نمایش می‌دهیم. صورت دوم اصل تمامیت را می‌توان عیناً برای اعداد حقیقی نوشت:

(۲-۴) اصل تمامیت برای \mathbb{R} . اگر برای زیرمجموعه ناتهی S از \mathbb{R} کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای S یک کوچکترین کران بالایی وجود دارد.

اینکه (۲-۴) از (۲-۳) نتیجه می‌شود به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. به علاوه می‌توان مفهوم کران پایین و بزرگترین کران پایین را نیز با وارونه کردن نامساوی‌ها تعریف کرد و حکم زیر را نتیجه گرفت:

(۲-۴) اگر برای زیرمجموعه ناتهی S از \mathbb{R} کران پایینی وجود داشته باشد، آنگاه برای S بزرگترین کران پایینی وجود دارد.

تمرین. (۲-۵) را از (۲-۴) نتیجه بگیرید (راهنمایی. مجموعه S' را در نظر بگیرید که از کلیه " $-x$ " ها، به ازای $x \in S$ ، تشکیل شده است).

تمرین. نشان دهید کران بالایی A برای مجموعه S کوچکترین کران بالایی است A اگر و تنها اگر به ازای هر عدد طبیعی n ، عضوی از s از S وجود داشته باشد که $s > A - \frac{1}{n}$.

هرگاه a و b اعداد حقیقی باشند، بازه‌های $[a, b]$ ، $[a, b[$ ، $]a, b]$ و $]a, b[$ عیناً مانند قبل تعریف می‌شوند. مقصود از $]a, \infty[$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ و مقصود از $]-\infty, a]$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ است. به همین ترتیب مجموعه‌های $]a, \infty[$ و $]-\infty, a[$ تعریف می‌شوند.