انتگرال‌های ناسره

مفهوم انتگرال که تاکنون بررسی شد به تابع‌های کراندار روی بازه‌های کراندار محدود بود. در مواردی می‌توان با حذف یکی از این دو محدودیت یا هر دوی آن، به تعمیمی از مفهوم انتگرال دست یافت که به انتگرال ناسره معروف است. در زیر به بررسی دو نوع اساسی از این انتگرال‌ها و ترکیب آنها می‌پردازیم.

(۷—۱) انتگرال ناسره نوع اول: دامنهٔ بی‌کران

در اینجا تابع‌هایی را در نظر می‌گیریم که دامنهٔ آنها به شکل $[a,\infty[$ یا $]-\infty,a]$ است. نخست تابع‌های $f:[a,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. ملاحظات مشابهی در مورد تابع‌های $f:]-\infty,a]\longrightarrow\mathbb{R}$ حکمفرماست. فرض کنید به‌ازای هر $A\in\mathbb{R}$، $A>a$، f روی $[a,A]$ انتگرال‌پذیر باشد و $\lim_{A\to\infty}\int_a^A f$ وجود داشته باشد. در این صورت می‌گوییم $\int_a^\infty f$ همگراست و قرار می‌دهیم:

$$\int_a^\infty = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f \qquad (۱)$$

نفی همگرایی، واگرایی خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $p>۰$ داده شده، همگرایی $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^p}dx$ را بررسی کنید. داریم:

شکل ۱

$$\int_۱^\infty \frac{۱}{x^p}dx = \begin{cases} \frac{۱}{-p+۱}(A^{-p+۱}-۱) & p\neq ۱ \\ \ln A & p=۱ \end{cases}$$

بنابراین $\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x^p}dx$ دقیقاً وقتی وجود دارد که $p > 1$. پس شرط لازم و کافی برای همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ این است که $p > 1$.

مثال ۲. برای $\alpha > 0$ داده شده، همگرایی $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ را بررسی می‌کنیم. این مثال نیز با محاسبهٔ سرراست قابل بررسی است:

$$\int_0^A e^{-\alpha x}dx = \frac{-1}{\alpha}(e^{-\alpha A} - 1)$$

برای هر $\alpha > 0$ حد بالا وجود دارد وقتی $A \to \infty$ و برابر $\frac{1}{\alpha}$ است.

مثال ۳. حال کنید $p > 1$ داده شده است. نشان می‌دهیم $\int_0^\infty e^{-x^p}dx$ همگراست. این نتیجه را نمی‌توان با محاسبهٔ مستقیم به‌دست آورد. زیرا مثلاً برای $p = 2$، تابع اولیهٔ e^{-x^2} برحسب تابع‌های شناخته شده قابل بیان نیست. ولی اگر $p > 1$، داریم $x^p \geq x$ برای $x \geq 1$ و $e^{-x^p} \leq e^{-x}$ برای $x \geq 1$، پس

$$\int_1^A e^{-x^p}dx \leq \int_1^A e^{-x}dx$$

چون $e^{-x^p} > 0$ کمیت سمت چپ نسبت به A صعودی است. از طرفی دیگر، طبق مثال قبل، حد طرف راست وجود دارد، پس حد سمت چپ نیز وجود دارد وقتی $A \longrightarrow \infty$، و $\int_1^\infty e^{-x^p}dx$ همگراست. افزودن مقدار ثابت $\int_0^1 e^{-x^p}dx$ نیز اثری بر همگرایی ندارد.

این روش مقایسه با انتگرال ناسرهٔ تابع‌های ساده یا شناخته شده حربهٔ اصلی بررسی همگرایی یا واگرایی انتگرال‌هاست و می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه کرد:

(۷–۲) آزمون مقایسه. فرض کنید تابع‌های نامنفی f و g روی $[a,\infty[$ داده شده‌اند که هر یک روی هر بازهٔ $[a,A]$ انتگرال‌پذیر است و فرض کنید $K > a$ وجود دارد که به‌ازای هر $x > K$ داریم $f(x) \leq g(x)$. در این صورت:

الف) اگر $\int_a^\infty g$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f$ نیز همگراست.

ب) اگر $\int_a^\infty f$ واگرا باشد، $\int_a^\infty g$ نیز واگراست.

تنها این توضیح اضافی در مورد آزمون بالا لازم است که مقایسهٔ $f(x) \leq g(x)$ فقط برای مقادیر x بزرگتر از یک مقدار ثابت K کافی است زیرا که $\int_a^K f$ و $\int_a^K g$ به هر حال وجود دارند و همگرایی $\int_a^\infty$ معادل همگرایی $\int_K^\infty$ می‌باشد.

(۷–۳) انتگرال ناسرهٔ نوع دوم: تابع بی‌کران در یک انتهای بازهٔ کراندار

در اینجا تابع‌های $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ یا $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که وقتی x به انتهای باز بازه نزدیک می‌شود، $f(x)$ به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند. مثلاً برای $p > 0$ داده شده اگر $f(x) = \frac{1}{x^p}$ را روی $]0,1]$ در نظر بگیریم، وقتی $x \to 0^+$، مقدار تابع بی‌کران بزرگ می‌شود. حالت $[a,b[$ را در نظر می‌گیریم، وضعیت $]a,b]$ کاملاً مشابه است. برای $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، f روی $[a+\varepsilon, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، می‌گوییم $\int_a^b f$ همگراست در صورتی که $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f$ وجود داشته باشد، و در این صورت قرار می‌دهیم:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f \qquad (۲)$$

نفی همگرایی مانند گذشته واگرایی خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $p > 0$ داده شده در همگرایی $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ بحث می‌کنیم. برای $\varepsilon > 0$ داریم:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \frac{1}{-p+1}(1 - \varepsilon^{-p+1}) & p \neq 1 \\ -\ln \varepsilon & p = 1 \end{cases}$$

وقتی $\varepsilon \to 0^+$، عبارت سمت راست در صورتی حد دارد که $p < 1$، بنابراین شرط لازم و کافی برای همگرایی $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ این است که $p < 1$.

مثال ۲. در مورد همگرایی $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}dx$ بحث می‌کنیم. توجه کنید که $\frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}$ در $]1,2]$ تعریف شده است و وقتی $x \to 1^+$، تابع بی‌کران می‌شود. برای $1 < x \leq 2$ داریم $x^2 < 4$ و از طرفی دیگر:

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) > 5(x-1)$$

پس برای $1 < x \leq 2$:

$$0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}} < \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

از طرفی دیگر

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

که طبق مثال قبل همگراست، پس انتگرال داده شده در مقایسه همگرا می‌باشد.

در مثال بالا از آزمون مقایسه‌ای کاملاً مشابه ۷—۲ استفاده کرده‌ایم که بیان و اثبات دقیق آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

وقتی بیش از یک ناسرگی در مورد یک انتگرال وجود داشته باشد، انتگرال را با انتخاب نقاط کمکی به صورت مجموع دو یا چند انتگرال می‌نویسیم و در صورتی که همهٔ انتگرال‌های دارای یک ناسرگی، همگرا باشند، انتگرال ناسره را همگرا می‌نامیم. با چند مثال به توضیح این مطلب می‌پردازیم:

مثال ۱. برای $p > 0$ داده شده، در مورد همگرایی $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$ بحث کنید.

در اینجا نقطهٔ کمکی $x = 1$ را انتخاب می‌کنیم و همگرایی دو انتگرال $\int_1^\infty$ و $\int_0^1$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که نقطهٔ خاص $x = 1$ اثری بر نتیجهٔ نهایی نخواهد داشت زیرا که اگر به جای $x = 1$، نقطهٔ $x = c \neq 0$ انتخاب شود، در مورد هر دو انتگرال ناسره، اختلاف در انتگرال معین $\int_1^c$ خواهد بود که به هر حال متناهی است. حال برای $p \leq 1$، $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ واگراست، پس $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$ واگراست، و نیز برای $p > 1$، $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ واگراست، پس برای هر $p > 0$، انتگرال $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$ واگراست.

مثال ۲. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ را بررسی می‌کنیم. با در نظر گرفتن نقطهٔ کمکی $x = 1$، وضعیت دو انتگرال $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ و $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای $x > 0$ داریم $x^3 + x > x^3$، پس $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ و چون $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ همگراست، در مقایسه $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ همگراست. از طرفی دیگر $x^3 + x > x$، پس $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ و چون $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ همگراست، $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ همگراست. بنابراین انتگرال $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dx$ همگرا می‌باشد.

مثال ۳. انتگرال $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در اینجا دو ناسرگی وجود دارد. یکی در انتهای چپ $[0,1]$ و دیگری در انتهای راست $[-1,0]$. بنابراین باید همگرایی دو انتگرال $\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx$ و $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx$ را بررسی کرد. این دو انتگرال هر دو واگرا هستند، پس $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ واگرا محسوب می‌شود.

شکل ۲

رهیافت دیگری در مورد مثال بالا به ذهن می‌رسد. اگر بازهٔ متقارن $]-\varepsilon,\varepsilon[$، $0<\varepsilon<1$، را حول 0 حذف کنیم،به سبب تقارن داریم:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx=0$$

حال اگر $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ را حد مجموع $\int_{-1}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{1}$ فرض کنیم وقتی $\varepsilon\to 0^{+}$ این حد صفر است، یعنی به اعتباری باید $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ را همگرا و برابر صفر تلقی کرد. فرض کنید به جای گرفتن یک بازهٔ متقارن حول 0، یک بازه $]-\varepsilon_1,\varepsilon_2[$ در نظر گرفته شود که $\varepsilon_1>0$، $\varepsilon_2>0$ و دو عدد $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ را به صفر میل دهیم. داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{1}{x}dx &= \ln(-x)|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\ln x|_{\varepsilon_2}^{1}\\ &= \ln(\tfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})\end{aligned}$$

حال وقتی $\varepsilon_1\to 0^{+}$ و $\varepsilon_2\to 0^{+}$، حد بالا به طور کلی وجود ندارد، بلکه به نسبت $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ وابسته است. مثلاً وقتی $\varepsilon_1=(\varepsilon_2)^2$، $\ln(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})$ به $-\infty$ میل می‌کند، وقتی $\varepsilon_1=\varepsilon_2$، حد صفر است، و وقتی $\varepsilon_1=\sqrt{\varepsilon_2}$، عبارت $\ln(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})$ به $+\infty$ میل می‌کند. اگر عدد حقیقی r داده شده باشد و بگیریم $\varepsilon_1=e^{r}\varepsilon_2$، حد $\ln(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})$ برابر r خواهد شد. پس بسته به این که بازهٔ منقبض شونده حول 0 چگونه اختیار شود، می‌توان عبارت $\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{1}{x}dx$ را به هر عددی میل داد! برای بعضی کاربردها باید یک بازهٔ متقارن یا بازه‌ای به شکل خاص حول نقطهٔ ناسرگی در نظر گرفت که در این صورت حد خاصی مورد نظر است. این حد خاص را که ویژگی مسأله تحمیل می‌کند مقدار اصلی (کوشی) می‌نامند.

(۴−۷) تابع Γ (گاما). تابعی با دامنهٔ اعداد حقیقی مثبت می‌سازیم که به ازای مقادیر عدد صحیح مقدارهای $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ را می‌گیرد. به عنوان انگیزه، انتگرال زیر را به‌ازای عدد صحیح نامنفی دادهٔ شدهٔ n در نظر بگیرید:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt \tag{3}$$

این یک انتگرال ناسره از نوع اول است. از آنجا که $\lim_{x\to\infty} \frac{t^n}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$ ، برای t به اندازهٔ کافی بزرگ داریم $t^n < e^{\frac{t}{2}}$، پس $t^n e^{-t} < e^{-\frac{t}{2}}$ برای t بزرگ و چون $\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt$ همگراست، (۳) همگرا می‌باشد. می‌توان به روش انتگرال جزء به جزء مقدار (۳) را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}\int_0^A t^n e^{-t} dt &= -t^n e^{-t}|_0^A + \int_0^A n t^{n-1} t^{-t} dt \\ &= -\frac{A^n}{e^A} + n\int_0^A t^{n-1} e^{-t} dt\end{aligned}$$

چون $\lim_{A\to\infty} \frac{A^n}{e^A} = 0$، داریم:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

با ادامهٔ استفاده از انتگرال جزء به جزء نتیجه می‌شود که:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! \int_0^\infty e^{-t} dt = n! \tag{4}$$

با الهام از این فرمول تابع گاما $\Gamma :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{5}$$

وقتی $x \geq 1$ فقط یک ناسرگی از نوع اول وجود دارد و مشابه آنچه در بالا دیدیم، انتگرال ناسره همگراست. برای $0 < x < 1$، انتگرال $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ نیز ناسرگی نوع دوم را دارد که در اینجا:

$$\frac{e^{-t}}{t^{1-x}} < \frac{1}{t^{1-x}}$$

چون $0 < 1 - x < 1$، $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ و در نتیجه انتگرال مورد نظر همگراست. پس $\Gamma(x)$ به‌ازای هر $x > 0$ تعریف شده است. با روش انتگرال جزء به جزء مانند محاسبهٔ بالا داریم:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{6}$$

از آنجا که $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$، نتیجه می‌شود که:

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{7}$$

می‌توان بعضی مقادیر دیگر Γ را نیز محاسبه کرد. مثلاً

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$$

با تعویض متغیر $t = u^2$ داریم:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

در بررسی انتگرال‌های دو متغیری ثابت خواهیم کرد که $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، پس $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
نمودار تابع Γ به صورت شکل ۳ است.

شکل ۳