محاسبهٔ تقریبی انتگرال

در محاسبات علمی به ندرت انتگرال معین از روش‌های یافتن تابع اولیه محاسبه می‌شود هر چند که این روش‌ها ممکن است برای یافتن فرمول‌های مناسب مفید واقع شوند. دو دلیل ساده برای این امر وجود دارد، یکی اینکه بسیاری تابع‌های اولیه را نمی‌توان برحسب تابع‌های شناخته شده بیان کرد و دوم اینکه حتی در صورت دست یافتن به یک عبارت شناخته شده مانند $\sqrt[5]{\tan^{-۱}(\sqrt{۲}+x)+۳x^۲}$، این عبارت خود بدون تقریب قابل استفاده نیست. خوشبختانه روش‌های بسیار مؤثر و عملی برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال معین وجود دارد که به دقت مورد نیاز قابل بهره‌گیری هستند و نرم‌افزارهای متعددی نیز به این منظور فراهم شده است. روش‌های تقریب بر دو رکن اصلی تکیه دارند:

الف) افراز بازهٔ انتگرال‌گیری به زیربازه‌های کوچکتر.

ب) جایگزینی تابع روی هر بازهٔ کوچکتر با یک تابع که انتگرال آن به سادگی قابل محاسبه است، مانند یک تابع ثابت یا یک چندجمله‌ای.

روشن است که این ایده رابطهٔ نزدیکی با خود تعریف انتگرال (معین) دارد. در زیر چند روش تقریب را معرفی می‌کنیم.

(۶–۱) تقریب چپ و تقریب راست

برای $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$، بازهٔ $[a,b]$ را به n زیربازه با طول مساوی تقسیم می‌کنیم:

$$a=a_۰<a_۱<a_۲<\cdots<a_n \quad , \quad a_i=a+i\frac{b-a}{n}$$

و قرار می‌دهیم:

$$\text{تقریب چپ}: L(n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})f(a_{i-1}) = \frac{b-a}{n}(f(a_0) + \cdots + f(a_{n-1}))$$

$$\text{تقریب راست}: R(n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})f(a_i) = \frac{b-a}{n}(f(a_1) + \cdots + f(a_n))$$

بدین ترتیب وقتی $f > 0$، $L(n)$ و $R(n)$ هر دو تقریب $\int_a^b f$ با مجموعی از مساحت‌های مستطیل شکل هستند، که برای $L(n)$ بلندی هر مستطیل به اندازهٔ مقدار f در انتهای چپ زیربازه و برای $R(n)$ بلندی هر مستطیل به اندازهٔ مقدار f در انتهای راست زیربازه است.

(۶–۲) تقریب نقطهٔ میانی

در افراز بالا، اگر به جای استفاده از نقاط چپ یا راست از نقطهٔ میانی هر زیربازه استفاده کنیم، حاصل را تقریب میانی، می‌نامیم:

$$M(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{a_{i-1} + a_i}{2})$$

تقریب میانی نیز در حالت $f > 0$، مجموع مساحت‌های n مستطیل است، اگر از نقطهٔ $(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, f(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}))$ خط راستی رسم شود، نقاط تقاطع این خط را خطوط قائم $x = a_{i-1}$ و $x = a_i$،

شکل ۱

همراه با دو نقطهٔ a_{i-1} و a_i روی محور x یک ذوزنقه ایجاد می‌کنند که مساحت آن برابر مساحت مستطیل بنا شده به ارتفاع $f(\frac{a_{i-1}+a_i}{2})$ است. بالاخص وقتی f مشتق‌پذیر باشد، می‌توان از خط مماس بر نمودار تابع به‌ازای نقطهٔ میانی $x = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$ استفاده کرد (شکل ۱).

در نگاه اول به نظر نمی‌آید میان سه مقدار $L(n)$، $R(n)$ و $M(n)$، هیچیک به عنوان تقریب ارجحیتی بر دوتای دیگر داشته باشد، یکی نقطهٔ چپ بازه را در نظر می‌گیرد، دومی نقطهٔ میانی و سومی نقطهٔ سمت راست را. برای یک "تابع کاملاً تصادفی" نباید تمایزی میان این سه نقطه به عنوان "نقطهٔ نوعی" دامنهٔ تابع وجود داشته باشد، ولی تابع‌هایی که در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرند کاملاً هم تصادفی نیستند. بالاخص اگر تابع مشتق‌پذیر باشد، خط مماس بر یک نقطهٔ نمودار در فاصله‌ای کوچک تقریبی خوب از تابع به‌دست می‌دهد. اگر نقطهٔ تماس نقطهٔ متناظر با نقطهٔ میانی روی نمودار

گرفته شود، میزان انحراف تابع در دو نقطهٔ انتهایی از تقریب خطی، معمولاً کوچکتر از انحراف تابع از مقدارهای ثابت $f(a_{i-۱})$ یا $f(a_i)$ است. بدین ترتیب این انتظار شهودی می‌تواند وجود داشته باشد که برای تابع‌های مشتق‌پذیر، $M(n)$ معمولاً تقریبی بهتر از $L(n)$ یا $R(n)$ باشد. بعداً به طور دقیق‌تر به این مطلب خواهیم پرداخت.

(۶—۳) تقریب ذوزنقه

در این روش مجموع مساحت‌های ذوزنقه‌هایی را که رئوس آنها در نقاط $(x_{i-۱}, ۰)$، $(x_i, ۰)$، $(x_{i-۱}, f(x_{i-۱}))$ و $(x_i, f(x_i))$ هستند به عنوان تقریب مساحت زیر نمودار در نظر گرفته می‌شود:

$$T(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۲}(f(x_{i-۱}) + f(x_i))$$

اکنون به بررسی دقت تقریب‌های $L(n)$، $R(n)$، $M(n)$ و $T(n)$ برای $\int_a^b f$ می‌پردازیم و در مورد حدود خطا در هر مورد تخمین‌هایی ارائه خواهیم کرد.

(۶—۴) تخمین خطای $L(n)$ و $R(n)$

خطای $L(n)$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظات مشابهی در مورد $R(n)$ برقرار است. علی‌الاصول میزان انحراف $L(n)$ از $\int_a^b f$ به انحراف تابع f از مقدار ثابت $f(a)$ بستگی دارد. اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، $|f'|$ نمایانگر انحراف تابع از مقدار ثابت است، بنابراین باید انتظار داشت خطای این تقریب به اندازهٔ $|f'|$ وابسته باشد. خطای تقریب، E، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E = \int_a^b f - L(n)$$

پس

$$E = \sum_{i=۱}^{n} \left(\int_{x_{i-۱}}^{x_i} f - (x_i - x_{i-۱}) f(x_{i-۱})\right)$$

اگر تابع f را پیوسته فرض کنیم، طبق قضیه میانگین انتگرال داریم $\int_{x_{i-۱}}^{x_i} f = (x_i - x_{i-۱}) f(x^*_{i-۱})$ برای نقطهٔ مناسبی $x^*_{i-۱}$ در بازهٔ $[x_{i-۱}, x_i]$. بنابراین

$$E = \sum_{i=۱}^{n} ((x_i - x_{i-۱})(f(x^*_{i-۱}) - f(x_{i-۱})))$$

حال مضافاً فرض کنید تابع f مشتق‌پذیر است. در این صورت طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای c_{i-1} بین x_{i-1} و x^*_{i-1} وجود دارد که

$$f(x^*_{i-1}) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f'(c_{i-1})$$

بنابراین

$$E = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 f'(c_{i-1})$$

می‌نویسیم $h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$، پس

$$E = h^2 \sum_{i=1}^{n} f'(c_{i-1})$$

فرض کنید M یک کران بالایی برای $|f'|$ در بازهٔ $[a,b]$ باشد، در این صورت از که $h \cdot n = b - a$، داریم:

$$|E| \le h \cdot (b-a) \cdot M \tag{۱}$$

طرف راست این تقریب خطا کاملاً گویا است. خطا به سه عامل زیر بستگی دارد: کران بالایی قدرمطلق مشتق که میزان تغییر تابع را نمایش می‌دهد، طول بازه، و طول زیربازه‌های افراز برای بازهٔ ثابت $[a,b]$ و تابع داده شدهٔ f (بنابراین M ثابت). هر چه افراز ظریف‌تر باشد، یعنی h کوچکتر، خطا کوچکتر است. مثلاً برای اینکه تقریب یک رقم اضافی اعشار دقیق‌تر شود، لازم است معمولاً افراز را ۱۰ برابر ظریف‌تر کنیم.

(۵–۶) تخمین خطای $M(n)$ و $T(n)$

در اینجا فرض می‌کنیم تابع f دو بار مشتق‌پذیر است. ادعا می‌کنیم:

$$M(n) \le \int_a^b f \le T(n) \qquad \text{اگر } f'' > 0 \text{ در سراسر } [a,b] \tag{۲}$$

$$T(n) \le \int_a^b f \le M(n) \qquad \text{اگر } f'' > 0 \text{ در سراسر } [a,b] \tag{۳}$$

شکل ۲

در واقع برای یک تابع محدب ($f'' > 0$) خط مماس در هر نقطه زیر نمودار تابع قرار می‌گیرد، پس $M(n) < \int_a^b f$ و خط واصل بین هر دو نقطهٔ نمودار بالاتر از نمودار واقع می‌شود عکس این مطلب در مورد تابع‌های مقعر ($f'' < 0$) برقرار است. برای تابع‌های مستوی ($f'' = 0$)، $M(n)$ و $T(n)$ هر دو برابر $\int_a^b$ خواهد بود. اگر خطای تقریب ذوزنقه و تقریب نقطهٔ میانی را به ترتیب به E_T و E_M نمایش دهیم، یعنی $E_T = \int_a^b f - T(n)$ و $E_M = \int_a^b f - M(n)$، می‌توان ثابت کرد که:

$$|E_T| \leq \frac{1}{12}h^2 \cdot (b-a) \cdot M \tag{۴}$$

$$|E_M| \leq \frac{1}{24}h^2 \cdot (b-a) \cdot M \tag{۵}$$

که در اینجا M یک کران بالایی برای قدرمطلق مشتق دوم، f''، در بازهٔ $[a,b]$ است. در مقایسه با (۱) به دو تفاوت زیر برمی‌خوریم:

- خطای $L(n)$ و $R(n)$ به اندازهٔ مشتق اول، یعنی میزان رشد تابع، وابسته است، ولی خطای $T(n)$ و $M(n)$ به مشتق دوم تابع، یعنی میزان خمیدگی نمودار، وابسته می‌باشد.

- مقایسه h^2 در فرمول‌های E_T و E_M با h در (۱) نشان می‌دهد که تظریف اثر مضاعفی بر دقت $T(n)$ و $M(n)$ دارد. در مورد $T(n)$ و $M(n)$ با ازدیاد ده برابر نقاط تقسیم، دقت تقریب تا دو رقم اعشار دقیق‌تر می‌شود زیرا که h^2 در $\frac{1}{100}$ ضرب می‌شود. بدین ترتیب می‌توان انتظار داشت که برای تابع‌های دو بار مشتق‌پذیر با $T(n)$ و $M(n)$ معمولاً تقریب‌های بهتری از $L(n)$ و $R(n)$ به‌دست دهند.

نکتهٔ دیگری که در (۴) و (۵) مشاهده می‌شود این است که به نظر می‌آید نوعاً دقت $M(n)$ دو برابر دقت $T(n)$ باشد. در واقع می‌توان دلیلی شهودی برای این امر ارائه کرد. اگر روی هر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ شکل نمودار را تقریباً سهمی فرض کنیم، با محاسبهٔ سرراست دیده می‌شود که

$|E_T| = ۲|E_M|$ (تمرین) ضمناً همچنان که در رابطه با جهت تقعر مشاهده کردیم علامت E_T و E_M مخالف یکدیگر است، از این دو مطلب روش دقیق‌تری را برای تقریب انتگرال به ذهن می‌رسد. مجموع $۲M(n) + T(n)$ از یک سو باید حدوداً سه برابر $\int_a^b f$ باشد، ولی با توجه به این که علامت خطای $T(n)$ و $M(n)$ مخالف و قدرمطلق خطای $M(n)$ حدوداً نصف قدرمطلق خطای $T(n)$ است، باید خطای $۲M(n) + T(n)$ کوچک باشد. بنابراین تقریب زیر:

$$S(n) = \frac{۱}{۳}(۲M(n) + T(n)) \qquad \text{تقریب سیمسن}$$

تقریب مناسبی به نظر می‌رسد. در واقع محاسبهٔ سرراست نشان می‌دهد که برای مجموعهٔ سهمی‌های گذرا از سه نقطهٔ $(x_{i-۱}, f(x_{i-۱}))$، $(\frac{۱}{۲}(x_{i-۱} + x_i), f(\frac{۱}{۲}(x_{i-۱} + x_i)))$ ، و $(x_i, f(x_i))$، برای $i = ۱, \ldots, n$، دقیقاً $S(n)$ حاصل می‌شود.

روش سیمسن معمولاً تقریب بسیار خوبی از مقدار انتگرال معین ارائه می‌کند. می‌توان ثابت کرد که اگر تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ چهار بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تخمین زیر برای خطای روش سیمسن، E_S، برقرار است:

$$|E_S| \leq \frac{۱}{۱۸۰} h^۴ \cdot (b - a) \cdot M \qquad (۶)$$

که در آن M یک کران بالایی برای قدرمطلق مشتق چهارم f است. بدین ترتیب برای چندجمله‌ای‌های از درجه ۳ و پایین‌تر، که مشتق چهارم آنها صفر است، روش سیمسن مقدار انتگرال را با دقت کامل ارائه می‌کند. با توجه به اینکه در این روش از سهمی‌ها برای تقریب استفاده کردیم، موضوع برای تابع‌های تا درجهٔ ۲ بدیهی است. اینکه برای تابع‌های درجه سه نیز، $E_S = ۰$، در نگاه اول واضح نیست ولی موضوع را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم بدون استفاده از (۶) نیز تحقیق کرد (تمرین). بالاخره توجه کنید که اثر ضریب $h^۴$ در (۶) این است که تظریف ده‌گانه موجب می‌شود که تقریب سیمسن حدوداً چهار رقم اعشار دقیق‌تر شود که این نیز مؤید دقت برتر این روش است.