انتگرال توابع گویا

در این جلسه نشان می‌دهیم که برای هر تابع گویا، یعنی تابعی که مقدار آن به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$، P، Q چندجمله‌ای باشد، می‌توان تابع اولیه‌ای برحسب توابع مأنوس پیدا کرد. به طور دقیق تابع اولیه آمیزه‌ای از توابع گویا، لگاریتم، توابع مثلثاتی و $\tan^{-1}$ خواهد بود. این که به انواع توابع فوق‌الذکر نیاز خواهد بود از مثال‌های زیر روشن است:

$$\int x^n dx = \begin{cases} \ln|x| & n = -1 \\ \frac{1}{n+1}x^{n+1} & n \neq -1 \end{cases} \qquad \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int \cos^{2n-2}\theta d\theta$$

که انتگرال سمت راست با جایگزین کردن $x = \tan\theta$ به‌دست آمده است. برای $n = 1$ جواب $\tan^{-1} x$ به‌دست می‌آید و برای $n > 1$ مخلوطی از تابع‌های مثلثاتی و $\tan^{-1}$ حاصل می‌شود. خواهیم دید که نوع دیگری تابع برای محاسبهٔ تابع اولیهٔ عبارت‌های گویا مورد نیاز نیست.

بدین ترتیب فرض کنید عبارت گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ داده شده است. در زیر به طور گام به گام دستور رسیدن به تابع اولیهٔ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را ارائه می‌کنیم.

گام اول. اگر درجهٔ $P(x)$ از درجهٔ $Q(x)$ کوچکتر باشد به گام دوم می‌رویم. در غیر این صورت چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم می‌کنیم:

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x) \tag{1}$$

که در اینجا $A(x)$ و $R(x)$ چندجمله‌ای هستند و درجهٔ $R(x)$ از درجهٔ $Q(x)$ اکیداً کوچکتر است. اگر $P(x)$ بر $Q(x)$ قابل تقسیم باشد که $R(x) = 0$ و $\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x)$، یعنی خارج قسمت خود یک

چندجمله‌ای است، مثلاً $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ که در این صورت

$$\int A(x)dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}$$

اگر $R(x) \neq 0$، به گام دوم می‌رویم.

گام دوم. اکنون محاسبهٔ انتگرال نسبت دو چندجمله‌ای $\frac{R(x)}{Q(x)}$ را بررسی می‌کنیم که در آن درجهٔ $R(x)$ از درجهٔ $Q(x)$ اکیداً کوچکتر است ولی $R(x) \neq 0$. برای این کار، توجه به چند واقعیت علم جبر ضروری است.

واقعیت جبری ۱ (قضیهٔ اساسی جبر). برای هر چندجمله‌ای $Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ با ضرایب مختلط c_i، که $c_n \neq 0$، اعداد مختلط α_1، ... ، α_n وجود دارند که:

$$Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = c_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) \qquad (۲)$$

بدین ترتیب $Q(x) = 0$ دارای n ریشهٔ مختلط α_i (احتمالاً بعضی برابر) است. توجه کنید که این یک حکم صرفاً جبری است و روشی برای تجزیهٔ (۲) ارائه نمی‌کند. در واقع هر چند که برای یافتن ریشه‌های $Q(x) = 0$ روش‌های تقریبی بسیار مؤثر وجود دارد، لکن نمی‌توان انتظار داشت که ریشه‌های α_i به سادگی بیان شدنی باشند. در واقع از نظریهٔ گالوا نتیجه می‌شود که برای $n \geq 5$ ریشه‌های فوق را به طور کلی نمی‌توان با چهار عمل اصلی و استخراج ریشه برحسب $c_0, c_1, \ldots, c_n$ بیان کرد، یعنی فرمولی جبری مانند فرمول حل معادلهٔ درجهٔ ۲ یا فرمول کاردانو (برای معادلات درجه ۳) برای معادلات درجه ۵ به بالا وجود ندارد.

واقعیت جبری ۲. برای چندجمله‌ای $Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$، $c_n \neq 0$، اگر همه ضرایب c_i حقیقی باشند، یک تجزیهٔ $Q(x)$ به عوامل درجهٔ ۱ و درجه ۲ وجود دارد:

$$Q(x) = c_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k)(x^2 + a_1 x + b_1) \cdots (x^2 + a_l x + b_l) \qquad (۳)$$

که در آن $\alpha_۱,\dots,\alpha_k$ ریشه‌های حقیقی $Q(x)=۰$ هستند، a_i ها و b_i ها حقیقی‌اند و $\Delta_i=a_i^۲-۴b_i<۰$ برای $i=۱,\dots,l$.

بدین ترتیب $n=k+۲l$ و ریشه‌های غیرحقیقی $Q(x)=۰$ همه ریشه‌های چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم $x^۲+a_ix+b_i=۰$ هستند. این مطلب به سادگی از واقعیت جبری ۱ نتیجه می‌شود. نکتهٔ اصلی این است که اگر عدد مختلط α ریشهٔ $Q(x)=۰$ (با ضرایب حقیقی) باشد، آنگاه مزدوج α، یعنی $\overline{\alpha}$، نیز ریشهٔ $Q(x)=۰$ است زیرا که اگر

$$c_۰+c_۱\alpha+\cdots+c_n\alpha^n=۰$$

با گرفتن مزدوج و با توجه به حقیقی بودن ضرایب، یعنی $c_i=\overline{c_i}$، داریم:

$$c_۰+c_۱\overline{\alpha}+\cdots+c_n\overline{\alpha}^n=۰$$

بنابراین در تجزیهٔ (۲)، وقتی c_i ها حقیقی باشند، به‌ازای هر فاکتور $x-\alpha$، α غیرحقیقی، فاکتور $x-\overline{\alpha}$ نیز وجود دارد و داریم:

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^۲-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$$

حال $\alpha+\overline{\alpha}=۲Re(\alpha)$ و $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^۲$ حقیقی هستند، پس حاصل‌ضرب $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ به یک عبارت درجه دوم با مبین منفی تبدیل می‌شود.

بالاخره از آنجا که ممکن است ریشه‌های تکراری (معادلاً فاکتورهای تکراری) در تجزیهٔ (۳) وجود داشته باشد، (۳) را به صورت نهایی زیر می‌نویسیم:

$$Q(x)=c_n(x-\beta_۱)^{\rho_۱}\cdots(x-\beta_r)^{\rho_r}(x^۲+A_۱x+B_۱)^{\sigma_۱}\cdots(x^۲+A_sx+B_s)^{\sigma_s} \qquad (۴)$$

که در آن β_i ها متمایز و نیز عبارت‌های درجه دوم متمایز هستند، $\rho_i\geq ۱$ و $\sigma_i\geq ۱$ اعداد صحیح هستند.

اکنون با توجه به تجزیهٔ (۴) می‌توان واقعیت جبری بعدی را بیان کرد:

واقعیت جبری ۳. عبارت گویای $\frac{R(x)}{Q(x)}$ که در آن $R(x) \neq 0$ و درجهٔ $R(x)$ اکیداً کوچکتر از درجهٔ $Q(x)$ است می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = (\frac{1}{c_n})\{\frac{R_1(x)}{Q_1(x)} + \cdots + \frac{R_N(x)}{Q_N(x)}\} \tag{۵}$$

که در آن $\frac{R_i(x)}{Q_i(x)}$ ها، موسوم به کسرهای جزیی، به طریق زیر به‌دست می‌آیند:

الف) به‌ازای هر $(x-\beta)^\rho$ در (۴)، یک مجموع کسرهای جزیی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{c_1}{x-\beta} + \frac{c_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{c_\rho}{(x-\beta)^\rho} \tag{۶}$$

ب) به‌ازای هر $(x^2+Ax+B)^\sigma$ یک مجموع کسرهای جزیی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{D_1x+E_1}{x^2+Ax+B} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+Ax+B)^2} + \cdots + \frac{D_\sigma x+E_\sigma}{(x^2+Ax+B)^\sigma} \tag{۷}$$

جمع‌بندی گام دوم این است که کسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$، $R(x) \neq 0$، درجهٔ $R(x)$ اکیداً کوچکتر از درجهٔ $Q(x)$، را به صورت مجموعی از کسرهای جزیی به صورت (۶) و (۷) می‌نویسیم.

گام سوم (انتگرال‌گیری کسرهای جزیی). با توجه به این که $\frac{R(x)}{Q(x)}$ به صورت مجموعی از کسرهای جزیی در می‌آید، کافی است روشی برای محاسبهٔ تابع اولیهٔ هر کسر جزیی ارائه کنیم که چنین خواهیم کرد.

الف) برای کسرهای جزیی که در (۶) ظاهر می‌شوند:

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^i}dx = \begin{cases} \ln|x-\beta| & i=1 \\ \frac{1}{-i+1}(x-\beta)^{-i+1} & i>1 \end{cases}$$

ب) با توجه به این که مبین هر عبارت درجهٔ دوم x^2+Ax+B در (۷) منفی است، می‌دانیم با تکمیل مجذور و تعویض متغیر، هر یک از کسرهای جزیی (۷) به صورت مجموعی از عبارت‌های زیر در می‌آید:

$$c\frac{2t}{(t^2+1)^j} \quad \text{یا} \quad \frac{c'}{(t^2+1)^j}$$

که در آن c و c' ثابت‌های مناسب هستند و $dt = dx$. محاسبهٔ تابع اولیهٔ این عبارت‌ها ساده است:

$$\int \frac{2t}{(t^2+1)^j}dx = \begin{cases} \ln(t^2+1) & j = 1 \\ \frac{1}{-j+1}(t^2+1)^{-j+1} & j > 1 \end{cases}$$

بالاخره برای $\frac{1}{(t^2+1)^j}$، اگر $j = 1$ که از $\tan^{-1} t$ استفاده می‌کنیم، و اگر $j > 1$، با جایگزینی $t = \tan\theta$ و $dt = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$، یک انتگرال برحسب توانی از $\cos\theta$ به‌دست می‌آید که می‌توانیم محاسبه کنیم.

روش بالا را با ذکر چند مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. می‌خواهیم تابع اولیهٔ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-x^7+x^5-x^4+x+1}{x^6+x^4+x^2}$ را محاسبه کنیم. با تقسیم داریم:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = -x + \frac{2x^5 - x^4 + x^3 + x + 1}{x^6 + x^4 + x^2}$$

حال

$$\begin{aligned} x^6 + x^4 + x^2 &= x^2(x^4 + x^2 + 1) \\ &= x^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

که دو عبارت درجه دوم بالا هر دو مبین منفی دارند. بنابراین طبق روش کسرهای جزیی داریم:

$$\frac{2x^5 - x^4 + x^3 + x + 1}{x^6 + x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 - x + 1}$$

راه کلی به‌دست آوردن ضرایب طرف راست این است که از طرف راست مخرج مشترک بگیریم و ضرایب به‌دست آمده برای صورت کسر را برابر ضرایب متناظر در طرف چپ قرار دهیم: در این صورت شش معادله شش مجهولی با جواب منحصر به فرد به‌دست خواهد آمد (در واقع اینکه در حالت کلی همواره n معادلهٔ n مجهولی با جواب منحصر به فرد به‌دست می‌آید توجیه روش تجزیه به کسرهای جزیی است. این اثبات که در اینجا نخواهد آمد دشوار نیست ولی کمی وقت‌گیر است). در حالت موجود داریم

$$\begin{aligned} &\frac{2x^5 - x^4 + x^3 + x + 1}{x^6 + x^4 + x^2} \\ &= \frac{(A+C+E)x^5 + (B-D+F)x^4 + (A-C+E)x^3 + (B+D+F)x^2 + Ax + B}{x^6 + x^4 + x^2} \end{aligned}$$

چون این تساوی به‌ازای هر x برقرار است باید ضرایب متناظر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} B = ۱ \\ A = ۱ \\ B + D + F = ۰ \\ A - C + E = ۱ \\ B - D + F = -۱ \\ A + C + E = ۲ \end{cases}$$

این دستگاه را می‌توان به سادگی حل کرد و نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$A = ۱ \ , \ B = ۱ \ , \ C = \frac{۱}{۲} \ , \ D = \frac{۱}{۲} \ , \ E = \frac{۱}{۲} \ , \ F = -\frac{۱}{۲}$$

پس باید انتگرال عبارت‌های زیر را محاسبه کرد:

$$\frac{۱}{x} \ , \ \frac{۱}{x^۲} \ , \ (\frac{۱}{۲})\frac{x + ۱}{x^۲ + x + ۱} \ , \ (\frac{۱}{۲})\frac{x - ۱}{x^۲ - x + ۱}$$

تابع اولیهٔ $\frac{x+۱}{x^۲+x+۱}$ را به عنوان نمونه محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{x + ۱}{x^۲ + x + ۱} &= (\frac{۱}{۲})\frac{(۲x + ۱) + ۱}{x^۲ + x + ۱} \\ &= (\frac{۱}{۲})\frac{۲x + ۱}{x^۲ + x + ۱} + (\frac{۱}{۲})\frac{۱}{(x + \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}} \\ &= (\frac{۱}{۲})\frac{۲x + ۱}{x^۲ + x + ۱} + (\frac{۲}{۳})\frac{۱}{(\frac{۲x}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲ + ۱} \end{aligned}$$

انتگرال عبارت اول سمت راست برابر $\frac{۱}{۲}\ln(x^۲ + x + ۱)$ است و انتگرال عبارت سمت راست برابر $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}})$ می‌باشد.

مثال ۲. گاهی اوقات روش‌های ساده‌تری برای تجزیه به کسرهای ساده وجود دارد. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^۲ + ۱}{x^۳ + x^۲}$$

طبق روش کسرهای جزیی داریم:

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \tag{۸}$$

اگر دو طرف را در $(x+1)$ ضرب کنیم داریم:

$$\frac{x^2+1}{x^2} = A + B\frac{x+1}{x} + C\frac{x+1}{x^2}$$

در طرف راست اگر x به (-1) میل داده شود ضریب A حاصل می‌شود، پس:

$$A = \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 2$$

با جایگزینی این مقدار در (۸) نتیجه می‌شود که

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

پس

$$\frac{-x^2+1}{x^3+x^2} = \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \tag{۹}$$

حال اگر دو طرف را در x^2 ضرب کنیم و $\lim_{x\to 0}$ را محاسبه کنیم، مقدار C حاصل می‌شود:

$$C = \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x+1} = 1$$

بالاخره با جایگزینی در (۹) داریم:

$$\frac{-x^2-x}{x^3+x^2} = \frac{B}{x}$$

که نتیجه می‌دهد $B=-1$.

یک سؤال اساسی. مثال‌های بالا طوری انتخاب شده بودند که فاکتورگیری مخرج‌ها ساده بود. همان طور که اشاره شد اگر درجهٔ مخرج ۵ یا بزرگتر باشد، ممکن است تجزیه به روش جبری میسر نباشد هر چند که یافتن ریشه‌های مخرج به هر درجهٔ دقت عملی است. حتی فرای این وضعیت، می‌توان به

طور کلی این سؤال را مطرح کرد که اگر تابعی را با یک تابع "نزدیک" جایگزین کنیم، آیا نتیجهٔ انتگرال‌گیری نیز نزدیک به تابع اولیه تابع اصلی خواهد بود؟ به این کلیت سؤال دقیق نیست زیرا که با افزودن یک مقدار ثابت به یک تابع اولیه می‌توان آن را از مقدار اولیه‌اش به دلخواه دور ساخت. سؤال دقیق‌تر، و از نظر کاربرد با اهمیت‌تر، این است که مثلاً اگر دو تابع انتگرال‌پذیر f و g روی بازهٔ $[a,b]$ به هم "نزدیک" باشند، یعنی مثلاً عددی $e > 0$ وجود داشته باشد که

$$|f(x) - g(x)| \leq e \quad \text{برای هر } x \text{ در } [a,b]$$

در این صورت در مورد اندازهٔ $|\int_a^b f - \int_a^b g|$ چه می‌توان گفت؟ داریم $\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$ پس از

$$-e \leq f(x) - g(x) \leq e \quad \text{برای هر } x \text{ در } [a,b]$$

نتیجه می‌گیریم که

$$(b-a)(-e) \leq \int_a^b (f-g) \leq (b-a)e$$

یا

$$|\int_a^b (f-g)| \leq (b-a)e$$

بدین ترتیب اندازهٔ خطای انتگرال‌گیری، یعنی $(b-a)e$ را می‌توان با نزدیکترین دو تابع، یعنی اندازهٔ e، کنترل کرد.