قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

بحث این جلسه پیرامون قضیه‌ای است که پل ارتباطی میان حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال محسوب می‌شود و "قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال" نام دارد. در جلسه گذشته دیدیم که هر تابع پیوسته انتگرال‌پذیر است. گزاره زیر در مورد انتگرال تابع‌های پیوسته مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

(۳−۱) قضیه میانگین انتگرال. اگر $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته باشد نقطه‌ای c در $[a,b]$ وجود دارد که

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

بدین ترتیب در حالتی که $\int_a^b f > 0$، نقطه‌ای c وجود دارد که مساحت مستطیل به قاعدهٔ $[a,b]$ و ارتفاع $f(c)$ برابر $\int_a^b f$ است.

اثبات. تابع پیوستهٔ f در نقطه‌ای c_1 مینیمم و در نقطه‌ای c_2 ماکسیمم مقادیر خود در $[a,b]$ را می‌گیرد. داریم

$$m \le f(x) \le M$$

که در آن M و m به ترتیب مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم f هستند. اگر M و m را به عنوان تابع‌های ثابت با مقدار M و m در نظر بگیریم، داریم:

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

یا

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$$

تابع f در نقطهٔ c_1 مقدار m و در نقطهٔ c_2 مقدار M را می‌گیرد. طبق قضیهٔ مقدار بینی، تابع پیوسته f در نقطه‌ای c بین c_1 و c_2 مقدار $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ را می‌گیرد:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

که حکم قضیه است. $\square$

(۳—۲) قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته. نقطه‌ای a در I در نظر می‌گیریم و $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $F(x) = \int_a^x f$ تعریف می‌کنیم. در این صورت F مشتق‌پذیر است و $F' = f$.

اثبات. حد عبارت $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ را بررسی می‌کنیم وقتی $h \longrightarrow 0$. داریم:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{a+h} f - \int_a^x f \\ &= \int_x^{x+h} f \end{aligned}$$

طبق ۳—۱، نقطه‌ای c بین x و $x+h$ وجود دارد که $\int_x^{x+h} f = f(c)h$. پس

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c)$$

حال وقتی $h \longrightarrow 0$، نقطهٔ c که بین x و $x+h$ قرار دارد به x میل می‌کند و چون f در x پیوسته است، $f(c)$ به $f(x)$ میل می‌کند. $\square$

تابعی F که مشتق آن برابر تابع داده شدهٔ f باشد، یک تابع اولیهٔ f یا یک تابع انتگرال نامعین f خوانده می‌شود. قضیهٔ بالا یک تابع اولیه برای تابع پیوستهٔ f معرفی می‌کند. اگر $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اولیهٔ دیگر برای f باشد، مشتق $G - F$ صفر است، بنابراین $G - F$ روی بازهٔ I ثابت است. بالاخص

اگر به جای a، نقطهٔ دیگری b در I در نظر بگیریم، $G(x) = \int_b^x f$ تابع اولیهٔ دیگری برای f است و $G - F$ مقدار ثابت $\int_b^a f$ را داراست.

در اینجا باید توجه داشت که اگر دامنهٔ تعریف یک تابع مشتق‌پذیر یک بازهٔ واحد نباشد، صفر شدن مشتق دلالت بر ثابت بودن تابع نمی‌کند. مثلاً اگر $I_۱$ و $I_۲$ دو بازه باز مجزا باشند و تابع مشتق‌پذیر $f : I_۱ \cup I_۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق صفر باشد، f می‌تواند روی $I_۱$ و $I_۲$ مقادیر ثابت متفاوت داشته باشد.

مثال. می‌خواهیم کلیه تابع‌های اولیه تابع $f : \mathbb{R} - \{۰\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را که به صورت $f(x) = \frac{۱}{x}$ تعریف شده است مشخص کنیم. دامنهٔ تعریف f اجتماع دو بازهٔ باز مجزای $]۰, +\infty[$ و $]-\infty, ۰[$ است. روی $]۰, +\infty[$ تابع $\ln x$ یک تابع اولیه برای $\frac{۱}{x}$ است. برای $]-\infty, ۰[$ تابع $\ln(-x)$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{۱}{-x}(-۱) = \frac{۱}{x}$$

پس $\ln(-x)$ یک تابع اولیه برای $\frac{۱}{x}$ روی $]-\infty, ۰[$ است. بنابراین می‌توان $\ln|x|$ را به عنوان یک تابع اولیه $\frac{۱}{x}$ در نظر گرفت ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که هر تابع اولیه $\frac{۱}{x}$ به شکل $\ln|x| + c$، برای یک مقدار ثابت c، است زیرا که دامنهٔ تعریف $\frac{۱}{x}$ از دو بازهٔ مجزا تشکیل شده است. کلی‌ترین تابع اولیه $\frac{۱}{x}$ به شکل زیر است:

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_۱ & x > ۰ \\ \\ \ln(-x) + C_۲ & x < ۰ \end{cases}$$

که در اینجا $C_۱$ و $C_۲$ ثابت‌های دلخواه هستند.

برای تابع پیوستهٔ $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، I یک بازه، اگر تابع $F(x) = \int_x^a f$ را در نظر بگیریم که در آن a نقطه‌ای در I است، داریم $F'(x) = -f(x)$ زیرا که $\int_x^a = -\int_a^x f$. به طور کلی:

(۳–۳) اگر I یک بازه در I باشد، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته، و $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع‌های مشتق‌پذیر، آنگاه تابع $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

تعریف می‌شود مشتق‌پذیر است و

$$F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \tag{۱}$$

اثبات. تابع دو متغیری G با دامنهٔ مربع:

$$\{(u, v) \mid u, v \in I\} \subset \mathbb{R}^{2}$$

را به صورت

$$G(u, v) = \int_u^v f$$

تعریف می‌کنیم. اگر c مقداری در I باشد، داریم $G(u, v) = \int_u^c f + \int_c^v f$، پس G مجموع دو تابع مشتق‌پذیر است و خود مشتق‌پذیر می‌باشد. بنابراین $F(x) = G(\alpha(x), \beta(x))$ بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dx} \\ &= -f(\alpha(x))\alpha'(x) + f(\beta(x))\beta'(x) \end{aligned}$$

چنان که حکم بود. $\square$

قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبهٔ بسیاری انتگرال‌ها را از طریق تابع اولیه ممکن می‌سازد. اگر f روی بازهٔ I پیوسته باشد، $a \in I$، و $F(x) = \int_a^x f$، داریم $F(a) = ۰$، پس

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f \tag{۲}$$

در واقع برای هر تابع اولیه Φ برای f روی بازهٔ I، چون $\Phi(x) = F(x) + C$، داریم:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f \tag{۳}$$

جدول زیر تعدادی از تابع‌های اولیهٔ ساده را نمایش می‌دهد. در سمت چپ یک تابع f داده شده است و در سمت راست یکی از تابع‌های اولیه f با نماد F مشخص شده است. برای یافتن کلی‌ترین تابع اولیه

باید برای هر بازه در دامنهٔ تعریف یک ثابت دلخواه اضافه کرد. موارد ذکر شده همه از یک مشتق‌گیری ساده نتیجه می‌شوند:

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq -۱$	$\frac{۱}{n+۱}x^{n+۱}$
$\frac{۱}{x}$	$\ln\|x\|$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sec^۲ x$	$\tan x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$
e^x	e^x
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{۱}{۱+x^۲}$	$\tan^{-۱} x$
$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$	$\sin^{-۱} x$

از آنجا که مشتق مجموع دو تابع برای مجموع مشتق‌ها است می‌توان تابع اولیهٔ تابع‌های به صورت مجموع توابع سمت چپ را نیز محاسبه کرد. در جلسه آینده نتیجه‌گیری‌های لازم از قانون لایب‌نیتس برای حاصل‌ضرب و قاعدهٔ زنجیره‌ای به عمل خواهد آمد.

(۳—۴) مجموع‌های ریمان کلی. در آغاز بحث انتگرال مجموع‌های ریمان بالایی و پایینی را بررسی کردیم. به طور کلی، برای تابع کراندار $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ و افراز $\mathcal{P} : a = x_۰ \leq x_۱ \leq \cdots \leq x_n = b$، اگر نقطه‌ای x_i^* در $[x_{i-۱}, x_i]$ اختیار کنیم، $i = ۱, \ldots, n$، هر مجموع به شکل:

$$\sum_{i=۱}^{n}(x_i - x_{i-۱})f(x_i^*)$$

یک مجموع ریمان خوانده می‌شود. اگر M_i و m_i به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی f روی $[x_{i-1}, x_i]$ باشند، چون $m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$، داریم:

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i^*) \leq U(f,\mathcal{P}) \qquad (4)$$

طول بزرگترین زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ از افراز را به $\delta(\mathcal{P})$ نمایش می‌دهیم و ضخامت افراز می‌نامیم. اکنون فرض کنید f پیوسته است. برای هر $e > 0$ داده شده، دیدیم که $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $\delta(\mathcal{P}) < \delta$، آنگاه برای هر $i = 1, \ldots, n$، داریم $M_i - m_i < \frac{e}{b-a}$ و در نتیجه:

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < e$$

چون $\int_a^b f$ بین $U(f,\mathcal{P})$ و $L(f,\mathcal{P})$ قرار دارد نتیجه می‌شود که اگر $\delta(\mathcal{P}) < \delta$، آنگاه:

$$|U(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f| < e \quad , \quad |\int_a^b f - L(f,\mathcal{P})| < e$$

بنابراین از (۴) نتیجه می‌شود که: برای هر $e > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر افراز $\mathcal{P}$ با ضخامت کوچکتر از δ و هر مجموع ریمان مربوط داریم:

$$|\int_a^b f - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i^*)| < e$$

به این مفهوم گفته می‌شود که $\int_a^b f$ حد مجموع‌های ریمان است وقتی ضخامت افراز به صفر میل کند. گاهی اوقات می‌توان از این مطلب بعضی حدها را محاسبه کرد.

مثال. می‌خواهیم حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\}$$

توجه کنید که هر جملهٔ داخل آکلاد به صفر میل می‌کند وقتی $n \longrightarrow \infty$، ولی تعداد جملات نیز به ∞ میل می‌کند. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} &= \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{i}{n}})\end{aligned}$$

تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را روی بازهٔ $[۱, ۲]$ در نظر بگیرید. افراز $۱ < ۱ + \frac{۱}{n} < ۱ + \frac{۲}{n} < \cdots < ۱ + \frac{n}{n} = ۲$ از بازهٔ $[۱, ۲]$ را در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $x_i^* = ۱ + \frac{i}{n}$، مجموع بالا برابر است با $\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n} f(x_i^*)$ و $\frac{۱}{n}$ طول بازهٔ $[۱ + \frac{i-۱}{n}, ۱ + \frac{i}{n}]$ است. بنابراین مجموع یک مجموع ریمان برای تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ روی بازهٔ $[۱, ۲]$ است. وقتی $n \longrightarrow \infty$، ضخامت افراز، $\frac{۱}{n}$، به صفر میل می‌کند و حد عبارت بالا برابر $\int_۱^۲ f$ می‌شود. به عنوان تابع اولیه برای $\frac{۱}{x}$، از $\ln x$ استفاده می‌کنیم، پس حد بالا برابر است با $\ln(۲) - \ln(۱) = \ln(۲)$.