انتگرال یک متغیری (۲)

مفهوم انتگرال‌پذیری برای تابع‌های کراندار $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ در جلسهٔ گذشته مورد بحث قرار گرفت. در این جلسه نخست پاره‌ای خواص ابتدایی تابع‌های انتگرال‌پذیر و نتایج فوری تعریف را ثبت می‌کنیم.

(۲ـ۱) خواص ابتدایی انتگرال

(۲ـ۱ـ۱) هر تابع ثابت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = c$ برای هر x در $[a, b]$، انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b f = c(b - c)$.

اثبات. هر مجموع ریمان بالایی و هر مجموع ریمان پایینی f برابر می‌شود با $c(b - c)$ و حکم نتیجه می‌شود. □

(۲ـ۱ـ۲) اگر دو تابع $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشند، $f + g$ نیز انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{P} : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ یک افراز $[a, b]$ باشد. اگر کوچکترین کران بالایی $f + g$، f و g روی $[x_{i-1}, x_i]$ را به ترتیب M_i، M_i'، M_i''، و بزرگترین کران پایینی $f + g$، f و g را به ترتیب به m_i، m_i' و m_i'' نمایش دهیم، داریم:

$$m_i' + m_i'' \leq m_i \leq M_i \leq M_i' + M_i'' \qquad (1)$$

زیرا که $f(x) \leq M_i'$ و $g(x) \leq M_i''$ برای x در $[x_{i-۱}, x_i]$، نتیجه می‌دهد $M_i' + M_i''$ یک کران بالایی برای $f+g$ روی $[x_{i-۱}, x_i]$ است، بنابراین کوچکترین کران بالایی $f+g$ روی $[x_{i-۱}, x_i]$ حداکثر برابر $M_i' + M_i''$ است. استدلال مشابهی برای m_i، m_i' و m_i'' برقرار است. بنابراین:

$$L(f,\mathcal{P}) + L(g,\mathcal{P}) \leq L(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f+g,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) + U(g,\mathcal{P}) \qquad (۲)$$

چون f و g انتگرال‌پذیر فرض شده‌اند، می‌توان برای $e > ۰$ داده شده، با انتخاب مناسب افرازهای $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ نامساوی‌های زیر را تأمین کرد:

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \leq \frac{e}{۲} \qquad (۳)$$

$$U(g,\mathcal{Q}) - L(g,\mathcal{Q}) \leq \frac{e}{۲} \qquad (۴)$$

حال برای $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ که تظریف $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ دو نامساوی فوق همچنان برقرار می‌مانند، پس اگر به جای $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ را در (۳) و (۴) جایگزین کرده و طرف‌های متناظر نامساویها را جمع کنیم:

$$[U(f,\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) + U(g,\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})] - [L(f,\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} + L(g,\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}] \leq e$$

بنابراین از (۲) نتیجه می‌شود که

$$U(f+g,\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - L(f+g,\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq e$$

پس $f+g$ انتگرال‌پذیر است. به علاوه چون بزرگترین کران بالایی طرف راست (۲) و نیز کوچکترین کران بالایی طرف چپ (۲) هر دو برابر $\int_a^b f + \int_a^b g$ هستند، نتیجه می‌شود که انتگرال بالایی و انتگرال پایینی $f+g$ هر دو برابر $\int_a^b f + \int_a^b g$ هستند و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

(۲—۱—۳) اگر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $c \in \mathbb{R}$، آنگاه cf انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f$$

اثبات. نخست اگر $c \geq 0$، و M_i و m_i به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی f روی یک بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ از افراز $\mathcal{P}$ باشند، کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی cf روی $[x_{i-1}, x_i]$ به ترتیب برابر cM_i و cm_i خواهد شد و با فاکتورگیری از c می‌توان به سادگی به نتیجه رسید. در حالت $c < 0$، کوچکترین کران بالایی cf برابر cm_i و بزرگترین کران پایینی آن برابر cM_i می‌شود و مجدداً می‌توان به نتیجه مورد نظر رسید. $\square$

(۲—۱—۴) اگر برای تابع انتگرال‌پذیر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$ برای هر x در $[a,b]$، آنگاه $\int_a^b f \geq 0$.

اثبات. برای چنین تابع f، $0 \leq m_i \leq M_i$ و همهٔ مجموع‌های ریمان غیرمنفی خواهند بود. پس $\overline{\int}$ و $\underline{\int}$ غیرمنفی می‌شوند و چون f انتگرال‌پذیر است، $\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \geq 0$. $\square$

(۲—۱—۵) نتیجه. اگر $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشند و $f(x) \geq g(x)$ برای هر x در $[a,b]$، آنگاه

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

اثبات. تابع $f - g$ طبق (۲—۱—۳) و (۲—۱—۲) انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$، ولی طبق (۲—۱—۴) داریم $\int_a^b (f-g) \geq 0$، پس حکم نتیجه می‌شود. $\square$

اگر تابع کراندار $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \qquad (۵)$$

این قرار داد را می‌توان اینگونه توجیه کرد که در حالت $f \geq 0$ که $\int_a^b$ تعبیر هندسی مساحت زیر نمودار را دارد، اگر جهت محور دامنه را تعویض کنیم، نقش a و b به عنوان نقاط چپ و راست دامنه تعویض می‌شود و مساحت مورد نظر زیر محور قرار خواهد گرفت. بدین ترتیب باید علامت منفی برای مساحت

منظور کرد.

(۲—۱—۶) برای هر سه نقطهٔ a، b و c در $\mathbb{R}$ داریم:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c \tag{۶}$$

مشروط بر این که انتگرال‌های فوق تعریف شده باشند. در واقع هرگاه دو انتگرال از سه انتگرال بالا تعریف شده باشند، سومی نیز تعریف شدنی است و تساوی برقرار است.

برای اثبات (۲—۱—۶)، دو لم سودمند بیان و ثابت می‌کنیم.

(۲—۱—۷) لم ۱. اگر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $[c,d] \subset [a,b]$، آنگاه تحدید f به $[c,d]$ نیز انتگرال‌پذیر است.

اثبات. تحدید f به زیربازهٔ $[c,d]$ از $[a,b]$ را به $\overline{f}$ نمایش می‌دهیم. برای $e > 0$، باید افراز $\overline{\mathcal{P}}$ از $[c,d]$ ارائه کنیم که $U(\overline{f},\overline{\mathcal{P}}) - L(\overline{f},\overline{\mathcal{P}}) < e$. چون f انتگرال‌پذیر است افرازی $\mathcal{P}$ از $[a,b]$ وجود دارد که $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < e$. افراز $\mathcal{P}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

چون $[c,d] \subset [a,b]$، اندیس‌های i و j بین 0 و n وجود دارند که:

$$x_i \leq c \leq x_{i+1} \quad , \quad x_{j-1} \leq d \leq x_j$$

افراز $\overline{\mathcal{P}}$ را به صورت زیر برای $[c,d]$ در نظر می‌گیریم:

$$\overline{\mathcal{P}} : c = x'_i \leq x_{i+1} \leq \cdots \leq x_{j-1} \leq x'_j = d$$

فرض کنید M'_{i+1} و m'_{i+1} کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی $\overline{f}$ روی $[x'_i, x_{i+1}]$ باشند. در مقایسه با M_{i+1} و m_{i+1} مقادیر متناظر برای f روی بازهٔ (احتمالاً) بزرگتر $[x_i, x_{i+1}]$ داریم

$$m_{i+1} \leq m'_{i+1} \leq M'_{i+1} \leq M_{i+1}$$

به همین ترتیب اگر M'_j و m'_j را به $[x_{j-۱}, x'_j]$ نسبت دهیم، داریم:

$$m_j \leq m'_j \leq M'_j \leq M_j$$

نتیجه می‌شود که:

$$U(\overline{f}, \overline{\mathcal{P}}) - L(\overline{f}, \overline{\mathcal{P}}) \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$$

و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

(۲—۱—۸) لم ۲. اگر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $[a,b] \subset [A,B]$، تابع $\widetilde{f}: [A,B] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$\widetilde{f}\ (x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ \circ & x \notin [a,b] \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $\widetilde{f}$ روی $[A,B]$ انتگرال‌پذیر است و $\int_A^B \widetilde{f} = \int_a^b f$.

اثبات. برای $e > \circ$، باید افراز $\widetilde{\mathcal{P}}$ برای $[A,B]$ بیابیم که

$$U(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{P}}) - L(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{P}}) < e$$

چون f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است، افراز $\mathcal{P}$ به صورت زیر برای $[a,b]$ وجود دارد که $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < e$

$$\mathcal{P} : a = x_\circ \leq x_۱ \leq \cdots \leq x_p = b$$

حال $\widetilde{\mathcal{P}}$ را با افزودن نقاط A و B تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{\mathcal{P}}: A = \widetilde{x}_\circ \leq a = x_\circ \leq \cdots \leq x_p = b \leq \widetilde{x}_p = B$$

چون تابع تعریف شده $\widetilde{f}$ خارج $[a,b]$ صفر است نتیجه می‌شود که $U(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{P}}) = U(f, \mathcal{P})$ و $L(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{P}}) = L(f, \mathcal{P})$ و حکم نتیجه می‌شود.

حال به اثبات ۲—۱—٦ باز می‌گردیم. نخست فرض کنید $a \leq b \leq c$ و f روی $[a,b]$ و $[b,c]$ انتگرال‌پذیر است. تحدید f به $[a,b]$ را f' و تحدید f به $[b,c]$ را به f'' نمایش می‌دهیم. فرض کنید $\widetilde{f}'$

و $\widetilde{f''}$ توسعهٔ f' و f'' به همهٔ $[a,c]$ به ترتیب لم ۲ باشند، یعنی بیرون بازهٔ تعریف تابع را برابر صفر قرار دهید. از لم ۲ نتیجه می‌شود که $\widetilde{f'}$ و $\widetilde{f''}$ انتگرال‌پذیرند. به علاوه چون $f = \widetilde{f'} + \widetilde{f''}$:

$$\begin{aligned} \int_a^c f &= \int_a^c \widetilde{f'} + \int_a^c \widetilde{f''} \\ &= \int_a^b f + \int_b^c f \quad (\text{طبق لم ۲}) \end{aligned}$$

و حکم در حالت $a \leq b \leq c$ به اثبات می‌رسد. حالت‌های دیگر به ترتیب a، b و c نیز از لم ۱ و لم ۲ نتیجه می‌شود.

تاکنون مثالی جز تابع ثابت و سهمی برای تابع انتگرال‌پذیر ارائه نکرده‌ایم و لم ۲ نشان می‌دهد پیوستگی یک شرط لازم برای انتگرال‌پذیری نیست زیرا اگر مقدار f در یکی از دو انتهای بازهٔ $[a,b]$ ناصفر باشد، با توسعهٔ f با مقدار صفر بیرون $[a,b]$ به یک دامنهٔ بزرگتر، تابع به‌دست آمده همچنان انتگرال‌پذیر است ولی در نقاط a و b ممکن است پیوسته نباشد. گزاره زیر نشان می‌دهد که پیوستگی یک شرط کافی برای پیوستگی است.

(۲—۲) گزاره. هر تابع پیوسته $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات این گزاره را به کمک لم زیر ارائه خواهیم کرد ولی اثبات لم را به جلسات آینده وقتی دربارهٔ دنباله‌های اعداد حقیقی صحبت می‌شود موکول می‌کنیم.

(۲—۳) لم. اگر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد آنگاه ویژگی زیر برقرار است: برای هر $e > ۰$، عددی $\delta > ۰$ وجود دارد به طوری که هرگاه برای $x_۱$ و $x_۲$ در $[a,b]$ داشته باشیم $|x_۱ - x_۲| < \delta$، آنگاه $|f(x_۱) - f(x_۲)| < e$.

در نگاه اول به نظر می‌آید حکم این لم چیزی فرای پیوستگی نباشد ولی کمی دقت تفاوت ظریف آن را مشخص می‌کند. پیوستگی f در $[a,b]$ بدین معنی است که f در همهٔ نقاط $[a,b]$ پیوسته است، یعنی برای هر $x_۰$ در $[a,b]$، عددی $e' > ۰$ وجود دارد که هرگاه $|x - x_۰| < e'$، x در $[a,b]$، آنگاه $|f(x) - f(x_۰)| < e$. نکته این است که اندازهٔ e' به نقطهٔ $x_۰$ وابسته است و ممکن است یک $e' > ۰$ واحد وجود نداشته باشد که برای هر $x_۰$ کار کند. طبق لم اگر دامنهٔ تابع پیوستهٔ f یک بازهٔ بسته و

کراندار باشد، آنگاه می‌توان یک $e' > 0$ واحد (که در لم δ خوانده شده است) پیدا کرد که هرگاه دو نقطه در دامنه فاصلهٔشان کوچکتر از این e' باشد، فاصله مقادیر آنها از e کوچکتر است. این وضعیت پیوستگی یکنواخت خوانده می‌شود و ممکن است اگر دامنهٔ یک تابع پیوسته یکی از دو شرط کراندار بودن یا بسته بودن را حایز نباشد برقرار نشود. به عنوان مثال، تابع‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

$$h :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x}$$

هر یک از این دو تابع در دامنهٔ خود پیوسته است، ولی نشان می‌دهیم پیوستگی یکنواخت برقرار نیست. نخست تابع g را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $e > 0$ داده شده است. برای این که مقدار g در دو نقطهٔ x_1 و x_2، مثلاً $0 \leq x_1 < x_2$، کوچکتر از e باشد، حداکثر فاصله x_1 و x_2 چه‌قدر می‌تواند باشد؟ می‌نویسیم $x_2 = x_1 + d$ که d فاصلهٔ x_1 و x_2 است. داریم:

$$\begin{aligned} |g(x_2) - g(x_1)| &= (x_1 + d)^2 - x_1^2 \\ &= 2dx_1 + d^2 < e \end{aligned}$$

توجه کنید که d هر قدر کوچک (ولی مثبت) گرفته شود، می‌توان با بزرگ کردن x_1، $2dx_1$ را از e بزرگتر ساخت. البته اگر x_1 نخست مفروض باشد، می‌توان d را طوری گرفت که $2dx_1$ و d^2 هر دو کوچکتر از $\frac{e}{2}$ شوند و در نتیجه پیوستگی در x_1 برقرار است. اگر به نمودار g توجه کنیم می‌بینیم که با سوق دادن x به $+\infty$ در دامنه، شیب نمودار به $+\infty$ میل می‌کند. در نتیجه باید d را تدریجاً کوچکتر ساخت تا نامساوی مورد نظر برقرار بماند. در واقع $d \longrightarrow 0^+$ وقتی $x_1 \longrightarrow +\infty$.

شکل ۱

در مورد تابع h، که دامنه‌اش کراندار است، به وضعیت مشابهی برمی‌خوریم. مجدداً اگر $e > 0$ داده شده باشد و x_1 و x_2 در $]0, 1]$ باشند به طوری که $0 < x_1 = x_2 - d$، می‌خواهیم d را آنقدر کوچک بگیریم که $|h(x_1) - h(x_2)|$ کوچکتر از e باشد:

$$\begin{aligned} |h(x_1) - h(x_2)| &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + d} \\ &= \frac{d}{(x_1 + d)x_1} < e \end{aligned}$$

در اینجا نیز توجه کنید که هر $d > 0$ که داده شده باشد، می‌توان x_1 را آنقدر کوچکتر (نزدیکتر به نقطهٔ انتهایی ۰) گرفت که نسبت $\frac{d}{(x_1+d)x_1}$ بزرگتر از e شود. در عین حال تابع در x_1 پیوسته است زیرا که اگر x_1 داده شده باشد می‌توان d را متناسباً کوچک گرفت، مثلاً $0 < d < ex_1^2$، به طوری که:

$$\frac{d}{(x_1+d)x_1} < \frac{d}{x_1^2} < e$$

در این مثال نیز، با نزدیک شدن x_1 به نقطهٔ ۰ (که در دامنهٔ تابع نیست) شیب نمودار به $+\infty$ میل می‌کند و اندازهٔ d لزوماً به صفر میل می‌کند.

طبق لم ۲—۳، هرگاه قلمرو یک تابع پیوسته، یک بازهٔ بسته و کراندار باشد، می‌توان برای هر $e > 0$ داده شده یک $\delta > 0$ یکنواخت پیدا کرد که برای هر دو نقطهٔ دامنه در فاصله کوچکتر از δ، فاصله مقادیر از e کوچکتر باشد. حال به کمک این لم، گزاره ۲—۲ را ثابت می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که هرگاه $e > 0$ داده شده باشد، افرازی $\mathcal{P}$ از $[a,b]$ وجود دارد که:

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < e$$

طبق لم، برای $\frac{e}{b-a}$، عددی $\delta > 0$ وجود دارد که هرگاه $|x-x'| < \delta$، آنگاه $|f(x)-f(x')| < e$. افراز $\mathcal{P}$ را طوری می‌گیریم که فاصله دو نقطهٔ متوالی افراز از $\delta > 0$ کوچکتر باشد نتیجه می‌شود که اگر M_i و m_i به ترتیب ماکسیمم و مینیمم f روی یک زیربازهٔ افراز باشند، داریم $M_i - m_i < \frac{e}{b-a}$. بنابراین:

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) &= \sum(x_i - x_{i-1})M_i - \sum(x_i - x_{i-1})m_i \\ &= \sum(x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \\ &< \frac{e}{b-a}\sum(x_i - x_{i-1}) \\ &= e \end{aligned}$$

و حکم ۲—۲ به اثبات می‌رسد. □

سؤالی که در اینجا طبعاً مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان توابع انتگرال‌پذیر را به گونه‌ای ساده مشخص کرد؟ قضیهٔ معروف زیر از لبگ[1] که اثبات آن فرای این درس است شرطی لازم و کافی به

[1] H. Lebesgue

این منظور ارائه می‌کند. یک زیرمجموعهٔ Z از $\mathbb{R}$ را یک مجموعهٔ اندازه صفر می‌نامیم در صورتی که برای هر $e > ۰$ دنباله‌ای از بازه‌ها $\{I_n\}_{n=۱}^{\infty}$ وجود داشته باشد به طوری که مجموع سری $\sum_{n=۱}^{\infty} l(I_n)$، $l(I_n) =$ طول بازهٔ I_n، کوچکتر از e باشد.

(۲—۴) قضیهٔ لبگ. تابع کراندار $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f یک مجموعهٔ اندازهٔ صفر باشد.

هر مجموعهٔ متناهی و در واقع هر مجموعهٔ شمارا یک مجموعهٔ اندازهٔ صفر است. بدین ترتیب تابع‌های کراندار $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ که به جز در تعدادی شمارا نقطه پیوسته باشند انتگرال‌پذیرند.