انتگرال یک متغیری

مفهوم انتگرال یکی از ارکان حساب دیفرانسیل و انتگرال است. از نظر قدمت سوابق این ایده بسیار قدیمی‌تر از مفهوم مشتق است و به صورتی در ریاضیات یونان قرون ۳ و ۴ پیش از میلاد زیر عنوان "روش افنا[۱]" یافت می‌شود. هدف این روش یافتن مساحت ناحیه‌های محصور به منحنی‌ها یا احجام محصور به سطوح خمیده است. در این روش ناحیهٔ مورد نظر به صورت اجتماعی نامتناهی از ناحیه‌های محصور به خطوط راست یا صفحات مستوی نمایش داده می‌شود. با یافتن حد مجموع مساحت‌ها یا احجام این ناحیه‌ها عددی به عنوان مساحت یا حجم ناحیهٔ اولیه به‌دست می‌آید.

به عنوان نمونه روش ارشمیدس را برای محاسبهٔ قطاعی از سهمی به طور خلاصه بیان می‌کنیم. سهمی $y = kx^۲$ را در نظر بگیرید. مقصود از یک وتر سهمی پاره‌خط واصل بین دو نقطه نمودار است. ناحیه محصور به یک وتر و کمان سهمی که به دو انتهای وتر محصور می‌شود را یک قطاع سهمی می‌نامیم و می‌خواهیم عددی را به عنوان مساحت قطاع تعریف شده توسط وتر AB نسبت دهیم.

شکل ۱

ارشمیدس از خواص هندسی سهمی که در مطالعه علم مخروطات شناخته شده بود بهره می‌گیرد. ما اثبات خواص مورد نیاز را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. امروزه با استفاده از هندسه تحلیلی اثبات این خواص سرراست است ولی شایان ذکر است که قدما این گزاره‌ها به روش ترکیبی مانند هندسهٔ کلاسیک استخراج می‌کردند.

حکم ۱. برای هر وتر AB، نقطهٔ منحصر به فردی C روی کمان AB وجود دارد که مماس بر سهمی

[۱] Method of Exhaustion

در آن نقطه موازی AB است. (اثبات: تمرین).

نقطهٔ C را رأس منسوب به وتر AB می‌نامند. حال فرض می‌کنیم D رأس منسوب به وتر AC باشد (شکل ۱). حکم زیر کلید محاسبهٔ ارشمیدس است.

حکم ۲. مساحت مثلث BDC یک هشتم مساحت BCA است. (اثبات: تمرین).

حال توجه کنید که متناظر به وتر BC نیز رأس E پدید می آید و مساحت مثلث AEC نیز یک هشتم مساحت مثلث BCA است. به همین ترتیب نسبت به هر یک از چهار وتر AE، EC، CD و DB یک رأس اختیار می‌شود و چهار مثلث ساخته می‌شوند که مساحت هر یک $(\frac{۱}{۸})^{۲} = \frac{۱}{۶۴}$ مساحت ACB است. روش افنا عبارت از این است که این فرایند را به همین ترتیب ادامه دهیم و هر بار مجموع مساحت‌های مثلث‌های پدید آمده را اضافه کنیم. حد این مجموع‌ها را به عنوان مساحت قطاع سهمی تعریف می‌شود. اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم، مجموع مساحت‌های دو مثلث AEC و CDB برابر $\frac{۱}{۸}S + \frac{۱}{۸}S = \frac{۱}{۴}S$ است. به همین ترتیب در مرحلهٔ بعد مجموع مساحت‌های چهار مثلث برابر می‌شود با $\frac{۱}{۱۶}S = \frac{S}{۶۴} \times ۴$. اگر این فرایند بلا انقطاع ادامه یابد با چنین مجموعی نامتناهی روبرو هستیم:

$$S + \frac{۱}{۴}S + \frac{۱}{۱۶}S + \frac{۱}{۴^{۳}}S + \frac{۱}{۴^{۴}}S + \cdots = S(۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴^{۲}} + \frac{۱}{۴^{۳}} + \cdots)$$

مجموع این سری هندسی برابر است با $\frac{۴}{۳}S$، یعنی مساحت قطاع سهمی که توسط AB تعریف می‌شود $\frac{۴}{۳}$ مساحت مستطیل ACB است که C رأس مربوط به وتر AB می‌باشد.

روشن است که محاسبهٔ بالا مبتنی بر دانش دقیق خواص هندسی سهمی است. مشکل قدما در توسعهٔ این روش وابستگی آن به این اطلاعات خاص بود که از آن اجتنابی تصور نمی‌شد. با ابداع هندسهٔ تحلیلی و بیان منحنی‌ها به صورت اجتماعی از نمودار توابع که تعریف تحلیلی دارند، در قرون ۱۶ و ۱۷ میلادی روش افنا به صورت حساب انتگرال تکامل یافت و رابطهٔ آن با حساب دیفرانسیل تدریجاً کشف شد. رهیافت کلی محاسبه مساحت (و در واقع تعریف آن!) برای یک ناحیهٔ محصور به یک منحنی (مانند شکل ۲) این خواهد بود که ناحیه را به اجزایی تجزیه کنیم که هر جزء عبارت از

ناحیه محصور به نمودار یک تابع، بازهٔ دامنهٔ آن تابع و خطوط راست عمود بر محور

شکل ۲

دامنهٔ تعریف تابع باشد. در شکل ۲ یک بازهٔ موازی محور افقی به عنوان دامنهٔ دو تابع و یک بازهٔ موازی محور y به عنوان بازهٔ تعریف تابع سوم در نظر گرفته شده است. به طور کلی هدف ما این خواهد بود که بتوانیم به ناحیه‌ای مانند ناحیهٔ شکل ۳ که محصور به نمودار $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$، بازهٔ $[a,b]$ و دو خط راست $x = a$ و $x = b$ است. عددی را به عنوان مساحت نسبت دهیم. با این انگیزه به تشریح حساب انتگرال می‌پردازیم.

شکل ۳

بازهٔ بسته و کرانداری $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. مقصود از یک افراز $[a,b]$ انتخاب دنباله‌ای متناهی $\mathcal{P} = \{x_۰, x_۱, \dots, x_n\}$ از نقاط $[a,b]$ است به طوری که

$$a = x_۰ \leq x_۱ \leq \cdots \leq x_n = b$$

بدین ترتیب هر افراز، بازهٔ $[a,b]$ را به زیربازه‌هایی تجزیه می‌کند که فقط در نقاط انتهایی اشتراک دارند. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار باشد، یعنی اعداد حقیقی A و B وجود داشته باشند که:

$$A \leq f(x) \leq B \qquad \text{برای هر } x \in [a,b]$$

در این صورت اگر دامنهٔ f را به $[x_{i-۱}, x_i]$ محدود کنیم، مقادیر f روی $[x_{i-۱}, x_i]$ دارای کران بالایی و کران پایین هستند. بنابراین طبق اصل تمامیت اعداد حقیقی، مجموعهٔ مقادیر f روی $[x_{i-۱}, x_i]$ دارای کوچکترین کران بالایی M_i و بزرگترین کران پایینی m_i است. دو مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=۱}^{n} (x_i - x_{i-۱}) m_i \quad , \quad U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=۱}^{n} (x_i - x_{i-۱}) M_i$$

$L(f,\mathcal{P})$ را مجموع ریمان پایینی f نسبت به افراز $\mathcal{P}$ و $U(f,\mathcal{P})$ را مجموع ریمان بالایی f نسبت به $\mathcal{P}$ می‌نامیم. وقتی f مثبت باشد، $L(f,\mathcal{P})$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های از بالا محصور به نمودار

f و $U(f,\mathcal{P})$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های از پایین محصور به نمودار f است (شکل ۴). می‌توان $L(f,\mathcal{P})$ را یک تقریب پایینی برای مساحت زیر نمودار و $U(f,\mathcal{P})$ را یک تقریب بالایی برای همین مساحت تصور کرد.

شکل ۴

چون $m_i \leq M_i$، طبعاً داریم:

$$L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) \qquad (۱)$$

اگر $\mathcal{P}' = \{x'_۰, x'_۱, \ldots, x'_m\}$ یک افراز دیگر $[a,b]$ باشد، می‌گوییم $\mathcal{P}'$ یک تظریف $\mathcal{P}$ است در صورتی که هر x_i یکی از x'_j ها باشد، $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$.

(۱−۱) گزاره. اگر $\mathcal{P}'$ یک تظریف $\mathcal{P}$ باشد داریم:

$$L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}') \leq U(f,\mathcal{P}') \leq U(f,\mathcal{P}) \qquad (۲)$$

اثبات. فرض کنید S و S' دو زیرمجموعهٔ ناتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشند، M و m به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی برای S، و M' و m' به ترتیب کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی برای S'. حال اگر $S \subset S'$ نتیجه می‌شود که:

$$m' \leq m \leq M \leq M' \qquad (۳)$$

زیرا که هر کران بالایی برای S' یک کران بالایی برای S است و هر کران پایینی برای S' یک کران پایینی برای S. بنابراین اگر $\mathcal{P}'$ یک تظریف $\mathcal{P}$ باشد، از آنجا که هر زیربازهٔ I' مربوط به $\mathcal{P}'$ زیرمجموعه‌ای از یک زیربازهٔ I مربوط به $\mathcal{P}'$ است، کوچکترین کران بالایی f روی I' کوچکتر یا مساوی کوچکترین کران بالایی f روی I است و بزرگترین کران پایینی f روی I' بزرگتر یا مساوی بزرگترین کران پایینی f روی I است. حکم از این نکته نتیجه می‌شود. □

(۱ — ۲) گزاره. اگر $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ دو افراز $[a,b]$ باشند و $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع کراندار، آنگاه

$$L(f,\mathcal{P})\leq U(f,\mathcal{Q}) \qquad (۴)$$

اثبات. برای مشاهدهٔ این مطلب الحاق دو افراز $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ را در نظر می‌گیریم که در واقع اجتماع مرتب شده نقاط $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ است، یعنی اگر $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ و $\mathcal{Q}=\{y_0,y_1,\ldots,y_m\}$، الحاق $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، که به $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$ نمایش داده می‌شود، اجتماع x_i ها و y_j هاست که به ترتیب صعودی منظم شده باشد. واضح است که $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$ تظریف $\mathcal{P}$ و نیز تظریف $\mathcal{Q}$ است، پس طبق گزارهٔ (۱ — ۱) :

$$L(f,\mathcal{P})\leq L(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}) \quad , \quad U(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})\leq U(f,\mathcal{Q})$$

از طرفی دیگر بنابر (۱)، $L(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})\leq U(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})$، پس حکم نتیجه می‌شود. □

حال مجموعهٔ کلیه مجموع‌های ریمان پایینی برای $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ را نسبت به همهٔ افرازهای ممکن در نظر بگیرید. اگر B یک کران بالایی برای f روی $[a,b]$ باشد، هر یک از این مجموع‌های ریمان از $M(b-a)$ کوچکتر است، پس این مجموعهٔ ناتهی دارای کوچکترین کران بالایی است که آن را به $\underline{\int_a^b} f$ نمایش می‌دهیم و انتگرال پایینی f روی $[a,b]$ می‌نامیم. به همین ترتیب اگر A یک کران پایینی برای f روی $[a,b]$ باشد، $A(b-a)$ یک کران پایینی برای مجموعهٔ کلیهٔ مجموع‌های ریمان بالایی برای f است، پس مجموعهٔ مجموع‌های ریمان بالایی دارای بزرگترین کران پایینی است که به $\overline{\int_a^b} f$ نمایش می‌دهیم و انتگرال بالایی f می‌نامیم. چون طبق (۱ — ۲) هر مجموع ریمان پایین کوچکتر یا مساوی هر مجموع ریمان بالایی است نتیجه می‌شود که:

$$\underline{\int_a^b} f\leq\overline{\int_a^b} f \qquad (۵)$$

(دقیقاً چرا؟: تمرین). به تعبیری می‌توان $\overline{\int_a^b} f$ را بهترین تقریب بالایی برای مساحت زیر نمودار و $\underline{\int_a^b} f$ را بهترین تقریب پایینی برای مساحت زیر نمودار f تصور کرد. در صورتی که $\underline{\int_a^b}=\overline{\int_a^b} f$، تابع کراندار $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ را انتگرال‌پذیر (به مفهوم ریمان) می‌نامیم و مقدار مشترک را به $\int_a^b f$ نمایش می‌دهیم.

(۱—۳) گزاره. تابع کراندار $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $e>0$، افرازی $\mathcal{P}$ از $[a,b]$ وجود داشته باشد که:

$$U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})<e$$

اثبات. فرض کنید به‌ازای هر $e>0$، افرازی $\mathcal{P}$ با شرط فوق وجود داشته باشد. از آنجا که

$$L(f,\mathcal{P})\leq\underline{\int_a^b}f\leq\overline{\int_a^b}f\leq U(f,\mathcal{P})$$

نتیجه می‌گیریم که برای هر $e>0$ داریم:

$$\overline{\int_a^b}-\underline{\int_a^b}f<e$$

چون $e>0$ را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت، تساوی $\underline{\int_a^b}f$ و $\overline{\int_a^b}f$ نتیجه می‌شود.

بالعکس فرض کنید f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است، یعنی $\underline{\int_a^b}f=\overline{\int_a^b}f$. چون $\underline{\int_a^b}f$ کوچکترین کران بالایی مجموع‌های ریمان پایینی است، برای هر $e>0$، افراز $\mathcal{P}$ وجود دارد که

$$\underline{\int_a^b}f-L(f,\mathcal{P})<\frac{e}{2}$$

به همین ترتیب افرازی $\mathcal{Q}$ از $[a,b]$ یافت می‌شود که:

$$U(f,\mathcal{Q})-\overline{\int_a^b}f<\frac{e}{2}$$

ولی $\underline{\int_a^b}f=\overline{\int_a^b}f$، پس

$$U(f,\mathcal{Q})-L(f,\mathcal{P})<e$$

حال $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$، الحاق $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، تظریفی از $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ است، پس طبق گزارهٔ ۱—۱ داریم

$$U(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})-L(f,\mathcal{P}\vee\mathcal{Q})<e$$

و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

مثال ۱. تابع $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x : \text{گویا} \\ 0 & x : \text{ناگویا} \end{cases}$$

اگر $\mathcal{P}$ یک افراز $[0,1]$ باشد، در هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ به طول ناصفر هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند، پس $m_i = 0$ و $M_i = 1$. بنابراین

$$U(f,\mathcal{P}) = 1 \quad , \quad L(f,\mathcal{P}) = 0$$

چون این روابط برای هر افراز $\mathcal{P}$ برقرارند، داریم:

$$\overline{\int_a^b} f = 1 \quad , \quad \underline{\int_a^b} f = 0$$

بدین ترتیب f انتگرال‌پذیر نیست.

مثال ۲. سهمی $y = kx^2$ را روی بازهٔ $[0,c]$، $c > 0$، در نظر بگیرید. افراز $\mathcal{P}_n$ را با تقسیم $[0,c]$ به n بازه با طول‌های برابر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{P} : 0 = x_0 < x_1 = \frac{c}{n} < x_2 = 2\frac{c}{n} < \cdots < x_n = n\frac{c}{n} = c$$

چون f روی $[0,c]$ صعودی است، برای زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ داریم:

$$m_i = k(\frac{i-1}{n}c)^2 \quad , \quad M_i = k(\frac{i}{n}c)^2$$

پس

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c}{n} k(\frac{i-1}{n}c)^2 = \frac{c^3}{n^3} k \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

و به همین ترتیب:

$$U(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c}{n} k(\frac{i}{n}c)^2 = \frac{c^3}{n^3} k \sum_{i=1}^{n} i^2$$

بنابراین:

$$U(f,\mathcal{P}_n) - L(f,\mathcal{P}_n) = \frac{c^3 k}{n}$$

حال اگر $e > ۰$ داده شده باشد با بزرگ گرفتن n می‌توان تضمین کرد که $\frac{c^۳k}{n} < e$، پس طبق گزارهٔ ۱−۳، f روی $[۰, c]$ انتگرال‌پذیر است. برای محاسبهٔ $\int_a^b f$، نشان می‌دهیم که $L(f, \mathcal{P}_n)$ و $U(f, \mathcal{P}_n)$ هر دو به یک حد میل می‌کنند وقتی $n \to +\infty$، پس این حد مشترک لاجرم انتگرال f روی $[۰, c]$ است. با استفاده از فرمول $\sum_{i=۱}^{p} i^۲ = \frac{p(p+۱)(۲p+۱)}{۶}$ داریم:

$$L(f, \mathcal{P}_n) = (c^۳k)\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶n^۳} \quad , \quad U(f, \mathcal{P}_n) = (c^۳k)\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^۳}$$

وقتی $n \to +\infty$، هر دو عبارت بالا به $\frac{۱}{۳}c^۳k$ میل می‌کنند که مقدار $\int_۰^c f$ است. این همان مقداری است که از محاسبهٔ ارشمیدس به‌دست می‌آید زیرا بنابر تقارن مساحت زیر نمودار روی $[-c, c]$ برابر $\frac{۲}{۳}c^۳k$ است، پس حجم قطاع مربوط برابر $۲c^۳k - \frac{۲}{۳}c^۳k = \frac{۴}{۳}c^۳k$ می‌شود که چهار سوم مساحت مثلث با رئوس $(-c, kc^۲)$، $(۰, ۰)$ و $(c, kc^۲)$ است.