چند جمله‌ای تیلور و تقریب‌های مرتبهٔ بالا

یادآوری می‌کنیم که اگر تابع f در نقطهٔ a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد، تقریب خطی f در نقطهٔ a تابعی از درجهٔ یک است، در واقع تابع با مقدار $A(x) = f(a) + f'(a).(x-a)$، که مقدار آن به‌ازای $x = a$ برابر مقدار تابع f در آن نقطه است و وقتی x از a دور می‌شود، $f(x)$ به کُندی از $A(x)$ فاصله می‌گیرد. این نزدیکی ترتیب خطی به تابع اصلی برای xهای نزدیک a ناشی از این است که تقریب خطی در واقع مقدار تابع درجه یک مماس بر تابع f است یعنی نه‌تنها $A(a) = f(a)$، بلکه مشتق A و f نیز در $x = a$ برابرند، $A'(a) = f'(a)$. هدف ما در این بخش ارائه یک دنباله تقریبهای به‌طور فزاینده دقیقتر از یک تابع حول نقطه‌ای a از دامنهٔ تابع است. در مقابل دقیقتر شدن تقریب، محاسبه این توابع تدریجاً دشوارتر می‌شود. به‌طور کلی برای اینکه یک روش تقریب از ارزش و اعتبار برخوردار باشد، شرایط زیر ضروری است:

(۱) محاسبهٔ نامزد تقریب باید ساده‌تر از محاسبهٔ تابع اصلی باشد.

(۲) نامزد تقریب باید واقعاً به‌تابع داده شدهٔ «نزدیک» باشد.

در مورد (۱)، تقریب خطی نمونهٔ بارز تابعی است که محاسبه آن ساده است. پس از تابعهای ثابت، تابعهای خطی که نمودار آنها یک خط راست است ساده‌ترین توابع محسوب می‌شوند. در این بخش تابعهایی که به‌عنوان تقریب مطرح می‌کنیم چند جمله‌ایهای از درجات گوناگون هستند. به‌طور کلی چندجمله‌ایها نیز که از جمع و ضرب اعداد حقیقی به‌دست می‌آیند توابع به‌نسبت ساده محسوب می‌شوند. هر چه درجهٔ چندجمله‌ای کوچکتر باشد، محاسبهٔ چند جمله‌ای ساده‌تر است. چند جمله‌ایهای درجه صفر، توابع ثابت هستند، چند جمله‌ایهای درجه یک به‌عنوان تقریب خطی به کار می‌روند، و غیره.

در مورد (۲)، نزدیک بودن تقریب به تابع را چگونه باید ارزیابی کرد؟ در واقع برای سودمند بودن یک روش تقریب، باید بتوانیم اطمینان خاطر حاصل کنیم که خطای استفاده از این تقریب در حد قابل قبول برای به‌کارگیری در کاربرد مورد نظر است. به این منظور باید یک روش تخمین خطا همراه را با روش تقریب در دست باشد که بتوان به کمک آن یک کران بالایی برای قدر مطلق خطا ارائه کرد. در

مورد تقریب خطی دیدیم که اگر تابع f دوبار مشتقدپذیر باشد، خطا از $\frac{1}{2}M.(x-a)^2$ تجاوز نمی‌کند که در اینجا M یک کران بالایی برای مشتق دوم تابع در بازهٔ بین a و x است. بنابراین با محاسبهٔ $\frac{1}{2}M(x-a)^2$ می‌توان ملاحظه کرد که حداکثر خطای احتمالی در حد قابل قبولی هست یا نیست. به‌همین ترتیب، برای روشهای کلی‌تری که در این جلسه عرضه خواهیم کرد، یک روش تخمین خطا نیز به همراه خواهیم آورد که کرانی برای حداکثر خطای ممکن ارائه می‌کند.

به تعریف مشتق دوم یک تابع باز می‌گردیم. اگر a نقطه‌ای در دامنهٔ تعریف f باشد و اگر مشتق f در سراسر یک بازهٔ باز حول a تعریف شده باشد، آنگاه a یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف f' است و می‌توان وجود مشتق برای f' در نقطهٔ a را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به $f''(a)$ یا $f^{(2)}(a)$ نمایش می‌دهیم. همینطور اگر $f''(x)$ در همهٔ نقاط یک بازهٔ باز حول a وجود داشته باشد، می‌توان مشتقپذیری f'' در نقطهٔ a را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به $f'''(a)$ یا $f^{(3)}(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق سوم f در نقطهٔ a می‌نامیم. به‌طور کلی، اگر مشتق nـام تابع f در سراسر یک بازهٔ باز حول a تعریف شده باشد، می‌توان مشتقپذیری $f^{(n)}$ را در نقطهٔ a مورد بررسی قرار دارد که در صورت وجود آن را به $f^{(n+1)}(a)$ نمایش می‌دهیم و مشتق (مرتبهٔ) $(n+1)$ـام f در نقطهٔ a می‌نامیم. تابع $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ را k بار مشتقپذیر می‌نامیم اگر f در همهٔ نقاط دامنه دارای مشتق از مرتبهٔ kـام باشد. اگر f در یک نقطه a یا در زیر مجموعهٔ T از دامنهٔ خود دارای مشتق از هر مرتبه باشد، f را بینهایت بار مشتقپذیر در نقطهٔ a یا در مجموعهٔ T می‌نامیم.

مثال. یک تابع چند جمله‌ای در نظر بگیرید:

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

از آنجا که مشتق p نیز یک چند جمله‌ای است (از درجهٔ یکی پایین‌تر)، مشتق p نیز برای هر x مشتقپذیر است و با ادامهٔ مشتقگیری می‌بینیم که p در سراسر $\mathbb{R}$ بینهایت بار مشتقپذیر است. به‌علاوه توجه کنید که به‌سبب تقلیل درجه در مشتقگیری، برای $k > n$ داریم $p^{(k)}(x) = 0$.

مثال ۲. تابع $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. داریم $\sin' = \cos$ و $\sin'' = -\sin$، بنابراین می‌توان مشتقگیری را همواره ادامه داد و پس از چهار بار مشتقگیری تابع سینوس مجدداً ظاهر می‌شود، $\sin^{(4)} = \sin$. تابع کسینوس وضعیت مشابهی دارد. چهار تابع مثلثاتی دیگر نیز در دامنهٔ تعریف خود بینهایت بار مشتقپذیرند.

مثال ۳. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ -x^n & x < 0 \end{cases}$$

در اینجا n یک عدد صحیح مثبت داده شده است. برای $n = 1$، داریم $f(x) = |x|$ که در هر نقطهٔ $x \neq 0$ مشتقپذیر است ولی در $x = 0$ مشتقپذیر نیست. حال $n > 1$ را در نظر می‌گیریم. اگر $a \neq 0$، در یک بازهٔ باز حول a، تابع f همان مقدار x^n یا $-x^n$ را دارد که یک چند جمله‌ای است، بینهایت بار مشتقپذیر است، و $f^k(a) = 0$ برای $k > n$. برای $n > 1$ داریم

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & x > 0 \\ -nx^{n-1} & x < 0 \end{cases}$$

در $a = 0$ از تعریف استفاده می‌کنیم:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\pm h^n - 0}{h} = \pm h^{n-1}$$

با توجه به $n > 1$، حد عبارت بالا صفر است، پس $f'(0) = 0$ و فرمول (۱) را می‌توان به $x \geq 0$ یا $x \leq 0$ تعمیم داد. به‌طور کلی به‌استقرا فرض کنید که برای $k < n$ ثابت کرده‌ایم:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-(k-1))x^{n-k} & x \geq 0 \\ -n(n-1)\ldots(n-(k-1))x^{n-k} & x < 0 \end{cases}$$

آنگاه برای مشتق مرتبهٔ $(k+1)$ در a کسر زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f^{(k)}(0+h) - f^{(k)}(0)}{h} = \pm n(n-1)\ldots(n-(k-1))h^{n-k-1}$$

تا زمانی که $n > k + 1$، حد عبارت بالا همچنان صفر است ولی برای $n = k + 1$، یا $k = n - 1$ داریم

$$\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} = \pm n!$$

که علامت $\pm$ بستگی به این دارد که $h > 0$ یا $h < 0$، بنابراین $f^{(n)}(0)$ وجود ندارد. خلاصه اینکه تابع f در همهٔ نقاط $\mathbb{R}$ به استثنای $x = 0$ بینهایت بار مشتقپذیر است ولی در 0 فقط $(n-1)$ بار مشتقپذیر با مشتقهای صفر می‌باشد.

(۲۰ـ۱) چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k

اکنون آماده‌ایم که تقریب درجهٔ k یک تابع را معرفی کنیم. فرض کنیم I یک بازه است، a یک نقطهٔ درونی بازه، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی $(k-1)$ بار مشتقپذیر در سراسر I و k بار مشتقپذیر در نقطهٔ a است، نشان می‌دهیم یک (و تنها یک) چند جمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ k وجود دارد که

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a), \ldots, p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad (1)$$

یعنی این چند جمله‌ای و مشتقات آن تا مرتبهٔ k با تابع f و مشتقات متناظر آن تا مرتبهٔ k در نقطهٔ a تطابق دارند. چند جمله‌ای درجهٔ k مورد نظر $p(x)$ به شکل $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k$ است. با نوشتن $x = (x-a) + a$ و به‌توان رساندن، می‌توانیم $p(x)$ را به‌صورت زیر مرتب کنیم:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_k(x-a)^k \qquad (2)$$

مشتقات $p(x)$ تا مرتبهٔ kـام به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$(۳) \quad \begin{cases} p'(x) = a_۱ + ۲a_۲(x-a) + \ldots + ka_k(x-a)^{k-۱} \\ \vdots \\ p^{(i)}(x) = i!a_i + \ldots + k(k-۱)\ldots(k-(i-۱)a_k(x-a)^{k-i} \\ \vdots \\ p^{(k)}(x) = k!a_k \end{cases}$$

بنابراین در مقایسهٔ (۲) و (۳) با شرط (۱) داریم:

$$a_۰ = f(a),\ a_۱ = f'(a), a_۲ = \frac{۱}{۲!}f''(a), \ldots, a_k = \frac{۱}{k!}f^{(k)}(a)$$

پس ضرایب چند جمله‌ای (۲) از شرط (۱) به‌طور منحصر به‌فرد تعین می‌شوند و داریم:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k. \qquad (۴)$$

این چند جمله‌ای یگانه چند جمله‌ای درجه k است که خود و مشتقات آن تا مرتبهٔ k با f و مشتقات آن تا مرتبهٔ k در نقطهٔ a برابرند $p(x)$ را اینک چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع f در نقطهٔ a یا تقریب درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a می‌نامند. توجه کنید که برای $k = ۱$، تقریب خطی f در نقطهٔ a حاصل می‌شود. نکته این است که برابری مشتقات f با مشتقات p در نقطهٔ a، تا مرتبهٔ k، موجب خواهد شد که به معنایی که در زیر خواهد آمد $f(x)$ و $p(x)$ در نزدیکی نقطهٔ a بسیار هم نزدیک باشند.

(۲ـ۲۰) قضیه اگر $p(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a باشد داریم:

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^k} = ۰ \qquad (۵)$$

توجه کنید که برای $k = ۱$، این همان تعریف خط مماس یا تقریب خطی است. هرچه k بزرگتر باشد $(x-a)^k$ سریعتر کوچک می‌شود وقتی $x \longrightarrow a$، بنابراین تقریب درجهٔ k باید به‌تابع خیلی نزدیک باشد که نسبت $\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^k}$ به‌صفر میل کند.

برهان (۲۰ـ۲) حکم را با استقراء روی k ثابت می‌کنیم. همانطورکه اشاره شد، برای $k = ۱$، تعریف مشتقپذیری یا خط مماس حاصل می‌شود. فرض کنید حکم تا مرتبهٔ $(k-۱)$ ثابت شده است، بدین مفهوم که اگر تابعی g در نقطهٔ a، $(k-۱)$ بار مشتقپذیر باشد و $q(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجه $(k-۱)$ آن در نقطهٔ a باشد داریم

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{g(x)-q(x)}{(x-a)^{k-۱}} = ۰$$

به بیان دیگر، هرگاه $e > ۰$ داده شده باشد، $\delta > ۰$ وجود دارد که:

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |g(x)-q(x)| < e.|x-a|^{k-۱} \qquad (۶)$$

اگر صورت کسر (۵) را به $\varphi(x)$ نمایش دهیم، $\varphi(x) = f(x) - p(x)$، داریم

$$\varphi(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k] \qquad (۷)$$

چون f و چند جمله‌ای $p(x)$ مشتقپذیرند، φ نیز مشتقپذیر است و داریم:

$$\varphi'(x) = f'(x) - [f'(a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-۱)!}(x-a)^{k-۱}] \qquad (۸)$$

چون f در نقطهٔ a، k بار مشتقپذیر است، f' در نقطهٔ a، $(k-۱)$ بار مشتقپذیر می‌شود. به‌علاوه عبارت داخل کروشه چند جمله‌ای تیلور درجهٔ $(k-۱)$ تابع f' در a است، پس طبق فرض استقراء، برای $e > ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد که طبق (۶):

$$۰ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |\varphi'(x)| = |f'(x)-[f'(a)+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{(k-۱)!}(x-a)^{k-۱}]| < e|x-a|^{k-۱}$$

از طرف دیگر طبق قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع مشتقپذیر φ داریم:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c).(x-a)$$

ولی طبق (۷)، $\varphi(a) = ۰$،

$$۰ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x)| < e|c-a|^{k-۱}|x-a|$$

و چون c بین a و x است، $|c-a|<|x-a|$ و در نتیجه:

$$\circ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x)| < e|x-a|^k$$

بنابراین با کوچک گرفتن $|x-a|$ می‌توان $\frac{|\varphi(x)|}{|x-a|^k}$ به‌دلخواه کوچک کرد و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

قضیهٔ ۲.۲۰ معقول بودن چند جمله‌ای تیلور درجه k به‌عنوان تقریبی برای تابع f برای xهای نزدیک a را توجیه می‌کند. قبل از ادامهٔ بحث به چند مثال توجه می‌کنیم.

مثال ۱ چند جمله‌ایهای تیلور درجهٔ k توابع سینوسی و کسینوسی را در $a=\circ$ می‌نویسیم. برای سینوس داریم:

$\sin(\circ)=\circ, \sin'(\circ)=\cos(\circ)=۱, \sin''(\circ)=$ و $\sin'''(\circ)=-\cos(\circ)=-۱$
$-\sin(\circ)=\circ$

و چون مشتق چهارم سینوس همان سینوس می‌شود، از این پس مشتقهای ۰، ۱، ۰ و ۱− تکرار می‌شوند، بنابراین اگر $\sum_{j=\circ}^{k} a_j x^j$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k سینوس در $a=\circ$ باشد، داریم:

$$a_j = \begin{cases} \circ & j \text{ زوج} \\ \pm ۱ & j \text{ فرد} \end{cases}$$

مثلاً چند جمله‌ای تیلور درجه ۱ و درجه ۲ سینوس عبارتند از $p(x)=x$، چند جمله‌ای تیلور درجه ۳ و درجه ۴ سینوس برابر $p(x)=x-\frac{۱}{۳!}x^۳$، و چند جمله‌ای تیلور درجه ۵ و درجهٔ ۶ سینوس برابر $x-\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۱}{۵!}x^۵$ می‌شوند. به‌همین ترتیب برای کسینوس چند جمله‌ای تیلور زیر در $a=\circ$ به‌دست می‌آیند:

۱ چندجمله‌ای تیلور درجه ۱

$۱-\frac{۱}{۲!}x^۲$ چند جمله‌ای تیلور درجه ۲ و ۳

$۱-\frac{۱}{۲!}x^۲+\frac{۱}{۴!}x^۴$ چند جمله‌ای تیلور درجه ۴ و ۵

و غیره.

مثال ۲. چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در $a = 1$ بنویسید. این چند جمله‌ای به‌شکل $\sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(1)}{j!}(x-1)^j$ خواهد بود. برای محاسبه مشتقها داریم $f(x) = x^{-1}$، پس $f'(x) = -x^{-2}$، $f''(x) = 2x^{-3}$، و به‌طور استقرایی می‌بینیم که $f^{(j)}(x) = (-1)^j j! x^{-j-1}$، پس $\frac{f^{(j)}(1)}{j!} = (-1)^j$، و چند جمله‌ای تیلور درجه k تابع در $a = 1$ می‌شود.

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 \pm \ldots + (-1)^k (x-1)^k$$

در اینجا این نکته باید تذکر داده شود که نزدیکی چند جمله‌ای بالا به $\frac{1}{x}$ حوالی $a = 1$ معتبر است ولی مثلاً وقتی x به 0 میل کند، $\frac{1}{x}$ بی‌کران می‌شود در حالی که چند جمله‌ای بالا به $(k+1)$ نزدیک می‌شود. همینطور وقتی x به 2 میل کند، $\frac{1}{x}$ به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند ولی چند جمله‌ای بالا بسته به اینکه k فرد یا زوج باشد به 0 یا 1 میل می‌کند (که میانگین آنها $\frac{1}{2}$ است!).

مثال ۳ چند جمله‌ای تیلو تابع $f(x) = 1 - x + x^4$ از درجات مختلف را در $a = -1$ بنویسید. وقتی تابع داده شده یک چند جمله‌ای باشد لازم نیست از مشتقگیری استفاده کنیم. اگر به‌جای x قرار دهیم $x = (x-a) + a$ و جملات را به‌توانهای داده شده بسط داده به ترتیب درجه مرتب کنیم، چند جمله‌ایها تیلور درجات مختلف ظاهر می‌شوند. توجه کنید که روش یافتن ضرایب چند جمله‌ای تیلور این بود که چند جمله‌ای تیلور را برحسب توانهای $(x-a)$ مرتب کردیم و با مشتقگیری متوالی دریافتیم که ضریب جمله $(x-a)^j$ همان $\frac{f^{(j)}(a)}{j!}$ است. بنابراین در این مثال:

$$f(x) = 1 - ((x+1) - 1) + ((x+1) - 1)^4$$

$$f(x) = 3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4 \tag{۹}$$

بنابرای چند جمله‌ایهای تیلور درجه ۱، ۲ و ۳ تابع در $a = -1$ عبارتند از به‌ترتیب $3 - 5(x+1)$، $3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2$، و $3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3$. چند جمله‌ایهای تیلور درجه ۴ به بالای تابع، همان طرف راست عبارت (۹) هستند که دقیقاً برابر خود تابع می‌شوند.

بالاخره برای استفاده از تقریب درجهٔ k، همانطورکه در حالت خاص تقریب خطی عمل کردیم، باید دستوری برای تخمین خطا ارائه کنیم. قضیهٔ زیر تعمیم و ضعیت تقریب خطی است.

(۲۰ـ۳) قضیه فرض کنید تابع f در سراسر بازهٔ باز I، $(k+1)$ بار مشتقپذیر است و $a \in I$. اگر $p(x)$ چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a باشد، برای هر x در I داریم:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}.(x-a)^{k+1} \qquad (10)$$

که در اینجا c نقطه‌ای بین a و x است.

توجه کنید که به‌ازای $k = 1$، دقیقاً تخمین خطای تقریب خطی به‌دست می‌آید. عبارت طرف راست (۱۰) را گاهی باقیماندهٔ لاگرانژ سری تیلور می‌نامند.

اثبات ۲۰ـ۳ دقیقاً مانند حالت $k = 1$ است. نخست تعمیم زیر از قضیهٔ رُل را بیان می‌کنیم که اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود:

(۲۰ـ۴) فرض کنید تابع f دربارهٔ I، $(k+1)$ بار مشتقپذیر باشد، $a < b$ دو نقطهٔ I باشند، و داشته باشیم:

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k)}(a) = f(h) = 0$$

در اینصورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f^{(k+1)}(c) = 0$. $\square$

حال همانطور که در حالت $k = 1$ عمل کردیم، یک چند جمله‌ای درجه $(k+1)$ در نظر می‌گیریم.

$$Q(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_k(x-a)^k + c_{k+1}(x-a)^{k+1}$$

که $Q(a) = (a)$، $Q'(a) = f'(a), \ldots, Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ و $Q(b) = f(b)$. مقایسه f و Q با مشتقگیری نتیجه می‌دهد که $c_0 = f(a)$، $c_1 = f'(a)$،...، $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$، و $c_{k+1} = \frac{f(b)-p(b)}{(b-a)^{k+1}}$. حال با به‌کارگرفتن (۲۰ـ۴) در مورد تابع $f(x) - Q(x)$، حکم (۱۰) نتیجه می‌شود: جزئیات کاملاً مشابه اثبات در حالت $k = 1$ است و به‌خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۴ اگر برای تقریب $\sin\frac{1}{10}$ (البته $\frac{1}{10}$ به‌رادیان) از تقریب $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3$ استفاده کنیم، کرانی بالایی برای خطا به‌دست آورید.

توجه کنید که $x - \frac{1}{3!}x^3$ هم تقریب درجه ۳ و هم تقریب درجه ۴ تابع $\sin$ در $a = 0$ است. اگر این چندجمله‌ای را تقریب درجهٔ ۴ محسوب می‌کنیم تخمین دقیقتری به‌دست خواهد آمد زیرا که در طرف راست (۱۰)، کمیت کوچک $x - a = \frac{1}{10}$ به‌توان بالاتری رسانده می‌شود. طبق (۱۰) داریم:

$$\text{خطا} = \frac{1}{5!} f^{(5)}(c).(\frac{1}{10})^5$$

مشتق پنجم سینوس برابر کسینوس است که در بازه $]0, \frac{1}{10}[$ از ۱ کوچکتر است، پس

$$\text{خطا} = \frac{1}{5!}.10^{-5} = \frac{1}{1/2}10^{-7}$$

اگر از قرار داد روند کردن استفاده کنیم، با توجه به اینکه $\frac{1}{5!}10^{-5} < \frac{1}{2}10^{-6}$، بسط اعشاری تقریب تا ۶ رقم پس از اعشار با مقدار واقعی تطابق دارد.

مثال ۵. فرض کنید می‌خواهیم از چند جمله‌ای تیلور درجه k به‌دست آمده در مثال ۲ برای $\frac{1}{x}$ استفاده کنیم. $\frac{1}{1/01}$ را به صورت

$$1 - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{10^{2k}}$$

تقریب می‌زنیم. خطای این تقریب را تخمین بزنید.

این مثال را از دو طریق بررسی خواهیم کرد. از روش باقیماندهٔ لاگرانژ، طبق (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned}\text{خطا} &= \tfrac{1}{(k+1)!}\ f^{(k+1)}(c).(\tfrac{1}{100})^{k+1}\\ &= \tfrac{1}{(k+1)!}(k+1)!(-1)^{k+1}\tfrac{1}{c^{k+2}}.\tfrac{1}{(10)^{2k+2}}\end{aligned}$$

که c بین ۱ و ۱/۰۱ است. برای یافت کران بالایی، c را که در مخرج است برابر ۱ می‌گیریم، پس

$$\text{خطا} < 10^{-2k-2}$$

در این مثال خاص می‌توان خطا را که یک سری هندسی است به‌طور دقیق محاسبه کرد. توجه کنید که

$$\frac{۱}{۱/۰۱} = \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱۰۰}} = \sum_{j=۰}^{\infty}(-۱)^j \frac{۱}{۱۰۰^j}$$

بنابراین تقریب ارائه شده جملات این سری تا $j = k$ هستند و باقیمانده (=خطا) می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_{j=k+۱}^{\infty}(-۱)^j(۱۰۰)^{-j} &= (-۱)^{k+۱}(۱۰۰)^{-k-۱}\sum_{j=۰}^{\infty}(-۱)^j(۱۰۰)^{-j}\\ &= (-۱)^{k+۱}(۱۰۰)^{-k-۱}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱۰۰}}\\ &= (-۱)^{k+۱}\frac{(۱۰۰)^{-k}}{۱۰۱}\end{aligned}$$

یا $\frac{(۱۰)^{-۲k-۲}}{۱/۰۱} =$ |خطا| که کمی دقیقتر از کران بالایی به‌دست آمده از باقیماندهٔ لاگرانژ است.

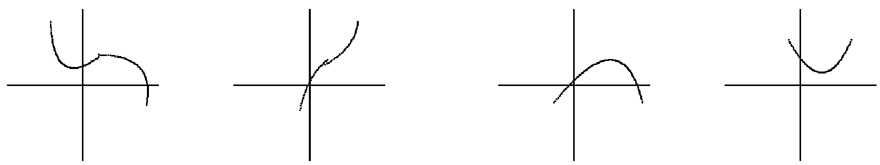
(۲۰ـ۵) کاربرد در بررسی نقاط بحرانی

آزمون مشتق دوم برای بررسی نقاط بحرانی وقتی نتیجه می‌داد که مشتق دوم تابع در نقطهٔ بحرانی ناصفر باشد. در اینجا با استفاده از ۲۰ـ۲ آزمون مشتق دوم را طوری تعمیم می‌دهیم که بسیاری حالاتی که در آن مشتق دوم نیز صفر می‌شود در بر می‌گیرد. نخست با اندکی شرط اضافی مبنای شهودی آزمونی را که ارائه خواهیم کرد ارائه می‌کنیم. فرض کنید تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ در بازهٔ I، $(k + ۱)$ بار مشتق‌پذیر است، مشتقات f در نقطهٔ درونی a از بازهٔ I تا مرتبهٔ $(k - ۱)$ همه صفر هستند و $f^{(k)}(a) \neq ۰$ در اینصورت چند جمله‌ای تیلور درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a به‌شکل $f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ می‌باشد. عدد $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ را به α نمایش می‌دهیم طبق (۱۰) داریم:

$$f(x) = f(a) + \alpha(x - a)^k + \frac{f^{(k+۱)}(c)}{(k + ۱)!}(x - a)^{k+۱}$$

فرض کنید $|f^{(k+۱)}(c)|$ در نزدیکی نقطهٔ a دارای کرانی M است (اگر $f^{(k+۱)}(x)$ پیوسته باشد، چنین کرانی موجود است). در اینصورت برای مقادیر x نزدیک a که برای آن $|x - a|$ کوچک است. انتظار داریم $(x - a)^{k+۱}$ در قدر مطلق به‌طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از قدر مطلق $(x - a)^k$ باشد. بنابراین انتظار داریم شکل تقریبی نمودار f در نزدیکی $x = a$ مشابه $f(a) + \alpha(x - a)^k$ باشد. در شکل

۱ وضعیت نمودار $f(a) + \alpha(x-a)^k$ را در چهار حالت ممکن، بسته به این که $\alpha > 0$ یا $\alpha < 0$، k زوج یا فرد نمایش داده‌ایم. توجه کنید که اگر k زوج باشد،تابع در نقطهٔ a ماکسیمم



$\alpha > 0$، k زوج $\alpha < 0$، k زوج $\alpha > 0$، k فرد $\alpha < 0$، k فرد

(الف) (ب) (ج) (د)

یا مینی‌موم موضعی دارد بسته به اینکه $\alpha < 0$ یا $\alpha > 0$. وقتی k فرد باشد، نقطهٔ a نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی زیرا که $(x-a)^k$ در $x = a$ تغییر علامت می‌دهد. در واقع این مطلب را می‌توان بدون شرط اضافی وجود مشتق $(k+1)$ام مستقیماً از ۲۰ − ۲ نتیجه گرفت:

(۲۰ـ۶) آزمون مشتق kـام

فرض کنید تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ تعریف خود دارای مشتق تا مرتبهٔ kـام است $(k \geq 2)$، مشتقات آن در نقطهٔ a تا مرتبهٔ $(k-1)$ همه صفر هستند و $f^{(k)}(a) \neq 0$:

$$f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0$$

در اینصورت:

(الف) اگر k زوج باشد نقطهٔ a یک مینی‌موم یا ماکسیمم موضعی است بسته به‌اینکه $f^{(k)}(a) > 0$ یا $f^{(k)}(a) < 0$.

(ب) اگر k فرد باشد، نقطهٔ a نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی.

برهان. چند جمله‌ای تیلورد درجهٔ k تابع f در نقطهٔ a هست $f(a)+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. طبق ۱۰ـ۲:

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^k}=0$$

پس

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}-\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)\right]=0$$

جملهٔ $\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ مثبت یا منفی است و عددی ثابت است. بنابراین برای x به‌اندازه کافی نزدیک a، $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ باید همعلامت $f^{(k)}(a)$ باشد. اگر k زوج باشد، $(x-a)^k>0$، پس $f(x)-f(a)$ همعلامت $f^{(k)}(a)$ است (برای x نزدیک a). در نتیجه اگر $f^{(k)}(a)>0$، داریم $f(x)>f(a)$ و a یک نقطهٔ مینی‌موم موضعی است، و اگر $f^{(k)}(a)<0$، نتیجه می‌شود که $f(x)<f(a)$ و a یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی است. اگر k فرد باشد، $(x-a)^k$ در $x=a$ تغییر علامت می‌دهد، پس $f(x)-f(a)$ نیز باید در $x=a$ تغییر علامت دهد که علامت $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ همانند علامت $f^{(k)}(a)$ باقی بماند. بنابراین در یک طرف a، $f(x)<f(a)$، و در طرف دیگر، $f(x)>f(a)$ و a نمی‌تواند ماکسیمم یا مینی‌موم موضعی باشد. $\square$

مثال ۶. وضعیت نقطهٔ $x=0$ برای تابع f که به‌صورت $f(x)=x^6\cos x-x^5\sin x$ تعریف شده است بررسی کنید.

می‌نویسیم $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cos c_1$ که c_1 نقطه‌ای بین 0 و x است، و نیز $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cos c_2$، که c_2 نقطه‌ای بین $0, x$ است. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6(1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}\cos c_2)-x^5(x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}\sin c_1)\\ &= (-\tfrac{1}{3})x^8+x^{10}(\tfrac{1}{4!}\cos c_2-\tfrac{1}{5!}\sin c_1)\end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز در قدر مطلق از $\frac{1}{5!}+\frac{1}{4!}$ بیشتر نیست و برای $|x|$ کوچک، جملهٔ $(-\frac{1}{3})x^8$ غالب است. در واقع از تساوی بالا می‌بینیم که مشتقات f تا مرتبهٔ ۷ در $x=0$ همه صفر هستند و $f^{(8)}(0)=(-\frac{1}{3})(8!)<0$. بنابراین f در نقطهٔ صفر یک ماکسیمم موضعی دارد.

مثال ۷. نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x^{۲} - ۲x)^{۱۰۰}$ را بررسی کنید.

داریم $f'(x) = ۱۰۰(x^{۲} - ۲x)^{۹۹}(۲x - ۲)$، پس سه‌نقطهٔ بحرانی $x = ۰, ۱, ۲$ به‌دست می‌آیند. در واقع می‌توان نوشت $f(x) = x^{۱۰۰}(x - ۲)^{۱۰۰}$ و از این عبارت واضح است که $x = ۰, ۲$ مینی‌موم موضعی برای تابع هستند زیرا که مقدار تابع در این نقاط صفر است و در سایر نقاط مثبت. از طرفی دیگر، این تابع، که پیوسته است، باید در $[۰, ۲]$ ماکسیمم داشته باشد و در این نقطهٔ ماکسیمم که لزوماً یک نقطهٔ درونی است، مشتق f باید صفر شود. پس لزوماً $x = ۱$ نقطهٔ ماکسیمم واقع در $[۰, ۲]$ است. به این ترتیب وضعیت هر سه نقطه را می‌توان از ملاحظات ابتدایی روشن ساخت. ولی همین نتایج را اکنون با توجه به آزمون ۲۰ـ۶ به‌دست می‌آوریم. در نقطهٔ $x = ۰$ تابع را به‌صورت توانهای x بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{۱۰۰}(x - ۲)^{۱۰۰} = x^{۱۰۰}\left(\sum_{j=۰}^{۱۰۰}\binom{۱۰۰}{j}x^{j}(-۲)^{۱۰۰-j}\right) \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰}(-۱)^{j}(۲)^{۱۰۰-j}\binom{۱۰۰}{j}x^{۱۰۰+j} \end{aligned}$$

عبارت طرف راست لزوماً چند جمله‌ای تیلور درجه ≥ ۲۰۰ تابع f در نقطهٔ صفر است. از این عبارت می‌بینیم که مشتقات f تا مرتبهٔ ۹۹ در ۰ همه صفر هستند و $f^{(۱۰۰)}(۰) = (۱۰۰!)۲^{۱۰۰} > ۰$، پس $x = ۰$ یک مینی‌موم موضعی است. همینطور در نقطهٔ ۲:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((x - ۲) + ۲)^{۱۰۰}(x - ۲)^{۱۰۰} \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰}\binom{۱۰۰}{j}(x - ۲)^{j}۲^{۱۰۰-j}(x - ۲)^{۱۰۰} \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰}۲^{۱۰۰-j}\binom{۱۰۰}{j}(x - ۲)^{۱۰۰+j} \end{aligned}$$

مجدداً در اینجا مشتقات f تا مرتبهٔ ۹۹ در $x = ۲$ صفر می‌شوند و $f^{(۱۰۰)}(۲) = (۱۰۰!)۲^{۱۰۰}$ و

$x = ۲$ یک مینی‌موم موضعی است. بالاخره برای $x = ۱$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((x-۱)+۱)^{۱۰۰}((x-۱)-۱)^{۱۰۰} = ((x-۱)^۲-۱)^{۱۰۰} \\ &= \sum_{j=۰}^{۱۰۰} \binom{۱۰۰}{j} (-۱)^j (x-۱)^{۲j} \\ &= ۱ - ۱۰۰(x-۱)^۲ + \dots \end{aligned}$$

در اینجا مشتق دوم تابع در $x = ۱$ منفی است و یک ماکسیمم موضعی به‌دست می‌آید.