اعداد حقیقی (۱)

اعداد اولین بار در رابطه با امر شمارش ظاهر شدند. اعداد طبیعی:

$$۱, ۲, ۳, \ldots$$

وسیلهٔ سنجش تعدد اشیاء در یک مجموعهٔ مشخص‌اند. از آنجا که کمیت‌های مورد اندازه‌گیری همیشه به صورت گسسته و مجزا ظاهر نمی‌شوند، انسان از دیرباز دریافت که برای سنجش میزان کمیت، شمارش و اعداد طبیعی کفایت نمی‌کنند، بلکه باید نسبت دو کمیت از یک جنس را نیز نوعی عدد تلقی کرد. مقایسهٔ وزن اجسام و طول پاره‌خط‌ها از این جمله‌اند. برای انجام مقایسهٔ دو کمیت، شیئی همجنس با دو شیء مورد مقایسه ولی کوچکتر از آنها در نظر گرفته می‌شود که اندازهٔ هر شیء مضرب صحیحی از اندازهٔ آن باشد. در شکل ۱ دو پاره‌خط $L_۰$ و $L_۱$ نمایش داده شده‌اند و پاره‌خطی L که ۵ بار در $L_۰$ و ۳ بار در $L_۱$ می‌گنجد. در این صورت نسبت طول $L_۰$ به طول $L_۱$ را به $\frac{۵}{۳}$ نمایش می‌دهند. نسبت‌های $\frac{m}{n}$ که در آن m و n عدد طبیعی باشند امروزه اعداد گویا یا کسرهای متعارف می‌نامیم. ریاضیدان یونانی یودوکسوس[۱] حدود ۴ قرن قبل از میلاد کسرها را به طور جامع بررسی کرد و نظریهٔ او در فصل پنجم کتاب اصول اقلیدس (قرن سوم قبل از میلاد) نقل شده است. هرگاه پاره‌خطی L به عنوان مرجع یا واحد در نظر گرفته شود، n یک عدد طبیعی باشد، و L' پاره‌خطی که L دقیقاً n بار در آن می‌گنجد، نسبت طول L' به طول L برابر $\frac{n}{۱}$ است. از آنجا که طول L' را می‌توان نتیجهٔ n بار شمارش طول L در نظر گرفت، تمایزی میان $\frac{n}{۱}$ و n قایل نمی‌شویم و از این رو مجموعهٔ اعداد گویا را گسترشی از مجموعهٔ اعداد طبیعی تلقی می‌کنیم.

---

[۱] Eudoxus

به طور کلی دو کمیت از یک جنس را همسنگ می‌نامیم در صورتی که کمیتی از همان جنس (به عنوان "واحد" یا "سنگه") وجود داشته باشد که اندازهٔ هر یک از کمیت‌های داده شده مضرب صحیحی از اندازهٔ سنگه باشد. در شکل ۱، طول پاره‌خط‌های $L_{\circ}$ و $L_{۱}$ همسنگ هستند و می‌توان از طول L به عنوان سنگه استفاده کرد. در عمل به نظر می‌آید باید بتوان برای مقایسهٔ هر دو کمیت همجنس، واحدی به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب کرد که هر دو کمیت مضرب صحیحی از آن واحد باشند، یا به عبارتی دیگر، به نظر می‌آید که هر دو کمیت همجنس، همسنگ باشند. برای تأکید بر اهمیت مسأله، موضوع را به صورت یک سؤال مطرح می‌کنیم:

سؤال. آیا هر دو کمیت همجنس، همسنگ نیز هستند؟

اینکه جواب این سؤال منفی است ظاهراً در قرن پنجم پیش از میلاد توسط هیپاسوس[۲] کشف شد و بحرانی در فلسفه و علم باستان پدید آورد. فیثاغورسیان اعتقاد داشتند که اعداد (صحیح) به نوعی منشاء و عنصر ساخت همهٔ هستی‌اند و این کشف هیپاسوس که دو پاره‌خط وجود دارد که نمی‌توان هر دو را با یک واحد مشترک شمرد بنیاد تفکر آنها را متزلزل ساخت. استدلال هیپاسوس را بعداً خواهیم آورد ولی استدلال ساده زیر که دو قرن بعد در جزوهٔ دهم کتاب اصول اقلیدس ظاهر می‌شود اندکی بعد کشف شد. در اینجا نشان داده می‌شود که طول ضلع مربع و طول قطر آن همسنگ نیستند، یا به زبان امروزی نسبت این دو طول یک عدد گویا نیست. اگر طول ضلع مربع را l بگیریم، طول قطر آن طبق قضیهٔ فیثاغورس برابر $l\sqrt{۲}$ است و نسبت طول قطر به طول ضلع برابر $\sqrt{۲}$ می‌شود. روش ارائه شده در کتاب اقلیدس برای اثبات ناگویا بودن $\sqrt{۲}$، برهان خلف است. فرض می‌کنیم $\sqrt{۲} = \frac{M}{N}$ که در آن M و N عدد صحیح هستند. کسر $\frac{M}{N}$ را تا حد ممکن با حذف مقسوم‌علیه‌های مشترک ساده می‌کنیم تا به صورت $\frac{m}{n}$ در آید، پس $\sqrt{۲} = \frac{m}{n}$ در وضعیتی است که m و n مقسوم‌علیه مشترک ندارند. با مجذور کردن دو طرف داریم $۲n^{۲} = m^{۲}$، پس $m^{۲}$ زوج است پس $m = ۲k$ و نتیجه می‌گیریم که $n^{۲} = ۲k^{۲}$. باز به ترتیب بالا n باید خود زوج باشد، $n = ۲l$. حال m و n هر دو زوج هستند، یعنی هر دو بر ۲ قابل قسمت‌اند در حالی که فرض شده بود m و n مقسوم‌علیه مشترک ندارند. این تناقض نشان می‌دهد که

[۲] Hippasus

بیان $\sqrt{۲}$ به صورت $\frac{m}{n}$ ممکن نیست، یعنی $\sqrt{۲}$ گویا نیست، و به بیانی دیگر طول ضلع و طول قطر مربع همسنگ نیستند.

در واقع می‌توان به سادگی ثابت کرد که اگر n خود مجذور کامل نباشد $\sqrt{n}$ گویا نیست. در قطعهٔ ۱۴۷ کتاب تئه‌تتوس افلاطون[۳] (قرن چهارم پیش از میلاد) اشاره می‌شود که ریاضیدان یونانی تئودروس این مطلب را تا $n = ۱۷$ به اثبات رسانده است. در جای دیگری از آثار افلاطون یکی از مناظره‌کنندگان از جهل آتنی‌ها نسبت به اعداد ابراز شرمساری کند و بالاخص اینکه اکثر مردم به وجود کمیت‌های ناهمسنگ آگاهی نداشتند.

در اینجا آنچه به ظن قوی کشف هیپاسوس از نسبت‌های ناگویا بوده است نقل می‌کنیم. علامت ویژهٔ فیثاغورسیان موسوم به پنتاگرام یک پنج‌ضلعی منتظم بود. در یک چنین پنج‌ضلعی با رسم قطرها پنج‌ضلعی منتظم دیگری در داخل ساخته می‌شود و می‌توان این کار را همواره ادامه داد (شکل ۲). نشان می‌دهیم چگونه مقایسهٔ نسبت طول قطر پنج‌ضلعی منتظم به طول ضلع آن یک کمیت ناگویا به‌دست می‌دهد. به طور کلی فرض کنید $a_۰$ و $a_۱$ دو کمیت همجنس باشند (مثلاً طول‌های دو پاره‌خط) و $a_۱ < a_۰$. اگر $a_۱$ دقیقاً $n_۱$ بار در $a_۰$ بگنجد، $n_۱$: عدد طبیعی، آنگاه $a_۰$ و $a_۱$ همسنگ هستند و داریم $a_۰ = n_۱ a_۱$. در هر صورت $n_۱$ را بزرگترین عدد طبیعی می‌گیریم که $n_۱ a_۱$ از $a_۰$ تجاوز نکند و داریم

$$a_۰ = n_۱ a_۱ + a_۲ \quad , \quad ۰ \leq a_۲ < a_۱ \qquad (۱)$$

ملاحظه کردیم که اگر $a_۲ = ۰$، $a_۱$ خود سنگهٔ مناسب برای مقایسه $a_۰$ و $a_۱$ است. حال فرض کنید $a_۲ \neq ۰$. در اینجا $a_۲$ را به حداکثر دفعات ممکن در $a_۱$ می‌گنجانیم یعنی بزرگترین عدد طبیعی $n_۲$ را انتخاب می‌کنیم که $n_۲ a_۲ \leq a_۱$. پس:

$$a_۱ = n_۲ a_۲ + a_۳ \quad , \quad ۰ \leq a_۳ < a_۲ \qquad (۲)$$

اگر $a_۳ = ۰$، آنگاه $a_۱$ مضرب صحیحی از $a_۲$ است. از (۱) می‌بینیم که در این صورت $a_۰$ نیز مضرب صحیحی از $a_۲$ خواهد شد و بدین ترتیب $a_۲$ سنگهٔ مناسب برای سنجش $a_۰$ و $a_۱$ است. اگر $a_۳ \neq ۰$،

[۳] دورهٔ آثار افلاطون (جلد پنجم و هفتم)، ترجمه محمدحسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۵۷).

این فرایند را ادامه داده می‌نویسیم:

$$a_2 = n_3 a_3 + a_4 \quad , \quad 0 \le a_4 < a_3 \tag{3}$$

که در آن n_3 یک عدد طبیعی است. مجدداً اگر $a_4 = 0$ با دنبال کردن (۳)، (۲) و (۱) می‌بینیم که a_3 سنگه‌ای برای سنجش a_1 و a_0 است و گرنه ادامه می‌دهیم. ادعا می‌کنیم:

(۱—۱) گزاره. a_0 و a_1 همسنگ هستند اگر و تنها اگر فرایند بالا در تعدادی متناهی گام به باقیماندهٔ صفر برسد، یعنی عدد طبیعی k وجود داشته باشد که $a_{k-1} = n_k a_k$، n_k: عدد طبیعی. در این صورت a_k سنگه‌ای برای سنجش a_0 و a_1 است.

اثبات. اگر فرایند فوق در k گام به صفر برسد داریم:

$$\left\{\begin{array}{lll}
a_0 = n_1 a_1 + a_2, & 0 < a_2 < a_1 & n_1 : \text{عدد طبیعی} \\
a_1 = n_2 a_2 + a_3, & 0 < a_3 < a_2 & n_2 : \text{عدد طبیعی} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k-2} = n_{k-1} a_{k-1} + a_k, & 0 < a_k < a_{k-1} & n_{k-1} : \text{عدد طبیعی} \\
a_{k-1} = n_k a_k & & n_k : \text{عدد طبیعی}
\end{array}\right. \tag{4}$$

رابطهٔ آخر نشان می‌دهد a_{k-1} مضرب صحیحی از a_k است، پس از رابطه یکی به آخر a_{k-2} مضربی از a_k است، و به همین ترتیب با صعود به دو رابطهٔ اول نتیجه می‌شود که a_0 و a_1 هر دو مضرب صحیحی از a_k هستند، یعنی a_k سنگه‌ای برای سنجش a_0 و a_1 است. بالعکس فرض کنید a_0 و a_1 همسنگ باشند، در این صورت عددی $u > 0$ به عنوان سنگه وجود دارد که a_0 و a_1 هر دو مضرب صحیحی از u هستند. از رابطهٔ اول بالا نتیجه می‌شود که a_2 نیز مضربی صحیح از u است، سپس از رابطه بعد a_3 مضربی صحیح از u است، و به همین ترتیب اگر ثابت شده باشد که $a_0, a_1, \ldots, a_p$ مضرب صحیح u هستند و رابطهٔ بعدی به شکل

$$a_{p-1} = n_p a_p + a_{p+1}$$

باشد، نتیجه می‌گیریم که $a_{p+۱} = a_{p-۱} - n_p a_p$ مضرب صحیحی از u است. حال اگر این فرایند به باقیماندهٔ صفر نرسد، دنباله باقیمانده‌ها به صورت نزولی زیر است:

$$a_۱ > a_۲ > a_۳ > \cdots$$

که در اینجا همهٔ a_j ها مضرب صحیحی از عدد مثبت u می‌باشند. چنین وضعیتی غیرممکن است زیرا که بین دو عدد u و $a_۱$ فقط تعدادی متناهی مضرب صحیح u می‌گنجد. این امر نشان می‌دهد که اگر $a_۰$ و $a_۱$ همسنگ باشند، فرایند بالا بالاخره به باقیمانده صفر می‌رسد و آخرین مقسوم‌علیه به‌دست آمده سنگه لازم است. □

با اتکاء به مطلب بالا و استدلالی هندسی، هیپاسوس نشان داد نسبت‌های قطر و ضلع پنج‌ضلعی منتظم همسنگ نیستند بدین ترتیب که اگر فرایند فوق برای آنها پیاده شود هیچگاه به باقیمانده صفر نمی‌رسیم. به شکل (۲) توجه کنید. از تساوی زوایای داخلی و اضلاع پنج‌ضلعی منتظم مشاهده می‌کنیم که هر قطر موازی ضلعی است که از هیچ یک از دو انتهای آن نمی‌گذرد: $AC\|ED$، $BE\|CD$، . . . . بنابراین مثلث‌های ABC و $EB'D$ به اضلاع دو به دو موازی متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB'}{ED}$$

طول قطر پنج‌ضلعی را $a_۰$ و طول ضلع آن را $a_۱$ می‌نامیم. از آنجا که زوایای داخلی پنج‌ضلعی باز هستند ($=۱۰۸^\circ$) داریم $a_۰ > a_۱$. چون چهارضلعی $ABCB'$ متوازی‌الاضلاع است داریم $EB' = a_۰ - a_۱$. پس

$$\frac{a_۱}{a_۰} = \frac{a_۰ - a_۱}{a_۱}$$

$a_۰ - a_۱$ را به $a_۲$ نمایش می‌دهیم. داریم $a_۲ < a_۱$ زیرا که در مثلث $EB'D$ هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. پس:

$$a_۰ = ۱ \cdot a_۱ + a_۲ \quad , \quad ۰ < a_۲ < a_۱$$

حال $a_۱ - a_۲$ را به $a_۳$ نمایش می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که $a_۳$ برابر طول پنج‌ضلعی منتظم کوچک $A'B'C'D'E'$ است زیرا که طول AB' برابر $a_۱$ و طول AC' برابر $a_۲$ است. از طرفی دیگر طول قطر

$A'B'C'D'E'$ برابر $a_۲$ است زیرا که اگر از A' به D' و C' وصل کنیم متوازی الاضلاعی ایجاد می‌شود ($A'D'$ و AD هر دو موازی BC هستند؛ $A'C'$ و AC هر دو موازی DE) بنابراین $a_۳ < a_۲$ و داریم:

$$a_۱ = ۱ \cdot a_۲ + a_۳ \quad , \quad ۰ < a_۳ < a_۲$$

حال اگر پنج‌ضلعی منتظم $A'B'C'D'E'$ به ضلع $a_۳$ و قطر $a_۲$ را در نظر بگیریم، مجدداً وضعیت پنج‌ضلعی متشابه $ABCDE$ با طول ضلع و طول قطر به ترتیب $a_۱$ و $a_۰$ تکرار می‌شود، یعنی خواهیم داشت

$$a_۲ = ۱ \cdot a_۳ + a_۴ \quad , \quad ۰ < a_۴ < a_۳$$

$$a_۳ = ۱ \cdot a_۴ + a_۵ \quad , \quad ۰ < a_۵ < a_۴$$

به طور کلی اگر a_i ها تا a_n تعریف شده باشند، با تعریف $a_{n+۱} = a_{n-۱} - a_n$، و با توجه به اینکه همواره با رسم کردن قطرهای پنج‌ضلعی منتظم یک پنج‌ضلعی منتظم دیگر در درون پنج‌ضلعی پدید می‌آید خواهیم داشت:

$$a_{n-۱} = ۱ \cdot a_n + a_{n+۱} \quad , \quad ۰ < a_{n+۱} < a_n$$

بدین ترتیب در وضعیت گزاره ۱—۱ هستیم و در شِقی که هرگز باقیمانده به صفر نمی‌رسد، پس $a_۰$ و $a_۱$ همسنگ نیستند، یا به عبارت دیگر $\frac{a_۰}{a_۱}$ ناگویا است!

تمرین ۱. نشان دهید $\frac{a_۰}{a_۱} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$. این نسبت به نسبت طلایی معروف است و خواص ریاضی جالب توجهی دارد که بعضی از دوران باستان شناخته شده بودند. بالاخص یونانیان "زیباترین" مستطیل از نظر تناسب اضلاع را، مستطیلی می‌دانستند که نسبت طول به عرض آن برابر نسبت طلایی باشد. نشان دهید این مستطیل‌ها، و فقط این مستطیل‌ها، این ویژگی را دارند که اگر از آنها یک مربع به ضلع عرض مستطیل داده شده برداشته شود، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه است.

تمرین ۲. نشان دهید اگر عدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، $\sqrt{n}$ ناگویا است. (راهنمایی: از تجزیه اعداد طبیعی به عوامل اول استفاده کنید.)

در اینجا باید به این مطلب اشاره شود که نظام عددنویسی متداول امروز به صورت اعشاری (یا هر مبنای دیگر) در زمان یونان باستان وجود نداشت. یک نسبت گویا که مطابق (۱−۱) در k گام به سنگه می‌رسد به صورت زیر نمایش داده می‌شد:

$$n_۱ + \cfrac{۱}{n_۲ + \cfrac{۱}{n_۳ + \cfrac{۱}{\ddots\, n_{k-۱} + \frac{۱}{n_k}}}} \qquad (۵)$$

چنین عبارتی را یک کسر مسلسل متناهی (یا مختومه) می‌نامند. توجه کنید که طبق (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_۰}{a_۱} &= n_۱ + \frac{a_۲}{a_۱} = n_۱ + \frac{۱}{\frac{a_۱}{a_۲}} \\ &= n_۱ + \frac{۱}{n_۲ + \frac{a_۳}{a_۲}} = n_۱ + \frac{۱}{n_۲ + \frac{۱}{\frac{a_۲}{a_۳}}} \end{aligned}$$

و با ادامهٔ استفاده از (۴) به (۵) می‌رسیم. در مورد نسبت‌های ناگویا کسر مسلسل مختومه نمی‌شود. مثلاً در مورد نسبت طلایی نمایش زیر به‌دست می‌آید:

$$\cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{\ddots\, ۱ + \cdots}}} \qquad (٦)$$

کسرهای مسلسل امروزه نیز در ریاضیات کاربردهای مهم دارند، نه برای نمایش روزمرهٔ اعداد، بلکه به منظور محاسبات تقریبی دقیق و نیز در پاره‌ای مقولات نظری.

با روش امروزی عددنویسی (به پایهٔ ۱۰ یا هر پایهٔ دیگر)، می‌توان رهیافت ساده‌ای برای اثبات وجود نسبت‌های ناگویا مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نسبت $\frac{m}{n}$، m و n دو عدد طبیعی، را به صورت اعشاری بنویسیم. به روش معمولی تقسیم اگر m بر n بخش‌پذیر باشد که به یک عدد طبیعی می‌رسیم. و گرنه، پس از استفاده از همهٔ ارقام m، باقیمانده‌ای حاصل می‌شود که از n کوچکتر و از صفر بزرگتر است. در این صورت با افزودن یک صفر به طرف راست باقیمانده به عمل تقسیم ادامه می‌دهیم. هر بار عددی کوچکتر از به عنوان باقیمانده به‌دست می‌آید. اگر این باقیمانده زمانی صفر شود به عددی به شکل $c_۰/c_۱c_۲\ldots c_k$ رسیده‌ایم به معنای

$$c_۰ + \frac{c_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{c_k}{۱۰^k}$$

است. اگر باقیمانده هیچگاه صفر نشود، هر باقیمانده باید یکی از اعداد $۱, ۲, \ldots, n - ۱$ باشد، بنابراین قطعاً با n بار تکرار، باقیمانده‌ای برای بار دوم ظاهر خواهد شد. از آن پس ارقام اعشاری به صورت اولین ظهور این باقیمانده تکرار خواهند شد. بنابراین اگر نمایش اعشاری $\frac{m}{n}$ مختومه نشود، ارقام پس از اعشار مالاً به صورت تناوبی تکرار خواهند شد. بنابراین هر کسر اعشاری که مالاً تناوبی نباشد نمی‌تواند نمایشگر یک عدد گویا باشد. بدین ترتیب، مثلاً:

$$۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱\ldots$$

که در آن طول بلوک‌های صفر هر بار یکی نسبت به قبلی افزایش می‌یابد و امکان تناوب در آن وجود ندارد برابر هیچ کسر $\frac{m}{n}$ نیست. تنها سؤالی که می‌ماند این است که آیا عبارت بالا واقعاً یک "عدد" است؟ یا به طور کلی، آیا می‌توان هر عبارت به شکل

$$c_۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$$

که در آن $c_۰$ یک عدد صحیح نامنفی و بقیهٔ c_i ها رقم (یعنی اعداد ۰ تا ۹) هستند یک "عدد" تلقی کرد؟ برای پاسخ به این سؤال لازم است که مفهوم "عدد" به طور دقیق‌تر بررسی شود و این در جلسه آینده انجام خواهد شد.