بهینه سازی

یکی ازکاربردهای بسیار معمول مشتق در مسایل بهینه‌سازی است. مقصود از بهینه سازی یافتن ماکسیمم یا مینی‌موم یک تابع با تنظیم مناسب متغیرهای تابع است. در اینجا ما با تابع یک متغیری سروکار داریم یعنی تابعهای به شکل $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ که S زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. نمونه‌هایی از مسایل بهینه‌سازی که در عمل به آن بر می‌خوریم مسایل زیرند: یافتن سرعتی که اتومبیل با آن سرعت، بهترین راندمان $\frac{\text{کیلومتر}}{\text{لیتر}}$ را داشته باشد (مثال جلسهٔ قبل)، یافتن میزان تولید یک کالا به‌طوری که سود حاصل از فروش حداکثر ممکن باشد، یافتن مناسبترین ابعاد برای یک قوطی حلبی استوانه شکل با حجم ثابت به‌طوری‌که کمترین مقدار حلبی در ساخت آن به کارگرفته شود، ... معمولاً دامنهٔ تابع f یک بازه از اعداد حقیقی است که بسته به نوع مساله ممکن است یک بازهٔ کراندار یا بی‌کران باشد و نقاط انتهایی بازهٔ کراندار ممکن است مطرح باشند یا نباشند.

نخست حالی را در نظر بگیرید که یک تابع به شکل $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. می‌دانیم که اگر f پیوسته باشد، تابع f دارای ماکسیمم و مینی‌موم روی $[a, b]$ است. در این حالت انجام موفقیت‌آمیز سه‌گام زیر منجر به یافتن ماکسیمم مینی‌موم می‌شود:

(۱۹ـ۱) گامهای یافتن ماکسیمم و مینی‌موم روی $[a, b]$

(الف) محاسبهٔ $f(a)$ و $f(b)$.

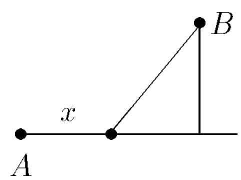
(ب) یافتن مقدار f در نقاط درونی بازه که در آن مشتق وجود دارد و مشتق در آن نقاط صفر است. این نقاط شامل همهٔ نقاط ماکسیمم مینی‌موم موضعی می‌شود که تابع در آن نقاط مشتقپذیر است. این نقاط را نقاط بحرانی می‌نامند.

(ج) یافتن مقدار f در نقاطی که در آن f مشتقپذیر نیست. این نقاط را نقاط تکین می‌نامند.

این سه نوع نقطه همهٔ نامزدهای ممکن برای نقاط ماکسیمم و مینی‌موم را در بر می‌گیرند. با مقایسهٔ مقدار f در این سه دسته نقطه می‌توان ماکسیمم و مینی‌موم تابع f را در $[a, b]$ پیدا کرد.

اگر $a=-\infty$، $b=+\infty$، هردو، و یا اگر باز ۰ به شکل $]a,b[$، $[a,b[$ یا $]a,b]$ باشد، طبیعی است که به جای گام (الف)، باید رفتار تابع را وقتی مقدار متغیر به هر انتهای مشمول نشده در دامنهٔ تعریف f نزدیک می‌شود بررسی کنیم. به هر صورت در مسایل عملی از این نوع، نقطهٔ آغاز حل مساله، طرح دقیق تابع مورد نظر و مشخص کردن دامنهٔ آن است. چنانچه بتوان یک شکل تقریبی از این تابع رسم نمود، معمولاً شکل راهنمای خوبی برای پیشگیری از اشتباه در حل مساله و برخورد با جوابهای نامعقول است.

مثال ۱. برای رسیدن به جزیرهٔ B که در فاصله مستقیم ۳ کیلومتری ساحل قرار دارد، فردی در نقطهٔ A در ساحل که ۵ کیلومتر از نزدیکترین نقطهٔ ساحل به جزیره فاصله دارد و می‌تواند از قایق موتوری و نیز یک اتومبیل برای حرکت در جادهٔ ساحلی استفاده کند.



سرعت قایق موتوری $۲۰km/hr$ و سرعت اتومبیل در جادهٔ ساحلی $۴۰km/hr$ است. تعین کنید که برای رسیدن به جزیره در حداقل زمان ممکن، باید چه مساحتی را نخست با اتومبیل طی کرد و سپس از قایق استفاده نمود.

در این مساله، زمان، t، باید مینی‌موم شود. زمان لازم برای رسیدن به نقطهٔ B مجموع دو زمان $t_۱, t_۲$ است، $t=t_۱+t_۲$، که در آن $t_۱$ زمان استفاده از اتومبیل و $t_۲$ مدت زمان استفاده از قایق می‌باشد. اگر مسافت x کیلومتر نخست در جادهٔ ساحلی با اتومبیل طی شود، داریم:

$$t_۱=\frac{x}{۴۰},\quad t_۲=\frac{\sqrt{۳^۲+(۵-x)^۲}}{۲۰}$$

بنابراین تابعی که باید مینی‌موم آن پیدا میشود عبارت است از:

$$t = \frac{x}{۴۰} + \frac{\sqrt{۹ + (۵ - x)^۲}}{۲۰}$$

لازم است که دامنهٔ این تابع، یعنی حدود x، نیز مشخص شود. در اینجا $۰ \leq x \leq ۵$ زیرا که اگر فرد مستقیماً از نقطهٔ A به سوی B با قایق حرکت کند داریم $x = ۰$، و از سوی دیگر حداکثر استفادهٔ معقول از اتومبیل راندن تا پای نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره، یعنی $x = ۵$، و استفاده از قایق پس از آن است. بنابراین گامهای (الف)، (ب) و (ج) را به‌صورت زیر پیاده می‌کنیم:

(الف) در $x = ۰$ داریم (ساعت)، $t = \frac{\sqrt{۳۴}}{۲۰} \approx ۰/۲۷۵$، و برای $x = ۵$، ساعت $t = ۰/۱۲۵ + ۰/۱۵ = ۰/۲۵$

(ب) و (ج). t به‌عنوان تابع x در داخل بازهٔ $[۰, ۵]$ مشتق‌پذیر است زیرا تابع جذر فقط در نقطهٔ ۰ مشتق‌پذیر نیست واینجا زیر رادیکان حداقل ۹ است. بنابراین کافی است گام (ب) اجرا شود، یعنی $\frac{dt}{dx}$ برابر صفر قرار داده شده نقاط بحرانی و مقدار f در آنها مشخص شود. داریم:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{۱}{۴۰} + \frac{-۲(۵ - x)}{۴۰\sqrt{۹ - (۵ - x)^۲}} = ۰$$

$$\sqrt{۹ - (۵ - x)^۲} = ۲(۵ - x)$$

$$۹ - (۵ - x)^۲ = ۴(۵ - x)^۲$$

$$(۵ - x)^۲ = \frac{۹}{۵}$$

$$۵ - x = \pm\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

چون $۰ \leq x \leq ۵$ تنها جواب عبارت است از

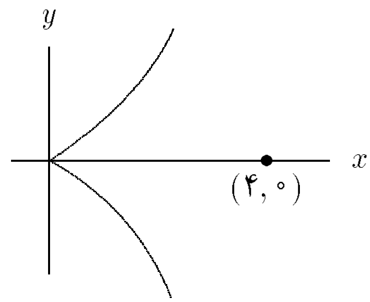
$$x = ۵ - \frac{۳}{\sqrt{۵}} \approx ۳/۶۵۸$$

و در این نقطه:

$$\begin{aligned} t &= \frac{۵ - \frac{۳}{\sqrt{۵}}}{۴۰} + \frac{\sqrt{۹ + \frac{۹}{۵}}}{۲۰} \\ &\approx ۰/۰۹۱ + ۰/۱۶۴ = ۰/۲۵۵ \quad (\text{ساعت}) \end{aligned}$$

در مقایسهٔ این مقدار با دو مقدار انتهایی، ملاحظه می‌کنیم که مینی‌موم به‌ازای $x \approx ۳/۶۵۸^{km}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲. می‌خواهیم نزدیکترین نقطهٔ منحنی $y^۲ = x^۳$ را به‌نقطهٔ $(۴, ۰)$ پیدا کنیم. این مسالهٔ ساده را از سه‌راه مختلف حل می‌کنیم، و طبعاً در هر سه راه حل به یک جواب خواهیم رسید ولی مقایسهٔ روشها آموزنده است.



راه اول منحنی داده شده اجتماع نمودارهای دو تابع $y = x^{۳/۲}$ و $y = -x^{۳/۲}$ هر دو با دو با دامنهٔ $[۰, +\infty[$ است. بنابر تقارن دو شاخه نسبت به نقطهٔ $(۴, ۰)$ کافی است مساله را برای یک شاخه حل کنیم و قرینهٔ نقطه به دست آمده در شاخهٔ دیگر را نیز منظورکنیم. بنابراین فقط $y = x^{۳/۲}$ روی $[۰, \infty[$ را در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $(۴, ۰)$ از نقطه‌ای (x, y) روی این منحنی برابر است با $\sqrt{(x - ۴)^۲ + y^۲}$. از آنجاکه مینی‌موم کردن یک کمیت مثبت مطرح است، می‌توان مجذور همین عبارت یعنی $(x - ۴)^۲ + y^۲$ را در نظر گرفت که فاقد نماد $\sqrt{\ }$ است و محاسبه با آن سر راست‌تر. ضمناً برای نقاط منحنی، $y^۲ = x^۳$، پس باید مینی‌موم تابع زیر را به‌دست آورد:

$$D(x) = (x - ۴)^۲ + x^۳, \ ۰ \leq x < +\infty$$

در نقطهٔ انتهایی $x = ۰$ داریم $D(۰) = ۱۶$. رفتار تابع وقتی $x \longrightarrow +\infty$ را نیز باید در نظر بگیریم که $D(x) \longrightarrow +\infty$ وقتی $x \longrightarrow +\infty$. تابع D به‌عنوان تابع x در $۰ < x < +\infty$ مشتقپذیر

است، پس باید $\frac{dD}{dx}$ را برابر صفر قرار داده مینی‌مومهای موضعی را پیدا کنیم.

$$\frac{dD}{dx} = ۲(x - ۴) + ۳x^۲$$

معادله $۳x^۲ + ۲x - ۸ = ۰$ دارای ریشه‌های $-۲, \frac{۴}{۳}$ است که -۲ در دامنهٔ تابع ما نیست، بنابراین فقط $x = \frac{۴}{۳}$ نیاز به بررسی دارد. داریم $D(\frac{۴}{۳}) = \frac{۲۵۶}{۲۷}$. با توجه به اینکه $D(\frac{۴}{۳}) < D(۰)$، جواب مساله به‌ازای $\frac{۴}{۳}$ به‌دست می‌آید و نقاط منحنی که حداقل فاصله را می‌دهند عبارتند از $(\frac{۴}{۳}, \pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}})$.

راه دوم. می‌توانیم بجای اینکه y را تابعی از x روی منحنی بگیریم، x را تابعی از y فرض کنیم، $x = y^{۲/۳}$ و در اینصورت به جای تابع D بالا که برحسب x نمایش داده شده، مجذور فاصله را برحسب y بررسی می‌کنیم:

$$E(y) = (y^{۲/۳} - ۴)^۲ + y^۲, \quad -\infty < y < +\infty$$

توجه کنید که در اینجا فقط یک تابع مطرح است و دامنهٔ آن تمام $\mathbb{R}$ می‌باشد. وقتی $y \longrightarrow \pm\infty$، داریم $E \longrightarrow +\infty$. تابع داده شده در $y = ۰$ مشتق‌پذیر نیست بنابراین باید مقدار تابع را در این نقطه به‌طور جداگانه بررسی کرد. داریم $E(۰) = ۱۶$. در سایر نقاط تابع مشتق‌پذیر است و با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = ۰$ نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\frac{dE}{dy} = \frac{۴}{۳}\frac{۱}{y^{۱/۳}}(y^{۲/۳} - ۴) + ۲y$$

با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = ۰$ مضرب کردن در $\frac{۳}{۲}y^{۱/۳}$ (توجه کنید که $y = ۰$ قبلاً بررسی شد.) نتیجه می‌شود.

$$۳y^{۴/۳} + ۲y^{۲/۳} - ۸ = ۰$$

که یک معادله درجه ۲ برحسب $y^{۲،۳}$ است. از حل این معادله نتیجه می‌شود $y^{۲/۳} = -۲/\frac{۴}{۳}$ که جواب منفی قابل قبول نیست، پس $y^{۲/۳} = \frac{۴}{۳}$، یا $y = \pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}$ و در نتیجه $x = \sqrt[۳]{y^۲} = \frac{۴}{۳}$. مجدداً $E(\pm\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}) < E(۰)$ و همان جواب راه اول نتیجه می‌شود.

راه سوم. وقتی از رابطهٔ $f(x,y)=0$ نتوان یکی از y یا x را به‌صورت تابعی ساده از دیگری نوشت، ممکن است کوشش کنیم هر دو متغیر y,x را برحسب متغیر جدیدی t بنویسیم. با تجسم t به‌عنوان زمان می‌توان فرض کرد که منحنی داده شده مسیر حرکت نقطه‌ای (x,y) برحسب زمان است. برای منحنی $y^2=x^3$، می‌توان نوشت:

$$x=t^2,\ y=t^3,\ -\infty<t<+\infty$$

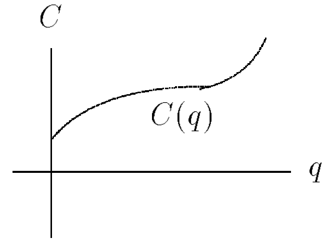
در اینصورت مجذور فاصله (x,y) از $(4,0)$ به‌صورت تابعی از t ارائه می‌شود:

$$F(t)=(t^2-4)^2+t^6,\ \ -\infty<t<+\infty$$

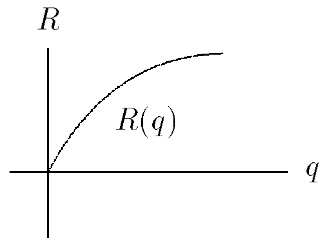
داریم $F(t)\longrightarrow+\infty$ وقتی $Ft\longrightarrow\pm\infty$ به‌عنوان تابعی از t همه‌جا مشتق‌پذیر است، مشتق آن نسبت به t را برابر صفر قرار می‌دهیم که نتیجه می‌شود $6t^5+4t^3-16t=0$، یا $t(3t^2+2t-8)=0$ که جوابهای $t=0$، $t^2=\frac{4}{3}$ و $t^2=-2$ (غیر قابل قبول) را می‌دهد. داریم $F(0)=16$ و $F(\sqrt{\frac{4}{3}})=\frac{256}{37}$ و جواب مساله همان نقاط $(\frac{4}{3},\pm\frac{8}{3\sqrt{3}})$ هستند.

نکته قابل مقایسه در این سه راه حل وضعیت نقطهٔ $(0,0)$ روی منحنی $y^2=x^3$ است که یک ماکسیمم موضعی برای فاصله از نقطه $(4,0)$ می‌باشد. از راه حل اول، این نقطه به‌صورت یک انتهای بازهٔ تابع ظاهر می‌شود، در راه حل دوم به عنوان یک نقطه تکین که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست، و در راه حل سوم به‌عنوان یک نقطه که در آن مشتق وجود دارد و صفر است. بنابراین بسته به اینکه مساله چگونه صورتنبدی شود، ماهیت یک نقطه ممکن است به صورتهای گوناگون دیده شود.

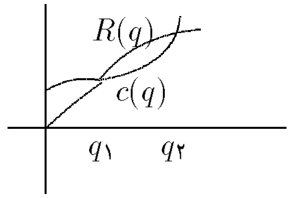
(۲ـ۱۹) کاربرد در مسایل اقتصاد فرض کنید یک شرکت تولیدی کالایی تولید می‌کند که می‌توان میزان تولید آن کالا را عملاً کمیتی پیوسته فرض کرد. مثلاً تولید شکر برحسب تُن یا کیلوگرم، ولی نه تولید هواپیما یا زیردریایی که در موارد اخیر میزان تولید با عدد صحیح سنجیده می‌شود. هزینه تولید برحسب مقدار تولید نوعاً یک منحنی مانند شکل ۳ است. اگر هزینه تولید q مقدار از کالا را به $C(q)$ نمایش دهیم (مثلاً برحسب ریال)، شکل نمودار شکل ۳



شکل ۳



شکل ۴



شکل ۵

به‌صورت زیر توجیه می‌شود. برای راه‌اندازی تولید، مقداری سرمایه‌گذاری اولیه لازم است، بنابر در آغاز (یعنی $q = 0$) به هر حال مبلغی هزینه شده است که به صورت $C(0) > 0$ ظاهر می‌شود. با افزایش تولید، چون سرمایه‌گذاری اولیه جدیدی لازم نیست هزینهٔ نسبی تولید کاهش می‌یابد، یعنی $C(q)$ پایین‌تر از یک خط راست خواهد بود. مثلاً در چاپ یک کتاب، هزینه‌ای که صرف تهیهٔ فیلم و زینک می‌شود و به نسبت بالاست تکرار نمی‌شود و هرچه تولید بیشتر باشد هزینهٔ نسبی، یعنی $\frac{C(q)}{q}$ کاهش می‌یابد. این واقعیت به‌صورت تقعر نمودار $C(q)$ تا مقدار قابل ملاحظه‌ای از q نمایش داده شده است. ولی وقتی تولید از حد معینی تجاوز کند ممکن است نیاز به افزایش ماشین‌آلات و نیروی کار باشد که در اینصورت این افزایش برحسب تغییر جهت تقعّر $C(q)$ می‌شود، همچنان که در شکل نمایش داده شده است. برای تولید بعضی محصولات ممکن است این تغییر جهت صورت نگیرد تا خیلی دیر به‌وقوع بپیوندد. در مقابل هزینهٔ تولید، در شکل ۴ درآمد حاصل از فروش q مقدارکالا، $R(q)$، نمایش داده شده است. در اینجا $R(0) = 0$، یعنی قبل از فروش درآمدی وجود ندارد. در آغاز فروش R حدوداً خطی است، یعنی به تناسب فروش q واحد، درآمدی که برابر حاصلضرب q در قیمت فروش یک واحد است حاصل می‌شود. ولی با افزایش تولید نوعاً به سبب برآورده شدن نیاز و اشباع بازار، یا به سبب ظهور واحدهای رقیب و اُفت قیمت، تدریجاً افزایش تولید موجب افزایش متناسب درآمد نمی‌شود و نمودار $R(q)$ رو به‌پایین مقعر می‌شود. در شکل ۵ دو منحنی روی هم قرار داده شده‌اند. روی بازهٔ $]q_1, q_2[$ میزان درآمد از هزینه بالاتر است و برای اینکه تولید سود ده باشد، باید مقدار تولید در بازهٔ $]q_1, q_2[$ بماند. در واقع تولید کننده مایل است که سود خود، یعنی $p(q) = R(q) - C(q)$ را

به‌حداکثر ممکن برساند، یعنی باید میزانی از تولید، q، را در بازهٔ $]q_۱, q_۲[$ انتخاب کند که برای آن $P(q)$ ماکسیمم شود. برای اینکه بتوانیم از ابزار حساب دیفرانسیل استفاده کنیم، فرض می‌کنیم تابعهای $C(q)$، $R(q)$ عملاً علاوه بر پیوسته بودن، مشتقپذیر نیز باشند. در اینصورت ماکسیمم سود حتماً در میزانی q از تولید حادث می‌شود که در آن $\frac{dp}{dq} = ۰$. برای درک اقتصادی این مطلب باید برداشتی اقتصادی از مفهوم مشتق ارائه کنیم.

$\frac{dC}{dq}$ و $\frac{dR}{dq}$ چه معنایی دارند؟ طبق تعریف، برای میزان $q_۰$ از تولید، داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_۰) = \lim_{q \longrightarrow q_۰} \frac{C(q) - C(q_۰)}{q - q_۰}$$

پس در واقع برای q نزدیک $q_۰$ داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_۰) \approx \frac{C(q) - C(q_۰)}{q - q_۰}$$

در عمل میزان تولید واقعاً پیوسته نیست، مثلاً برای تولید شکر، حداقل معنی داری از تغییر متغیر، یک تُن شکر است، یا در مورد تولید هر کالای دیگر نیز، یک کوچکترین واحد معنی‌داری به‌عنوان حداقل افزایش یا کاهش تولید مطرح است. بنابراین کوچکترین مقدار مثبت $q - q_۰$ را می‌توان واحد فرض کرد و داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_۰) \approx \frac{C(q_۰+۱) - C(q_۰)}{۱} = C(q_۰ + ۱) - C(q_۰) \quad (۱)$$

به بیان دیگر، تعبیر اقتصادی $\frac{dC}{dq}(q_۰)$ هزینه تولید یک واحد اضافی از کالاست وقتی تولید به $q_۰$ رسیده باشد. در اصطلاح اقتصاد، $\frac{dC}{dq}(q_۰)$ را هزینه نهایی می‌نامند (دلیل استفاده از لغت نهایی را خواهیم دید). با عیناً همین استدلال می‌توان گفت که:

$$\frac{dR}{dq}(q_۰) \approx R(q_۰ + ۱) - R(q_۰) \qquad (۲)$$

یعنی $\frac{dR}{dq}(q_۰)$ درآمد حاصل از فروش یک واحد اضافی از کالاست وقتی تولید به $q_۰$ رسیده باشد. $\frac{dR}{dq}(q_۰)$ را در آمد نهایی می‌نامند.

حال به مسالهٔ ماکسیمم کردن سود باز می‌گردیم. اگر به‌ازای مقدار $q_۰$ در $]q_۱, q_۲[$ ماکسیمم سود حاصل شود، داریم $\frac{dR}{dq}(q_۰) - \frac{dC}{dq}(q_۰) = ۰$، پس بنابر (۱) و (۲):

$$R(q_۰ + ۱) - R(q_۰) \approx C(q_۰ + ۱) - C(q_۰) \qquad (۳)$$

یعنی درجایی ماکسیمم حاصل می‌شود که درآمد ناشی از فروش یک واحد اضافی ازکالا برابر هزینهٔ تولید یک واحد اضافی ازکالاست. این مطلب را می‌توان به‌طور شهودی نیز توجیه کرد. برای اینکه $q_\circ$ یک نقطهٔ ماکسیمم باشد باید برای q نزدیک $q_\circ$ وکوچکتر از $q_\circ$، تابع $P = R - C$ صعودی باشد یعنی تولید بیشتر، سود بیشتر ایجاد کند، یا به عبارت دیگر در آمد فروش هر واحد بیش از هزینهٔ تولید همان واحد باشد. بالعکس برای q نزدیک $q_\circ$ و بزرگتر از $q_\circ$، تابع $P = R - Q$ باید نزولی باشد، یعنی تولید بیشتر، سود کمتر ایجاد کند، یا معادلاً درآمد فروش هر واحد بیشتر کمتر از هزینهٔ تولید همان واحد باشد. بنابراین در نقطهٔگذر از صعود به‌نزول P، باید هزینهٔ تولید یک واحد اضافی با درآمد ناشی از فروش آن برابر شود. حال می‌توان به‌دلیل استفاده از لغت نهایی پی‌برد. مقدار $q_\circ$ که در آن ماکسیمم سود حاصل می‌شود، در واقع میزان نهایی تولید مطلوب است زیراکه پس از آن سود تولیدکاهش خواهد یافت.

به‌عنوان تمرینی در این مفاهیم، به‌عنوان مثال، روشی ترسیمی برای محاسبه هزینهٔ نهایی راکه در اقتصاد معمول است ارائه می‌کنیم.

مثال فرض کنید هزینهٔ تولید یک واحد ازکالا را وقتی که مقدار تولید کالا q باشد به $a(q)$ نمایش دهیم. در اینصورت داریم:

$$C(q) = q.a(q) \tag{۳}$$

نمودار $a(q)$ بسیاری اوقات مانند شکل ۶ است، یعنی تولید هرچه بیشتر باشد (تا حد معقولی)، هزینهٔ تولید هر واحد ارزانتر می‌شود. برای یافتن $\frac{dC}{dq}(q_\circ)$ می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد. در نقطهٔ $(q_\circ, a(q_\circ))$ مماس نمودار $a(q)$ را رسم می‌کنیم تا محور قائم را در نقطهٔ S قطع کند. از S خط راستی با ضریب زاویهٔ دو برابر ضریب زاویه خط مماس فوق رسم می‌کنیم تا خط قائم $q = q_\circ$ را در نقطه‌ای T قطع کند. مختصه قائم T برابر $\frac{dC}{dq}(q_\circ)$ است. توجیه این مطلب یک محاسبهٔ سر راست است. با مشتقگیری از رابطهٔ (۳) داریم.

$$\frac{dC}{dq}(q_\circ) = a(q_\circ) + q_\circ \frac{da}{dq}(q_\circ) \tag{۴}$$

از طرفی دیگر معادلهٔ خط مماس بر نمودار $a(q)$ در نقطهٔ $(q_{\circ}, a(q_{\circ}))$ هست:

$$y - a(q_{\circ}) = \frac{da}{dq}(q_{\circ}).(q - q_{\circ})$$

این خط محور قائم، y، را در $q = \circ$ قطع می‌کند، پس $S = (\circ, a(q_{\circ}) - \frac{da}{dq}(q_{\circ}).q_{\circ})$. معادله خط راست گذرا از S با شیب $۲\frac{da}{dq}(q_{\circ})$ هست:

$$y - a(q_{\circ}) + \frac{da}{dq}(q_{\circ}).q_{\circ} = ۲\frac{da}{dq}(q_{\circ}).q$$

اشتراک این خط راست با $q = q_{\circ}$ با قرار دادن $q = q_{\circ}$ حاصل می‌شود که بنابراین مقدار y آن هست:

$$\begin{aligned} y &= a(q_{\circ}) - \tfrac{da}{dq}(q_{\circ}).q_{\circ} + ۲\tfrac{da}{dq}(q_{\circ}).q_{\circ} \\ &= a(q_{\circ}) + \tfrac{da}{dq}(q_{\circ}).q_{\circ} \end{aligned}$$

که در مقایسه با (۴) نتیجه می‌دهد:

$$y = \frac{dC}{dq}(q_{\circ})$$

همانطورکه ادعا شده بود.