نمودار تابع و کاربردهای آن

بحث جلسهٔ قبل اهمیت مشتق دوم را در تخمین خطای تقریب خطی نشان داد. در اینجا نخست به بررسی بیشتر کاربردهای مشتق دوم می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر تابع f در بازهٔ باز I دوبار مشتق‌پذیر باشد و a و $a+h$ در این بازه باشند، آنگاه:

$$f(a+h)-[f(a)+f'(a)h]=\frac{1}{2}f''(c)h^{2} \tag{۱}$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a+h$ است. از (۱) بلافاصله نتیجه می‌شود که:

(۱۸—۱) گزاره. فرض کنید I یک بازهٔ باز است و $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر که مشتق دوم آن در سراسر بازهٔ I مثبت (به ترتیب منفی) است. در این صورت برای هر نقطهٔ درونی a از I، نمودار تابع به‌ازای هر $x \neq a$ در بالا (به ترتیب پایین) خط مماس در نقطهٔ a قرار می‌گیرد. به بیان دیگر:

$$x \neq a \quad : \quad f(x) > f(a)+f'(a)(x-a) \tag{۲}$$

$$(x \neq a \quad : \quad f(x) < f(a)+f'(a)(x-a) \qquad \text{به ترتیب}) \tag{۳}$$

□

ضمناً در وضعیت $f''>0$، مشتق اول، یعنی شیب مماس، صعودی، و در وضعیت $f''<0$، شیب مماس نزولی خواهد بود. اگر $a<b<c$ طوری باشند که f'' روی $]a,b[$ و $]b,c[$ علامت مختلف داشته باشد، نقطهٔ b را یک نقطه عطف می‌نامند. اگر f'' پیوسته باشد در این نقطه که f'' تغییر علامت

می‌دهد باید داشته باشیم $f''(b)=0$. در شکل ۱ (الف) تابعی با $f''>0$، در شکل ۱ (ب) تابعی با $f''<0$، و در شکل ۱ (ج) یک نقطهٔ عطف نمایش داده شده است.

از شکل‌های ۱ (الف) و ۱ (ب) به نظر می‌رسد که وقتی $f''>0$، خط واصل بین هر دو نقطهٔ نمودار باید در بالای نمودار قرار گیرد، و بالعکس وقتی $f''<0$، خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در زیر نمودار تابع واقع می‌شود. این حدس در واقع درست است:

(۱۸—۲) گزاره. I یک بازهٔ باز است و $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر. فرض کنید f'' در سراسر I مثبت (به ترتیب منفی) است. در این صورت برای هر دو نقطه a و b از I که $a<b$، خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ بالای (به ترتیب پایین) نمودار f روی $]a, b[$ قرار می‌گیرد.

برهان. مطلب را برای $f''>0$ ثابت می‌کنیم، حالت $f''<0$ مشابه است و نیز با تعویض f به $-f$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که نقاط بازهٔ $[a, b]$ را می‌توان به صورت $(1-t)a+tb$ نوشت که در آن $0 \leq t \leq 1$. همچنین هر نقطهٔ پاره‌خط واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ به صورت $((1-t)a+tb, (1-t)f(a)+tf(b))$، $0 \leq t \leq 1$، نمایش داده می‌شود. در واقع باید ثابت کنیم:

$$0<t<1 \quad : \quad f((1-t)a+tb)<(1-t)f(a)+tf(b) \qquad (4)$$

فرض می‌کنیم به‌ازای یک t، $0<t<1$، نامساوی (۴) برقرار نیست و به تناقض می‌رسیم. بدین ترتیب فرض کنید t وجود دارد که

$$f((1-t)a+tb) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$$

پس

$$(1-t)f((1-t)a+tb)+tf((1-t)a+tb) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$$

بنابراین

$$(1-t)(f((1-t)a+tb)-f(a)) \geq t(f(b)-f((1-t)a+tb))$$

اگر دو طرف را بر $t(۱-t)(b-a)$ تقسیم کنیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{f((۱-t)a+tb)-f(a)}{t(b-a)} \geq \frac{f(b)-f((۱-t)a+tb)}{(۱-t)(b-a)}$$

یا:

$$\frac{f((۱-t)a+tb)-f(a)}{(۱-t)a+tb-a} \geq \frac{f(b)-f((۱-t)a+tb)}{b-((۱-t)a+tb)}$$

برای سهولت در نوشتن، نقطهٔ $(۱-t)a+tb$ را به c نمایش دهید. پس داریم:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

کسر سمت چپ شیب خط واصل بین $(a,f(a))$ و $(c,f(c))$ است. طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای $c_۱$ بین a و c وجود دارد که کسر سمت چپ برابر $f'(c_۱)$ است. به همین ترتیب نقطه‌ای $c_۲$ وجود دارد، $c<c_۲<b$، که $f'(c_۲)$ برابر کسر سمت راست است. بنابراین

$$f'(c_۱) \geq f'(c_۲)$$

ولی چون $f''>۰$، f' صعودی است، پس $f'(c_۱)<f'(c_۲)$ و به تناقض مورد نظر رسیده‌ایم. □

به طور کلی تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در بالای نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های **محدب** (محدب رو به پایین، یا مقعر رو به بالا)، و تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطهٔ نمودار در زیر نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های **مقعر** (مقعر رو به پایین، یا محدب رو به بالا) می‌نامند. بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که:

(۱۸—۳) نتیجه. فرض کنید I یک بازهٔ باز و $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر است. اگر f'' در سراسر I مثبت (به ترتیب منفی) باشد، تابع f در I محدب (به ترتیب مقعر) است. □

با توجه به این نتیجه می‌توان در رسم نمودار تابع‌ها، با توجه به علامت مشتق دوم بازه‌های تحدب و تقعر تابع را منظور نمود.

حال فرض کنید تابع f در بازه‌ای حول نقطهٔ درونی a از بازهٔ خود مشتق‌پذیر است و در نقطهٔ a دارای مشتق دوم، $f''(a)$، است. آیا علامت $f''(a)$ در تک نقطهٔ a اطلاعی در مورد این نقطه

به‌دست می‌دهد؟ در بخش ۱۵، احکام ۱۵–۴–۱ و ۱۵–۴–۲ نشان دادند که اگر برای تابعی g داشته باشیم $g'(a) > ۰$ (به ترتیب $g'(a) < ۰$)، آنگاه برای x های نزدیک a و بزرگتر از a داریم $g(x) > g(a)$ (به ترتیب $g(x) < g(a)$)، و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $g(x) < g(a)$ (به ترتیب $g(x) > g(a)$). حال اگر به جای g تابع f' را جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود که به فرض $f''(a) > ۰$ (به ترتیب $f''(a) < ۰$)، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) > f'(a)$ (به ترتیب $f'(x) < f'(a)$)، و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) < f'(a)$ (به ترتیب $f'(x) > f'(a)$). بالاخص اگر $f'(a) = ۰$، یعنی a یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد نتیجه می‌شود که:

- اگر $f''(a) > ۰$، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) > ۰$ و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) < ۰$.
- اگر $f''(a) < ۰$، برای x های نزدیک و بزرگتر از a داریم $f'(x) < ۰$ و برای x های نزدیک و کوچکتر از a داریم $f'(x) > ۰$.

پس در وضعیت $f'(a) = ۰$ و $f''(a) > ۰$، تابع در سمت راست a صعودی، در سمت چپ آن نزولی است، در نتیجه a یک نقطهٔ کمینهٔ موضعی خواهد بود. به همین ترتیب، وقتی $f'(a) = ۰$ و $f''(a) < ۰$، نقطهٔ a یک بیشینهٔ موضعی است. بنابراین "آزمون مشتق دوم" به شرح زیر ثابت شده است.

(۱۸–۴) آزمون مشتق دوم. فرض کنید تابع f در یک بازه حول نقطه درونی a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و در نقطهٔ a، مشتق دوم f، $f''(a)$، وجود دارد. به علاوه فرض کنید $f'(a) = ۰$. در این صورت:

الف) اگر $f''(a) > ۰$، نقطهٔ a یک کمینه (مینیمم) موضعی است.

ب) اگر $f''(a) < ۰$، نقطهٔ a یک بیشینه (ماکسیمم) موضعی است. □

آزمون مشتق دوم نیز در رسم نمودار تابع‌ها گاهی مؤثر واقع می‌شود. اگر علاوه بر $f'(a) = ۰$، داشته باشیم $f''(a) = ۰$، اطلاعی در مورد ماهیت نقطهٔ a حاصل نمی‌شود. در شکل (۴) چهار نمونه با

$f'(a) = f''(a) = 0$. نمایش داده شده‌اند که چهار وضعیت مختلف دارند.

چند مثال زیر شکل‌های ۱ و ۳ بخش ۱۵ را توجیه می‌کنند.

مثال ۱. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x^4 - x^3$ را رسم کنید.

داریم $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$، $f''(x) = 12x^2 - 6x$. در جدول زیر علامت تابع و علامت مشتق‌های اول و دوم آن را در بازه‌های گوناگون نمایش داده‌ایم:

x		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$

با توجه به داده‌های بالا، شکل ۳ (الف) به‌دست می‌آید.

مثال ۲. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = x - \sin x$ را رسم کنید.

داریم $f'(x) = 1 - \cos x$ و $f''(x) = \sin x$. این تابع صعودی است زیرا که فقط در مجموعه‌ای گسسته از نقاط، یعنی $x = 2k\pi$ مشتق صفر می‌شود و در سایر نقاط مشتق مثبت است، پس بین هر دو مضرب متوالی 2π تابع صعودی است. مشتق دوم تابع در مضارب π صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط همه نقاط عطف هستند. ضمناً داریم $f(0) = 0$، و از صعودی بودن تابع نتیجه می‌شود که $f(x) > 0$ برای $x > 0$ و $f(x) < 0$ برای $x < 0$. با در نظر گرفتن علامت f'' در بازه‌های مختلف، شکل ۳ (ب) به‌دست می‌آید.

مثال ۳. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را که به صورت زیر تعریف شده است رسم کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

برای $x \neq 0$ تابع داده شده ترکیب و حاصل‌ضرب تابع‌های مشتق‌پذیر است پس برای $x \neq 0$ مشتق‌پذیر می‌باشد. در $x = 0$ مشتق‌پذیر بودن تابع را مستقیماً از تعریف تحقیق می‌کنیم:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} (h)(\sin \frac{1}{h})$$

از آنجا که $|\sin \frac{1}{h}|$ کراندار با کران ۱ است و $\lim_{h\to 0} h = 0$، حد بالا وجود دارد و برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار در $x = 0$ وجود دارد و افقی است. ضمناً فرمول مشتق f به‌ازای $x \neq 0$ از فرمول لایب‌نیتس و قاعدهٔ زنجیره‌ای محاسبه می‌شود:

$$x \neq 0 \qquad : \qquad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \tag{5}$$

ادعا می‌کنیم دنباله‌ای از نقاط (x_n) وجود دارد که $x_n \longrightarrow 0$ و $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$. در واقع با قرار دادن $f'(x) = 0$ داریم:

$$\tan \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$$

اگر قرار دهیم $t = \frac{1}{x}$، باید نشان دهیم دنباله‌ای t_n وجود دارد که $t_n \longrightarrow +\infty$ و $\tan t_n = \frac{1}{2} t_n$. این مطلب با توجه به شکل ۴ بدیهی است زیرا که نمودار تابع $\alpha(t) = \frac{1}{2} t$ همهٔ شاخه‌های نمودار تابع تناوبی $\beta(t) = \tan t$ را قطع می‌کند.

با قرار دادن $x_n = \frac{1}{t_n}$ حکم مورد نظر به‌دست می‌آید. ضمناً $f'(x)$ در همهٔ این نقاط تغییر علامت می‌دهد زیرا که اگر بنویسیم

$$f'(x) = (2x \cos \frac{1}{x})(\tan \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x})$$

در نقاط x_n، پرانتز دوم صفر شده تغییر علامت می‌دهد زیرا که خط راست $\alpha(t) = \frac{t}{2}$ متناوباً در بالا و پایین نمودار $\beta(t) = \tan t$ قرار می‌گیرد و $2x \cos \frac{1}{x}$ در $x = x_n$ تغییر علامت نمی‌دهد. نتیجه اینکه نقاط (x_n) یکی در میان ماکسیمم و مینیمم موضعی هستند. نهایتاً اینکه چون $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$، نمودار تابع $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ بین نمودارهای $y = x^2$ و $y = -x^2$ محصور می‌ماند. این نمودار در شکل ۵ نمایش داده شده است.

توجه کنید که $f'(0) = 0$ ولی نقطهٔ 0 نه کمینهٔ موضعی، نه بیشینهٔ موضعی و نه نقطهٔ عطف معمولی آن است. در واقع چون تابع f' در 0 پیوسته نیست (عبارت (۵) حد ندارد وقتی $x \longrightarrow 0$ در حالی که $f'(0) = 0$)، f' نمی‌تواند در 0 مشتق‌پذیر باشد، یعنی $f''(0)$ موجود نیست.

مثال ۴. شکل ۱ بخش ۱۵ نمودار تابعی f را نشان می‌دهد که $f'(0) > 0$ ولی f در هیچ بازهٔ حول ۰ صعودی نیست. با اندک تغییری در مثال ۳ می‌توان فرمولی برای چنین تابعی ارائه کرد. می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

از محاسبات مثال ۳ نتیجه می‌شود که f همه‌جا مشتق‌پذیر است و $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$. طبق ۱۵—۴—۱، این تابع برای $x > 0$ کوچک مقدار مثبت و برای $x < 0$ با قدرمطلق کوچک، مقدار منفی دارد. برای $x \neq 0$ داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

ادعا می‌کنیم دنباله‌ای (x_n) وجود دارد که $x_n \longrightarrow 0$، $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$، و f' در این نقاط تغییر علامت می‌دهد. در واقع چون $2x\sin\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ وقتی $x \longrightarrow 0$ و $\cos\frac{1}{x}$ با کوچک شدن x بی‌نهایت نوسان بین -1 و $+1$ دارد، $f'(x) = 0$ بی‌نهایت جواب در نزدیکی ۰ دارد. در این نقاط f' تغییر علامت می‌دهد زیرا نمودار $\cos\frac{1}{x}$ خطوط نزدیک ارتفاع $-\frac{1}{2}$ را در گذر بین -1 و $+1$ قطع می‌کند. در شکل ٦ تقاطع نمودارهای تابع با مقدار $2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ و تابع با مقدار ثابت $-\frac{1}{2}$ به طور تقریبی رسم شده است. بدین ترتیب شکل ۱ بخش ۱۵ توجیه می‌شود.

آنچه تا این مرحله از خواص مشتق اول و دوم آموخته‌ایم ابزاری نیرومند و مؤثر برای صورت‌بندی و حل بسیاری مسایل عملی در اختیار ما قرار می‌دهد. در باقیماندهٔ این بخش و در جلسهٔ آینده چند نمونه از این مسایل را بررسی خواهیم کرد. نخست در این جلسه مثال‌هایی مطرح می‌کنیم در آنها می‌توان به کمک شکل اطلاعات کیفی سودمند کسب کرد و در بخش آینده تعدادی مثال کمی بهینه‌یابی مطرح خواهیم ساخت.

مثال ۱. گلدانی به صورت شکل ۷ (الف) داده شده است. در این گلدان با آهنگ ثابت آب می‌ریزیم تا گلدان پر شود. نمودار تغییر ارتفاع آب در گلدان را برحسب زمان رسم کنید.

زمان را به t و ارتفاع آب را به h نمایش می‌دهیم. هدف در اینجا رسم نمودار h نسبت به t است. ارتفاع‌های حساس، مربوط به برآمدیگی‌ها و تورفتگی‌های گلدان را به a، b و c نمایش داده‌ایم و

$h = 0$ را کف گلدان می‌گیریم. قطعاً با ریختن آب در گلدان ارتفاع سطح آب افزایش می‌یابد، پس h تابعی صعودی از t خواهد بود. به فرض مشتق‌پذیری، مشتق اول h نسبت به t مثبت است. عامل دیگری که در شکل نمودار مؤثر است علامت مشتق دوم h نسبت به t است. اگر مشتق اول، یعنی آهنگ افزایش h در زمان، خود صعودی باشد، مشتق دوم مثبت و نمودار محدب است، ولی اگر آهنگ افزایش h نسبت به t، نزولی باشد، مشتق دوم منفی و نمودار مقعر خواهد بود. پس لازم است تغییر ارتفاع را در بازه‌های مختلف بررسی کنیم. در بازهٔ $0 \leq h \leq a$، ضخامت بدنهٔ گلدان رو به افزایش است، بنابراین آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب به تدریج کندتر می‌شود، پس مشتق دوم h نسبت به t وقتی $0 < h < a$، منفی است. بالعکس برای $a \leq h \leq b$، تنگ‌تر شدن مقطع گلدان موجب می‌شود که آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب فزونی یابد و در نتیجه در $a < h < b$، مشتق دوم h نسبت به t مثبت خواهد بود. و بالاخره در $b \leq h \leq c$، نیز، مانند $0 \leq h \leq a$، آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب نزولی است و $h''(t)$ منفی می‌باشد. یکی دو نکتهٔ دیگر در اینجا حائز اهمیت است. در هر دو بازهٔ $0 \leq h \leq a$ و $b \leq h \leq c$، داریم $h'(t) > 0$ و $h''(t) < 0$، ولی شکل مقطع گلدان در دو مورد متفاوت است، این اختلاف شکل گلدان را چگونه می‌توان در نمودار $h(t)$ منعکس کرد؟ اگر فرض کنیم طول بازه‌های $[0, h]$ و $[b, c]$ برابر است و مقطع گلدان در ارتفاع‌های 0 و b برابر و نیز در ارتفاع‌های a و c برابر است، می‌بینیم که حجم گلدان بین 0 و a، به سبب برآمدگی، بیشتر از حجم گلدان بین b و c است. بنابراین، توجه به اینکه آب با آهنگ ثابت وارد گلدان می‌شود، مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع 0 تا a بزرگتر از مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع b تا c است. این نکته در نمودار منظور شده است، توجه کنید که بازه $[t_b, t_c]$ کوچکتر از $[0, t_a]$ منظور شده است.

تمرین. همین بررسی را برای گلدان‌های شکل زیر انجام دهید. علاوه بر شکل کیفی، با توجه به داده‌های تصاویر فرمولی برای h برحسب t به‌دست آورید و مشتق‌های اول، دوم و سوم h نسبت به t را مطالعه کنید.

مثال ۲. نمودار مصرف $\frac{\text{لیتر}}{\text{ساعت}}$ بنزین یک نوع اتومبیل برحسب سرعت اتومبیل در شکل ۹ آمده است. چگونه می‌توان سرعتی را پیدا کرد که در آن بهترین راندمان $\frac{\text{لیتر}}{\text{کیلومتر}}$ حاصل می‌شود؟

سرعت اتومبیل را به v نمایش می‌دهیم. برای هر سرعت v، p متناظر در نمودار، مصرف بنزین اتومبیل به لیتر است اگر اتومبیل یک ساعت با سرعت ثابت v حرکت کند، یا به بیان دیگر $p = \frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}$ اگر اتومبیل با سرعت ثابت v حرکت کند. در شکل می‌بینیم که بهترین راندمان نسبت به زمان، یعنی کمترین مصرف در ساعت، به‌ازای $v = ۵۰$ کیلومتر در ساعت به‌دست می‌آید. مجهولی که مطرح است، بهترین راندمان مصرف بنزین نسبت به مسافت است. اگر $\frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{مسافت به کیلومتر}}$ را به q نمایش دهیم، در سرعت ثابت v داریم:

$$q = \frac{\frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}}{\frac{\text{مسافت به کیلومتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}} = \frac{p}{v}$$

بنابراین مسأله یافتن مینیمم q مطرح است. توجه کنید که شهوداً نباید انتظار داشت که مینیمم q و مینیمم p لزوماً در یک سرعت حاصل شوند. بهترین راندمان سوخت بنزین در ساعت از نظر حفظ و نگاهداری موتور بهینه است ولی ممکن است برای رسیدن به یک مقصد دوردست کمترین مصرف بنزین را متضمن نباشد. در واقع اگر منحنی p برحسب v، طبق شکل ۹ باشد (این منحنی از آزمایش‌های واقعی گرفته شده است)، هدف ما مینیمم کردن $\frac{p}{v}$ است نه مینیمم کردن p. توجه کنید که برای هر سرعت v، q متناظر برابر شیب خط راستی است که از ۰ به نقطهٔ (v,p) روی نمودار رسم می‌شود. بنابراین باید نقطه‌ای را روی نمودار پیدا کرد که شیب این خط راست برای آن حداقل ممکن باشد. واضح است که این حداقل برای خط مماسی که از ۰ به نمودار رسم شود به‌دست می‌آید و این سرعتی $v_۰$ بالاتر از نقطهٔ مینیمم p به‌دست می‌دهد (در شکل ۹، $v = v_۰$). به عنوان یک تقریب محاسباتی، فرض کنید $p = \frac{۱}{۱۰۰}(v-۵۰)^۲ + ۵$ که به‌ازای $v = ۵۰$ مینیمم دارد. داریم $\frac{dp}{dv} = \frac{۱}{۵۰}v - ۱$ و

$$\frac{dq}{dv} = \frac{\frac{dp}{dv}\cdot v - p}{v^۲} = \frac{\frac{۱}{۵۰}v^۲ - v - \frac{۱}{۱۰۰}(v-۵۰)^۲ - ۵}{v^۲}$$

برای یافتن مینیمم q، قرار می‌دهیم $\frac{dq}{dv} = 0$ (از ماهیت نمودار v روشن است که q باید دارای مینیمم در یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف باشد) که نتیجه می‌دهد $\frac{1}{100}v^2 - 30 = 0$، یا $v \simeq 54/8$ کیلومتر بر ساعت.