تقریب خطی

از بدو بررسی مشتق دیدیم که از میان همهٔ خطوط راستی که از یک نقطهٔ نمودار یک تابع مشتق‌پذیر می‌گذرند، خط مماس به معنایی "نزدیکترین" این خطوط به نمودار تابع است. به طور دقیق، برای نقاط نزدیک نقطهٔ داده شده، تفاضل مقدار y روی نمودار و روی خط مماس آنقدر کوچک است که این تفاضل به سرعت مضاعف (مانند $\Delta x \phi(\Delta x)$) به صفر میل می‌کند. طبیعی است که کوشش کنیم از این نزدیکی برای تقریب مقدار تابع استفاده کنیم چه محاسبهٔ y برای خط راست که معادله درجه یک دارد کاری بسیار ساده است. اگر تابع f در نقطهٔ درونی a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد، تقریب زدن مقدار f در نزدیکی a را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h \qquad (۱)$$

با نوشتن $h = \Delta x$ و $f(a+h) - f(a) = \Delta y$، (۱) به صورت

$$\Delta y \simeq f'(a)\Delta x \qquad (۲)$$

نیز نوشته می‌شود. به نماد لایب‌نیتس، اگر نمو متغیر تقریب خطی، یعنی dx، را به‌اندازهٔ Δx بگیریم، (۲) به صورت زیر در می آید

$$Dy \simeq dy \qquad (۳)$$

در نوشتگان گوناگون ممکن است به هر یک از سه صورت بالا برخورد کنید، که همه یک معنی دارند. چند مثال محاسباتی ارائه می‌کنیم.

مثال ۱. مقداری تقریبی برای $\sqrt[3]{1/012}$ ارائه کنید.

در این نوع مسایل باید تابعی مناسب محاسبهٔ مورد نظر ارائه کنیم، مثلاً در اینجا $f(x)=\sqrt[3]{x}$؛ سپس عددی a، نزدیک متغیر مورد محاسبه که برای آن محاسبهٔ مقدار تابع، یعنی $f(a)$، ساده باشد، در اینجا $a=1$؛ و بالاخره h را برابر تفاضل عدد داده شده و عدد a بگیریم، در اینجا $h=0/012$. بدین ترتیب تقریب (۱) در اینجا به شکل زیر در می‌آید

$$\sqrt[3]{1/012}\simeq\sqrt[3]{1}+f'(1)\cdot(0/012)$$

با مشتق‌گیری از $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ داریم $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$، پس $f'(1)=\frac{1}{3}$ و داریم

$$\sqrt[3]{1/012}\simeq 1+(\frac{1}{3})(0/012)=1/004$$

مثال ۲. گفته می‌شود که برای مقادیر کوچک $|\theta|$، برحسب رادیان، $\sin\theta\simeq\theta$. نشان می‌دهیم مبنای این ادعا، تقریب خطی است. می‌نویسیم $f(x)=\sin x$، پس $f'(x)=\cos x$، و $a=0$، پس $f(a)=0$ و $f'(a)=1$. بنابراین با قراردادن θ به جای h در (۱) داریم

$$\sin\theta\simeq 0+1\cdot\theta=\theta$$

مثال ۳. ظرف قیف شکل طبق شکل ۱ را در نظر می‌گیریم که ارتفاع آن ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده آن ۱۰ سانتی‌متر است و طوری قرار گرفته که رأس آن در پایین و محور مخروط در راستای قائم قرار دارد. مقداری آب در این ظرف ریخته شده است و ارتفاع آب از رأس قیف برابر ۶ سانتی‌متر با خطای ممکن $\pm 0/1$ سانتی‌متر اندازه‌گیری شده است. اگر حجم آب موجود در این ظرف را بر اساس ارتفاع اندازه‌گیری شده محاسبه کنیم، خطای ممکن در محاسبه حجم حداکثر چه‌قدر است؟

اگر ارتفاع سطح آب را به h و شعاع سطح آب را به r نمایش دهیم، از تشابه مثلث‌ها داریم $r=\frac{h}{2}$. حال اگر حجم آب را به V نمایش دهیم، داریم

$$V=\frac{\pi}{12}h^3$$

با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود که

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{۴}h^{۲}$$

با استفاده از (۲) داریم

$$\Delta V \simeq (\frac{\pi}{۴}(٦^{۲}))\Delta h = (۹\pi)(\Delta h)$$

خطای محاسبهٔ ارتفاع سطح آب ۰/۱± سانتی‌متر فرض شده است، یعنی $|\Delta h| \leq ۰/۱$، بنابراین $|\Delta V|$ حدوداً از $\frac{۹}{۱۰}\pi$ یعنی حدوداً ۲٫۸۳ سانتی‌متر مکعب کوچکتر است.

مثال‌های بالا را باید از نظر علمی بدوی تلقی کرد زیرا که در کاربردهای مختلف درجه دقت‌های متفاوت مورد نظر است و تقریبی که در یک کاربرد پذیرفتنی است در کاربردی دیگر ممکن است منجر به خطاهای غیرقابل قبول شود. برای هر روش تقریب باید قاعده‌ای عملی برای تخمین حدود خطا نیز ارائه شود که به کمک آن بتوانیم به یک ارزیابی در مورد قابل قبول بودن روش تقریب دست یابیم. در مورد تقریب خطی به زودی به چنین روشی برای تخمین خطا دست خواهیم یافت ولی در حال حاضر موضوع "خطای نسبی" را مطرح می‌کنیم که از نظر عملی اغلب ضابطه‌ای سودمندتر از خطای مطلق است. به طور کلی، خطای نسبی برابر نسبت خطا به مقدار واقعی تعریف می‌شود. بدین ترتیب اگر نمو کوچک متغیر، یعنی Δx، را به عنوان خطا در اندازه‌گیری مقدار x متغیر فرض کنیم، خطای نسبی $\frac{\Delta x}{x}$ خواهد بود، و نیز خطای نسبی متناظر برای مقدار تابع، $\frac{\Delta y}{y}$ می‌شود.

مثال ۴. در مثال ۳ بالا، اگر ارتفاع آب ٦ سانتی‌متر با خطای نسبی حداکثر یک درصد اندازه‌گیری شده باشد، حداکثر خطای نسبی حاصل در محاسبهٔ حجم متناظر چیست؟

در اینجا داریم $|\frac{\Delta h}{h}| \leq \frac{۱}{۱۰۰}$ و می‌خواهیم کران بالایی برای $|\frac{\Delta V}{V}|$ به‌دست آوردیم. داشتیم

$$\Delta V \simeq f'(a)\Delta h$$

با تقسیم کردن بر V نتیجه می‌شود

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq (\frac{\pi}{۴}h^{۲})\frac{\Delta h}{\frac{\pi}{۱۲}h^{۳}} = ۳\frac{\Delta h}{h}$$

بنابراین $|\frac{\Delta V}{V}| \leq \frac{۳}{۱۰۰}$، یعنی خطای نسبی متناظر در محاسبهٔ حجم حداکثر ۳ درصد است.

مثال ۵. مثال بالا را می‌توان به این صورت تعمیم داد. فرض کنید $y = kx^n$ که در آن k ثابت است. اگر در محاسبه یا اندازه‌گیری x حداکثر خطای نسبی r درصد باشد، حداکثر خطای نسبی در محاسبهٔ y چیست؟

داریم $\frac{dy}{dx} = nkx^{n-۱}$، پس

$$\Delta y \simeq nkx^{n-۱}\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{nkx^{n-۱}}{kx^n}\Delta x = n\frac{\Delta x}{x}$$

بدین ترتیب اگر کمیت y متناسب با توان nـ ام کمیت x باشد خطای نسبی در y حدوداً n برابر خطای نسبی در x خواهد بود. به یک مثال آشنا در این زمینه توجه کنید. مربعی به ضلع a با خطای $\pm h$ داده شده است. می‌خواهیم خطای احتمالی حادث در محاسبهٔ مساحت مربع را تخمین بزنیم. داریم

$$(a \pm h)^۲ - a^۲ = \pm ۲ah + h^۲$$

اگر h کوچک باشد، $h^۲$ در مقایسه بسیار کوچکتر است و معمولاً "قابل صرف‌نظر" تلقی می‌شود. $h^۲$ برابر مساحت گوشهٔ کوچک هاشورزده در شکل ۲ است. بنابراین داریم

$$(a \pm h)^۲ - a^۲ \simeq \pm ۲ah$$

این دقیقاً برابر نتیجه‌ای است که از تقریب خطی تابع $f(x) = x^۲$ حاصل می‌شود، با تقسیم بر $a^۲$ نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{(a \pm h)^۲ - a^۲}{a^۲} \simeq \pm ۲\frac{h}{a}$$

در اینجا $\frac{h}{a}$ خطای نسبی در محاسبهٔ طول ضلع مربع است و طرف چپ خطای نسبی در محاسبهٔ مساحت مربع.

اکنون به بررسی تخمین خطا در تقریب خطی می‌پردازیم. چهار نمونهٔ تقریب خطی در نمودارهای شکل ۳ را در نظر بگیرید.

در همه موارد به وضوح مشاهده می‌شود که هر چه $|h|$ کوچکتر باشد، فاصلهٔ بین خط مماس و نمودار تابع کوچکتر است. تفاوت دیگری که میان شکل‌های (الف) و (ب) از یک سو با (ج) و (د) در سوی دیگر وجود دارد این است که با رشد $|h|$ در شکل‌های (الف) و (ب)، میزان خطا، یعنی اختلاف مقدار y میان نمودار تابع و تقریب خطی، به شدت افزایش می‌یابد در حالی که در شکل‌های (ج) و (د)، نمو خطا به نسبت کند است. در (ج) و (د) نمودار تا فاصلهٔ زیادی نسبت $(a, f(a))$ نزدیک به خط راست می‌ماند در حالی که در (الف) و (ب)، انحراف نمودار از "راست بودن" بسیار شدید است. چگونه می‌توان این تفاوت را به صورت ریاضی صورت‌بندی کرد؟ اگر فرض کنیم تابع f در سراسر دامنه، یا دست‌کم در بازه‌ای حول a، مشتق‌پذیر است، یعنی خط مماس بر تابع در همهٔ نقاط نمودار یا دست‌کم نقاط نزدیک به $(a, f(a))$ وجود دارد، آنگاه مشاهده می‌کنیم که شیب مماس در شکل‌های (الف) و (ب) سریعاً تغییر می‌کند در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) شیب مماس آهنگ تغییر کندی دارد. ولی شیب مماس برابر مشتق تابع است، پس در شکل‌های (الف) و (ب) آهنگ تغییر مشتق تابع در قدرمطلق بزرگ است، در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) آهنگ تغییر مشتق کوچک می‌باشد. بنابراین اگر مشتق تابع f، یعنی f'، را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم، و اگر این تابع خود مشتق‌پذیر باشد، از آنجا که آهنگ تغییر به وسیله مشتق سنجیده می‌شود، اندازهٔ مشتق f' باید نشان‌دهندهٔ شدت انحراف نمودار از یک خط راست باشد، مشتق f' را که به f'' نمایش می‌دهند، "مشتق دوم f" می‌نامند. در زیر تعریف دقیق را بررسی می‌کنیم:

(۱۷−۱) $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع است و f در نقاط زیرمجموعه‌ای S' از S مشتق‌پذیر است، یعنی $f' : S' \longrightarrow \mathbb{R}$، تعریف شده است. برای نقطهٔ درونی a از S'، اگر مشتق f' در نقطهٔ a وجود داشته باشد، آن را مشتق دوم f در نقطهٔ a خوانده و به $f''(a)$ نمایش می‌دهیم.

اگر بنویسیم $y = f(x)$، در نمادگذاری لایب‌نیتس، $f''(x)$ به $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ یا اختصاراً $\frac{d^2y}{dx^2}$ نمایش داده می‌شود.

اکنون می‌توانیم به کمک مشتق دوم f، تخمینی برای خطای تقریب خطی ارائه کنیم.

(۱۷—۲) (تخمین خطای تقریب خطی) فرض کنید تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در یک بازهٔ باز شامل نقطهٔ درونی a از S دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم است. در این صورت اگر نقطهٔ $a+h$ در این بازه باشد داریم

$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)h] = \frac{۱}{۲} f''(c)h^۲ \qquad (۴)$$

که در آن c نقطه‌ای بین a و $a+h$ است.

توجه کنید که این حکم با انتظارات ما سازگار است. از یک طرف هر قدر $|h|$ کوچکتر باشد، خطای منتظره کوچکتر است (در واقع طرف راست (۴) با مجذور h متناسب است)، و از طرفی دیگر اندازهٔ مشتق دوم بین a و $a+h$ می‌تواند بر مقدار خطا اثر بگذارد. ظهور مجذور h بدین معنی است که در مبنای عددنویسی اعشاری اگر اندازه‌گیری a یک رقم اعشار دقیق‌تر شود، می‌توان انتظار داشت که خطای محاسبه تا دو رقم اعشار کاهش یابد زیرا اگر به جای h از $\frac{h}{۱۰}$ استفاده کنیم، طرف راست (۴) بر ۱۰۰ تقسیم خواهد شد. در اثبات ۱۷—۲ خواهیم دید که حکم آن در واقع همتای قضیهٔ میانگین برای تابع‌های دوبار مشتق‌پذیر است. در واقع اثبات ما به تبعیت از اثبات قضیهٔ میانگین با ارائه همتایی از قضیهٔ رل شروع خواهد شد.

(۱۷—۳) (همتای قضیهٔ رل برای مشتق دوم) I یک بازهٔ باز است، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم در I، a و b دو نقطهٔ I که $a < b$، $f(a) = f(b) = ۰$ و $f'(a) = ۰$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f''(c) = ۰$.

برهان. شرایط قضیهٔ رل معمول برای $[a, b]$ برقرار است، پس نقطه‌ای $c_۱$ وجود دارد، $a < c_۱ < b$، که $f'(c_۱) = ۰$.

حال شرایط قضیهٔ رل معمولی برای تابع f' در $[a, c_۱]$ برقرار می‌شود زیرا که $f'(a) = f'(c_۱) = ۰$، پس نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < c_۱$، که $f''(c) = (f')'(c) = ۰$. □

(۱۷—۴) (همتای قضیهٔ میانگین برای مشتق دوم) I یک بازهٔ باز است، $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم در I، a و b و نقطهٔ I که $a < b$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که:

$$f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)] = \frac{۱}{۲} f''(c)(b-a)^{۲} \qquad (۵)$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $b = a + h$، (۵) به (۴) تبدیل می‌شود و پس از اثبات ۱۷—۴، صحت ۱۷—۲ نیز نتیجه می‌شود.

برهان ۱۷—۴. مشابه شیوه‌ای که از قضیهٔ رل معمولی، قضیهٔ میانگین را نتیجه گرفتیم، عمل می‌کنیم. در آنجا با کم کردن مقدار y خط واصل از $(a, f(a))$ به $(b, f(b))$ از $y = f(x)$ دیدیم که تفاضل در قضیهٔ رل صدق می‌کند. در اینجا چون شیب خط راست فوق لازم نیست برابر $f'(a)$ باشد، این تفاضل شرط لازم برای مشتق در نقطهٔ آغازی را برآورده نمی‌کند. بنابراین تابعی یک درجه پیچیده‌تر از تابع درجه یک (با نمودار خط راست) باید جستجو کنیم که در نقطهٔ a مقدار تابع و مقدار مشتق آن برابر به ترتیب $f(a)$ و $f'(a)$ باشند، و در نقطهٔ b، مقدار تابع برابر $f(b)$. برای برآورده کردن این سه شرط یک تابع درجه ۲ کفایت می‌کند. تابعی کمکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^{۲}$$

برای اینکه $\phi(a) = f(a)$، باید داشته باشیم $A = f(a)$. اگر یک بار از ϕ مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\phi'(x) = B + ۲C(x-a)$$

برای اینکه $\phi'(a) = f'(a)$، باید داشته باشیم $B = f'(a)$، پس

$$\phi(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + C(x-a)^{۲} \qquad (٦)$$

برای تعیین ضریب C، از شرط $\phi(b) = f(b)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + C(b-a)^{۲}$$

یا

$$C = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^۲} \qquad (۷)$$

بدین ترتیب با این مقدار برای C، تابع ϕ در (۶) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\phi(a) = f(a) \quad , \quad \phi'(a) = f'(a) \quad , \quad \phi(b) = f(b) \qquad (۸)$$

حال تابع g را به صورت

$$g(x) = f(x) - \phi(x)$$

تعریف می‌کنیم. از (۸) نتیجه می‌شود که

$$g(a) = g(b) = ۰ \quad , \quad g'(a) = ۰$$

بنابراین طبق (۱۷—۳) نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $g''(c) = ۰$، ولی:

$$g''(c) = f''(c) - ۲C = ۰$$

یا

$$f''(c) = (۲)\frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^۲}$$

و با طرفین ـ وسطین حکم (۵) نتیجه می‌شود. □

بدین ترتیب همان طور که قبل از ارائه برهان اشاره شد، تخمین خطای تقریب خطی، یعنی فرمول (۴) و گزاره ۱۷—۲ از ۱۷—۴ نتیجه می‌شوند.

مثال ۶. تقریب خطی $\sqrt[۳]{۱/۰۱۲} \simeq ۱/۰۰۴$ را که در مثال ۱ آوردیم بررسی می‌کنیم. در این مثال داشتیم $f(x) = \sqrt[۳]{x}$، پس $f'(x) = \frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$ و $f''(x) = -\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}$. بنابراین طبق ۱۷—۲

$$\sqrt[۳]{۱/۰۱۲} - ۱/۰۰۴ = (\frac{۱}{۲})(-\frac{۲}{۹})\frac{۱}{c^{\frac{۵}{۳}}}(\frac{۱۲}{۱۰۰۰})^۲ \qquad (۹)$$

که در اینجا c بین ۱ و ۱/۰۱۲ است. ۱۷—۲ اطلاع دقیق‌تری در مورد c نمی‌دهد و اصولاً نباید انتظار داشت که بتوان میزان خطا را به راحتی و دقت به‌دست آورد زیرا در این صورت با افزودن این مقدار به مقدار تقریبی، مقدار دقیق به‌دست می‌آمد. آنچه در اینجا مطلوب است یافتن حدود یا یک کران بالایی برای قدرمطلق خطاست. اگر بتوانیم کرانی بالایی برای خطا به‌دست آوردیم که در کاربرد خاص مورد نظر قابل قبول باشد، تقریب مطرح شده نیز پذیرفتنی است. در اینجا چون $1 < c < 1/012$ و c در مخرج طرف راست (۹) است، با قرار دادن $c = 1$، قدرمطلق طرف راست (۹) یک کران بالایی برای قدرمطلق خطا به‌دست می‌دهد:

$$|\sqrt[3]{1/012} - 1/004| < \frac{16}{10^6}$$

بنابراین اگر مثلاً دقت 10^{-4} مورد نظر باشد، تقریب بالا قابل قبول است. اگر از قاعده روند کردن استفاده کنیم، چون $\frac{16}{10^6} < \frac{1}{2}10^{-4}$، تقریب ۱/۰۰۴۰ تا چهار رقم اعشار درست است. محاسبه با یک ماشین حساب به نسبت قوی می‌دهد $\sqrt[3]{1/012} \simeq 1/0039841$ که اگر به چهار رقم پس از اعشار روند شود به همان ۱/۰۰۴۰ می‌رسد.

ذکر یکی دو نکته در مورد مثال بالا لازم است. اول اینکه علامت منفی طرف راست (۹) نشانگر این است که تقریب ۱/۰۰۴ از مقدار واقعی بزرگتر است. در واقع با توجه به علامت منفی $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ برای $x > 0$، مشاهده می‌کنیم که $\frac{1}{2}f''(c)h^2 < 0$ و طبق (۴) نمودار تابع همواره زیر خط مماس قرار دارد (شکل ۵).

نکته دوم که از $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ و نیز نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$، $x > 0$، مشاهده می‌شود این است که $|f''(x)|$ به $+\infty$ میل می‌کند وقتی $x \longrightarrow 0^+$، در حالی که $|f''(x)|$ به صفر میل می‌کند وقتی $x \longrightarrow +\infty$. در نمودار این نکته به این صورت ظاهر می‌شود که شیب خط مماس بر نمودار وقتی $x \longrightarrow 0^+$ به شدت تغییر می‌کند در حالی که تغییر شیب وقتی $x \longrightarrow +\infty$ بسیار کندتر است. بنابراین می‌توان انتظار داشت که مثلاً مقداری که تقریب خطی در نقطهٔ $a = 1$ برای $\sqrt[3]{1+h}$ به‌دست می‌دهد، یعنی $1 + \frac{h}{3}$، برای $h > 0$ دقیق‌تر از $h < 0$ با همان $|h|$ باشد. مثلاً برای $h = 0/21$ مقدار تقریبی ۱/۰۷ به‌دست می‌آید که تا دو رقم اعشار با روند کردن درست است (ماشین حساب به نسبت قوی

مقدار ۱٫۰۶۵۶ را می‌دهد که با روند کردن به ۱٫۰۷ تبدیل می‌شود). این در حالی است که برای $h = -۰/۲۱$ تقریب ۰٫۹۳ با مقدار ارائه شده توسط ماشین حساب به صورت ۰٫۹۲۴۴۳ تا دو رقم پس از اعشار، پس از روند کردن، مطابقت ندارد. برای $|h|$ بزرگتر تفاوت فاحش‌تر می‌شود. برای $h = ۱$، اختلاف تقریب خطی $۱ + \frac{۱}{۳} = ۱/۳۳۳۳۳۳$ با مقدار ۱٫۲۵۹۹۲۱ ماشین حساب حدوداً ۰٫۰۷۳۴۱۲ است در حالی که برای $h = -۱$، تقریب خطی $\frac{۲}{۳}$ با مقدار واقعی ۰، $۰/۶۶۶۶۶۶ = \frac{۲}{۳}$ اختلاف دارد.