نتایج اولیهٔ مشتق‌پذیری

در جلسهٔ قبل مفهوم مشتق و مشتق‌پذیری مورد بررسی قرار گرفت. در این جلسه نخست با بیان و اثبات یک گزاره در مورد آمیختن جبری توابع مشتق‌پذیر، چند دسته تابع مشتق‌پذیر معرفی می‌کنیم، سپس به ذکر پاره‌ای خواص ابتدایی مشتق می‌پردازیم.

(۱۵—۱) گزاره. فرض کنید تابع‌های $f,g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $x_\circ$ از دامنه مشتق‌پذیرند. در این صورت:

الف) $f+g$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(f+g)'(x_\circ) = f'(x_\circ) + g'(x_\circ)$.

ب) (قانون لایب نیتس) $f \cdot g$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(f\cdot g)'(x_\circ) = f'(x_\circ)g(x_\circ) + f(x_\circ)g'(x_\circ)$.

ج) قرار دهید $S' = \{x \in S \mid g(x) \neq \circ\}$. فرض کنید $x_\circ$ یک نقطهٔ درونی S' است. در این صورت تابع $\frac{f}{g} : S' \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(\frac{f}{g})'(x_\circ) = \frac{f'(x_\circ)g(x_\circ) - f(x_\circ)g'(x_\circ)}{g(x_\circ)^{۲}}$$

برهان. (الف) $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_\circ)}{x-x_\circ} = \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} + \frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}$ و حکم از این که حد مجموع برابر مجموع حدهاست نتیجه می‌شود.

(ب)

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_\circ)g(x_\circ)}{x-x_\circ}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_\circ)g(x)}{x-x_\circ}+\frac{f(x_\circ)g(x)-f(x_\circ)g(x_\circ)}{x-x_\circ}\\ &= (\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ})g(x)+f(x_\circ)(\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ})\end{aligned}$$

توجه کنید که طبق گزاره ۱۴—۸، چون g در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است، g در $x_\circ$ پیوسته نیز هست، پس $g(x) \longrightarrow g(x_\circ)$ وقتی $x \longrightarrow x_\circ$. حکم از اینکه حد مجموع و حاصل‌ضرب برابر مجموع و حاصل‌ضرب حد است نتیجه می‌شود.

(ج)

$$\begin{aligned}\frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \frac{f(x)g(x_\circ)-f(x_\circ)g(x)}{(x-x_\circ)g(x)g(x_\circ)}\\ &= [(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ})g(x_\circ)-f(x_\circ)\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}]\frac{۱}{g(x)g(x_\circ)}\end{aligned}$$

در اینجا نیز حکم از پیوستگی g در $x_\circ$ و قوانین حد مجموع و حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود. □

(۱۵—۲) تابع‌های گویا. نخست یک تابع چندجمله‌ای

$$p(x)=a_\circ+a_۱x+\cdots+a_mx^m \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید. در مثال‌های ۱۴—۵—۱ و ۱۴—۵—۲ دیدیم که هر تک‌جمله‌ای a_kx^k، $k=\circ,۱,\ldots,m$، مشتق‌پذیر است و فرمولی برای مشتق آن پیدا کردیم. پس با توجه به ۱۵—۱ (الف)، این چندجمله‌ای به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و در واقع

$$p'(x)=a_۱+۲a_۲x+\cdots+ma_mx^{m-۱} \qquad (۲)$$

حال فرض کنید $q(x)=b_\circ+b_۱x+\cdots+b_nx^n$ یک چندجمله‌ای دیگر باشد. از ۱۵—۱ (ج) نتیجه می‌شود که تابع گویای تعریف شده به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ روی دامنهٔ $S'=\{x\in\mathbb{R}\mid q(x)\neq\circ\}$ در همهٔ نقاط دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و می‌توان مشتق آن را به کمک ۱۵—۱ محاسبه کرد. توجه کنید که هر نقطهٔ $x_\circ$ از S' یک نقطهٔ درونی S' است زیرا بنابر پیوستگی q، اگر $q(x_\circ)\neq\circ$، آنگاه برای همهٔ x های نزدیک $x_\circ$ نیز داریم $q(x)\neq\circ$.

(۱۵—۳) **تابع‌های مثلثاتی.** در گزارهٔ ۱۰—۴ از بخش ۱۰ دیدیم که تابع‌های مثلثاتی $\sin$، $\cos$، $\tan$، $\cot$، sec و csc، هر یک در دامنهٔ تعریف خود پیوسته هستند. اکنون نشان می‌دهیم این تابع‌ها در دامنهٔ تعریف خود مشتق‌پذیر نیز هستند و فرمول‌هایی برای مشتق آنها به‌دست می‌آوریم. با توجه به گزاره ۱۵—۱ کافی است مشتق‌پذیری سینوس و کسینوس ثابت شود زیرا چهار تابع دیگر به صورت خارج قسمت این تابع‌ها تعریف می‌شوند. بدین ترتیب نخست تابع سینوس را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\tfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \tfrac{(\sin x)(\cos h)+(\cos x)(\sin h)-\sin x}{h}\\ &= (\sin x)\tfrac{\cos h-۱}{h}+(\cos x)\tfrac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

در ۱۳—۷—۲ دو حد اساسی مثلثاتی $\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$ و $\lim_{h\to ۰}\frac{۱-\cos h}{h}=۰$ را ثابت کردیم. بنابراین

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$$

به بیان دیگر، تابع $\sin$ به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و

$$\sin' x=\cos x \qquad (۳)$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که تابع $\cos$ به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و

$$\cos' x=-\sin x \qquad (۴)$$

حال با استفاده از ۱۵—۱ (ج) ثابت می‌شود که توابع $\tan=\frac{\sin}{\cos}$، $\cot=\frac{\cos}{\sin}$، $sec=\frac{۱}{\cos}$ و $csc=\frac{۱}{\sin}$ به‌ازای هر x در دامنهٔ تعریف (یعنی به‌ازای x هایی که مخرج عبارت تعریف کننده صفر نشود) مشتق‌پذیرند و فرمول‌های زیر به سادگی نتیجه می‌شوند:

$$\tan' x=sec^{۲} x=۱+\tan^{۲} x \qquad (۵)$$

$$\cot' x=-\csc^{۲} x=-(۱+\cot^{۲} x) \qquad (٦)$$

$$\sec' x=(\tan x)(sec\ x) \qquad (۷)$$

$$\csc' x = -(\cot x)(csc\ x) \tag{۸}$$

در باقیماندهٔ این بخش به بررسی دسته‌ای از خواص مشتق می‌پردازیم که به علامت مشتق و اندازهٔ آن بستگی دارند.

(۱۵—۴) علامت مشتق در یک نقطه

فرض کنید $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $x_\circ$ از S مشتق‌پذیر باشد. سه حالت $f'(x_\circ) > \circ$، $f'(x_\circ) < \circ$ و $f'(x_\circ) = \circ$ وجود دارد که هر یک را بررسی می‌کنیم.

نخست فرض کنید $f'(x_\circ) > \circ$. اگر عددی e طوری اختیار کنیم که $\circ < e < f'(x_\circ)$، طبق تعریف حد، $\delta > \circ$ وجود دارد که برای $\circ < |x - x_\circ| < \delta$ داریم:

$$-e < \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - f'(x_\circ) < e$$

بالاخص

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} > f'(x_\circ) - e > \circ \tag{۹}$$

بنابراین صورت و مخرج کسر سمت چپ باید هم علامت باشند و می‌توان حکم کرد که:

(۱۵—۴—۱) اگر $f'(x_\circ) > \circ$، آنگاه $\delta > \circ$ وجود دارد که اگر $x_\circ < x < x_\circ + \delta$، آنگاه $f(x) > f(x_\circ)$، و اگر $x_\circ - \delta < x < x_\circ$، آنگاه $f(x) < f(x_\circ)$.

به بیان دیگر اگر $f'(x_\circ) > \circ$، آنگاه برای x های نزدیک و بزرگتر از $x_\circ$، مقدار $f(x)$ بزرگتر از $f(x_\circ)$ است و برای x های نزدیک و کوچکتر از $x_\circ$، $f(x)$ کوچکتر از $f(x_\circ)$ می‌باشد. نکتهٔ قابل تذکر این است که این حکم فقط مقدار $f(x_\circ)$ را با مقدار $f(x)$، x نزدیک $x_\circ$، مقایسه می‌کند و دال بر صعودی بودن تابع f در یک بازهٔ کوچک حول $x_\circ$ نیست. شکل ۱ وضعیتی را نشان می‌دهد که حکم ۱۵—۴—۱ برقرار است ($f'(\circ) > \circ$) و لیکن f در هیچ بازهٔ حول $\circ$ صعودی نیست.

در این شکل نمودار تابع در نزدیکی ۰ بی‌نهایت "دندانه" یا شاخهٔ صعودی‌ـ نزولی دارد که دامنهٔ آنها به تدریج کوچک می‌شود ولی هر قدر هم که به ۰ نزدیک شویم هنوز شاخه‌های نزولی و صعودی در دو طرف ۰ وجود دارند. در آینده عبارت صریحی برای تعریف چنین تابعی ارائه خواهیم کرد.

حالت $f'(x_\circ) < \circ$ مشابه است. در اینجا اگر e را طوری بگیریم که $\circ < e < -f'(x_\circ)$، آنگاه $\delta > \circ$ وجود دارد که برای $\circ < |x - x_\circ| < \delta$ داریم:

$$-e < \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - f'(x_\circ) < e$$

بالاخص

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} < f'(x) + e < \circ \qquad (۱۰)$$

بنابراین صورت و مخرج کسر سمت چپ باید علامت مختلف داشته باشند که از آن نتیجه می‌شود:

(۱۵ــ۴ــ۲) اگر $f'(x_\circ) < \circ$، آنگاه $\delta > \circ$ وجود دارد که اگر $x_\circ < x < x_\circ + \delta$، آنگاه $f(x) < f(x_\circ)$، و اگر $x_\circ - \delta < x < x_\circ$، آنگاه $f(x) > f(x_\circ)$.

در اینجا اگر x نزدیک و بزرگتر از $x_\circ$ باشد، داریم $f(x) < f(x_\circ)$، و اگر x نزدیک و کوچکتر از $x_\circ$ باشد، $f(x) > f(x_\circ)$.

از ۱۵ــ۴ــ۱ و ۱۵ــ۴ــ۲ نتیجه جالب توجهی حاصل می‌شود. برای یک تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، نقطهٔ درونی $x_\circ$ از S را یک نقطهٔ بیشینه موضعی (به ترتیب نقطهٔ کمینهٔ موضعی) می‌نامیم اگر $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in S$ که $|x - x_\circ| < \delta$ داشته باشیم $f(x) \leq f(x_\circ)$ (به ترتیب $f(x) \geq f(x_\circ)$). حال فرض کنید تابع f در نقطهٔ بیشینه یا کمینه موضعی $x_\circ$ مشتق‌پذیر است. در این صورت هیچ‌یک از دو وضعیت $f'(x_\circ) > \circ$ و $f'(x_\circ) < \circ$ در $x_\circ$ ممکن نیست زیرا که بنابر ۱۵ــ۴ــ۱ و ۱۵ــ۴ــ۲، مقدار تابع باید در یک طرف $x_\circ$ بزرگتر از $f(x_\circ)$ و در طرف دیگر کوچکتر از $f(x_\circ)$ باشد. بدین ترتیب لاجرم:

(۱۵ــ۴ــ۳) اگر تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $x_\circ$ از S بیشینه یا کمینهٔ موضعی داشته باشد و f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(x_\circ) = \circ$.

بدین ترتیب در نقاط بیشینه و کمینه موضعی درونی که تابع دارای خط مماس باشد، این خط مماس باید لزوماً افقی باشد (شکل ۲).

لازم به ذکر است که افقی شدن خط مماس لزوماً دال بر وجود بیشینه یا کمینهٔ موضعی نیست. در شکل ۲، در نقاط $x_۱$ و $x_۳$ کمینهٔ موضعی موجود است، در $x_۲$ بیشینهٔ موضعی، ولی در $x_۴$ که خط مماس افقی است، نه بیشینه موضعی ظاهر شده است و نه کمینهٔ موضعی. مثال‌های صریح زیر در تأیید این مطلب هستند.

مثال ۱. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به صورت $f(x)=x^۴-x^۳$ تعریف شده است. این تابع به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است. نقاطی را که در آن مشتق صفر می‌شود بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f'(x)=۴x^۳-۳x^۲=x^۲(۴x-۳)$$

پس مشتق در دو نقطهٔ $x=۰$ و $x=\frac{۳}{۴}$ صفر می‌شود. با توجه به علامت یابی $x^۴-x^۳=x^۳(x-۱)$ ملاحظه می‌شود که مقدار f برای $x<۰$ مثبت و برای $۰<x<۱$ منفی است، پس $x=۰$ نمی‌تواند بیشینه یا کمینهٔ موضعی باشد. چون تابع پیوستهٔ $f(x)=x^۴-x^۳$ روی $[۰,۱]$ باید دارای کمینه باشد و مقدار تابع در $]۰,۱[$ منفی است، مقدار کمینه باید منفی باشد. بنابراین این نقطهٔ کمینه باید یک نقطهٔ درونی $[۰,۱]$ باشد زیرا که $f(۰)=f(۱)=۰$. از طرفی دیگر مشتق در کمینهٔ درونی باید صفر باشد، پس نقطه $x=\frac{۳}{۴}$ لزوماً یک کمینه است. نمودار f در شکل ۳ (الف) نمایش داده شده است.

مثال ۲. تابع مشتق‌پذیر $f(x)=x-\sin x$ را در نظر می‌گیریم. داریم $f'(x)=۱-\cos x$ که در مضارب صحیح ۲π صفر می‌شود. هیچ‌یک از این نقاط بیشینه یا کمینه موضعی برای تابع نیست (شکل ۳ (ب)).

در گام بعدی به بررسی مثبت یا منفی بودن علامت مشتق در سراسر یک بازه می‌پردازیم. حربهٔ مناسب برای این کار "قضیه میانگین" است که کاربردهای بسیار دیگری نیز خواهد داشت. نخست حالت خاصی از این قضیه را که به قضیه رُل معروف است بیان و ثابت می‌کنیم.

(۱۵—۵) قضیه رُل. فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که در همهٔ نقاط درونی $[a, b]$ مشتق‌پذیر می‌باشد و $f(a) = f(b) = 0$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f'(c) = 0$.

برهان. اگر f در سراسر $[a, b]$ صفر باشد که مشتق آن در هر نقطه صفر است و نقطهٔ c مورد نظر وجود دارد. حال فرض کنید نقطه‌ای x در $[a, b]$ وجود دارد که $f(x) \neq 0$، مثلاً فرض کنید $f(x) > 0$. تابع پیوستهٔ f روی $[a, b]$ دارای بیشینه است و از آنجا که f در حداقل یک نقطه مثبت است، مقدار این بیشینه باید مثبت باشد. از طرفی دیگر $f(a) = f(b) = 0$، پس نقطهٔ بیشینه باید یک نقطهٔ درونی بازه باشد، مثلاً c که $a < c < b$. حال طبق ۱۵—۴—۳ داریم $f'(c) = 0$. به همین ترتیب اگر $f(x) < 0$، با استفاده از کمینه، نقطهٔ مورد نظر را پیدا می‌کنیم. □

یک تعبیر قضیهٔ بالا این است که نقطه‌ای c بین a و b وجود دارد که مماس بر نمودار به‌ازای c موازی خط واصل بین دو انتهای نمودار است. قضیهٔ زیر را می‌توان دقیقاً این گونه تعبیر کرد.

(۱۵—۶) قضیهٔ میانگین. فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که در همهٔ نقاط درونی $[a, b]$ مشتق‌پذیر می‌باشد. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $0 < c < b$، که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{۱۱}$$

برهان. خط راست واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ معادلهٔ زیر را دارد:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

اگر مقدار سمت راست را از $f(x)$ کم کنیم در وضعیت قضیهٔ رُل قرار می‌گیریم. به طور دقیق، تعریف کنید

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]$$

تابع g در $[a,b]$ پیوسته و در $]a,b[$ مشتق‌پذیر است زیرا که مجموع دو تابع با این ویژگی‌هاست. از طرفی دیگر:

$$g(a) = 0 \quad , \quad g(b) = 0$$

پس طبق قضیهٔ رل نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < b$، که $g'(c) = 0$، یعنی:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

که حکم قضیه است. □

به یک تعبیر هندسی این قضیه اشاره کردیم. اگر متغیر x را زمان و $y = f(x)$ را مکان یک ذره متحرک در زمان x فرض کنیم، $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ سرعت متوسط ذره در بازهٔ زمانی $[a,b]$ است. طبق این قضیه، زمانی c بین زمان شروع و زمان پایان حرکت وجود دارد که سرعت ذره در آن زمان برابر سرعت متوسط در طول مسیر است. در واقع مهمترین کاربردهای ۱۵—۶ به صورت نامساوی برای تخمین نمو یک تابع خواهد بود که بعداً به آن خواهیم پرداخت ولی فعلاً به چند کاربرد در تکمیل بررسی علامت مشتق می‌پردازیم.

(۱۵—۷) علامت مشتق در یک بازه

فرض کنید I یک بازه باشد و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته که در نقاط درونی بازه مشتق‌پذیر است.

(۱۵—۷—۱) اگر $f'(x) = 0$ برای هر نقطهٔ درونی x از I، آنگاه f در سراسر I ثابت است.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر دو نقطهٔ متمایز a و b از I داریم $f(a) = f(b)$. مثلاً فرض کنید $a < b$. طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای c بین a و b وجود دارد که $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

(۱۵—۷—۲) **نتیجه.** فرض کنید $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند که در نقاط درونی I مشتق‌پذیر بوده و مشتق برابر دارند. در این صورت $f - g$ یک ثابت است. □

(۱۵—۷—۳) اگر $f'(x) > 0$ برای هر نقطهٔ درونی x از I، آنگاه f در I صعودی است، یعنی برای هر a و b در I که $a < b$، داریم $f(a) < f(b)$.

برهان. طبق قضیهٔ میانگین $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) > 0$، پس $b-a$ و $f(b)-f(a)$ هم علامت هستند. □

(۱۵—۷—۴) اگر $f'(x) < 0$ برای هر نقطهٔ درونی x در I، آنگاه f در I نزولی است، یعنی برای هر a و b در I که $a < b$، داریم $f(a) > f(b)$. □

(۱۵—۸) تخمین نمو تابع. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و f در نقاط درونی $[a,b]$ مشتق‌پذیر است. اگر $M \geq 0$ وجود داشته باشد که $|f'(x)| \leq M$ برای هر x در $]a,b[$، آنگاه از (۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a| \tag{۱۲}$$

از آنجا که $f'(x)$ آهنگ تغییر کمیت $y = f(x)$ در نقطهٔ x محسوب می‌شود. نامساوی (۱۲) بیانگر این واقعیت است که نمو y در بازهٔ $[a,b]$ از حاصل‌ضرب طول بازه در حداکثر آهنگ نمو بیشتر نیست. گاهی نمو x، یعنی $b-a$ را به Δx و نمو y، یعنی $f(b)-f(a)$ را به Δy نمایش می‌دهند. پس با این نمادگذاری:

$$|\Delta y| \leq M|\Delta x| \tag{۱۳}$$

مثال ۱. نشان دهید برای هر α و β داریم

$$|\sin\alpha - \sin\beta| \leq |\alpha - \beta| \tag{۱۴}$$

از آنجا که برای $f(x) = \sin x$، داریم $f'(x) = \cos x$ و $|\cos x| \leq 1$، این حکم از (۱۲) نتیجه می‌شود.

مثال ۲. نشان دهید برای هر a و b مثبت داریم:

$$\left|\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b}\right| \leq |a-b| \tag{۱۵}$$

تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ را روی $]-1, +\infty[$ در نظر می‌گیریم. در این بازه تابع تعریف شده، مشتق‌پذیر است، و داریم:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

برای $x > 0$، مخرج از ۱ بزرگتر است، پس $|f'(x)| < 1$ و (۱۵) حاصل می‌شود.