مفهوم مشتق

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم مشتق است. متبلور شدن ایدهٔ مشتق و به‌کارگیری مؤثر آن پاسخگوی چند نیاز ریاضی و علمی ریشه‌دار است. پس از رواج فرمول‌بندی مسایل ریاضی به صورت جبری و به خصوص پیدایش زمینهٔ هندسهٔ تحلیلی، مفهوم مشتق در طی قرن هفدهم میلادی در آثار ریاضیدانان مختلف ظاهر شد و در کارهای ریاضی نیوتن و لایب‌نیتس به صورت‌بندی جامعتری رسید و ارتباط آن با مفهوم "انتگرال" که به اعتباری سابقهٔ تاریخی دیرینه‌تر داشت روشن گردید. تعریف مشتق که در آغاز از دقت ریاضی مرسوم برخوردار نبود، مدت‌ها مورد انتقاد و نارضایتی تعدادی از دانشمندان و فلاسفه قرار داشت و حتی گاهی موجب مناقشات جدی ریاضی می‌شد. این مشکلات به مدت دو قرن همچنان دامنگیر حساب دیفرانسیل و انتگرال بود تا با شکل گرفتن مفهوم حد، صورت امروزی خود را یافت. در زیر ما با استفاده از مفهوم حد، به معرفی مشتق می‌پردازیم. می‌توان نیازهایی را که به پیدایش مفهوم مشتق منجر شد حول دو محور "آهنگ تغییر لحظه‌ای" و "مسالهٔ مماس" مطرح کرد. از نظر تاریخی مسأله مماس بود که منجر به تعریف مشتق شد ولی پس از چندی کاربرد مشتق در تعیین آهنگ تغییر لحظه‌ای نیز معلوم شد و مشتق به عامل تعیین کننده‌ای در رشد علم مکانیک مبدل گردید. جای تعجب است که نیوتن که خود حدود پانزده سال پس از مطالعاتش در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مکانیک کلاسیک را نیز پایه گذاشت، در کتاب بزرگ مکانیک خود Principia Mathematica از مفهوم مشتق استفاده نکرده است و به‌کارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال در مکانیک، برخلاف تصوری که طبیعی نیز به نظر می‌رسد، سال‌ها بعد در میان ریاضیدانان سوییس، فرانسه و آلمان رایج شد.

(۱۴—۱) **آهنگ تغییر لحظه‌ای.** شاید ساده‌ترین مثال از این نوع مسأله، صورت‌بندی دقیق مفهوم سرعت یک متحرک است. در ساده‌ترین حالت یک متحرک نقطه‌ای را در نظر بگیرید که روی یک خط راست جهت‌دار و مدرج حرکت می‌کند. مکان متحرک در زمان t به صورت تابعی از زمان، t، $s = f(t)$، داده شده است (شکل ۱).

می‌خواهیم مفهوم "سرعت" (= آهنگ تغییر مکان) را برای این حرکت بررسی کنیم. برای خط راست داده شده جهت قایل شده‌ایم، بدین ترتیب مثلاً حرکت به طرف راست، تغییر مکان در جهت مثبت و حرکت به سمت چپ، تغییر مکان در جهت منفی تلقی می‌شود. سرعت متوسط یا میانگین سرعت متحرک از زمان $t_۱$ تا زمان $t_۲$، به صورت نسبت $\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ تعریف می‌شود که در واقع متوسط مسافت طی شده (با منظور کردن جهت) در واحد زمان است. اگر حرکت به صورت یکنواخت در یکی از دو جهت صورت گیرد، نسبت $\frac{f(t_۱)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ همواره مقدار ثابتی است، یعنی نه به زمان شروع اندازه‌گیری، نه به زمان پایان اندازه‌گیری، و نه به طول مدت اندازه‌گیری، بستگی نخواهد داشت. در این وضعیت است که مسافت پیموده شده حاصل‌ضرب این سرعت ثابت (یکنواخت) در طول بازهٔ زمانی حرکت است. موضوع وقتی پیچیده می‌شود که حرکت یکنواخت نباشد، یعنی سرعت متغیر باشد. در این صورت سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[t_۱, t_۲]$ ممکن است اطلاع قابل استفاده‌ای در مورد شیوهٔ حرکت در یک بازهٔ خاص زمانی کوچکتر ندهد به خصوص اگر $[t_۱, t_۲]$ به نسبت بزرگ باشد. برای کسب اطلاع دقیق‌تر در مورد سرعت حرکت در حوالی زمان t بهتر است دو بازهٔ زمانی $t_۱$ و $t_۲$ نزدیک به t در نظر بگیریم که $t_۱ < t < t_۲$ و به سرعت متوسط $\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ نگاه کنیم. هر چه $t_۱$ و $t_۲$ به t نزدیکتر باشند، سرعت متوسط به‌دست آمده انعکاس دقیق‌تری از کیفیت حرکت حوالی زمان t است. آیا می‌توان به "سرعت در لحظه t" معنی دقیقی نسبت داد؟ اگر طول بازهٔ زمانی را صفر بگیریم، یعنی $t_۱ = t = t_۲$، آنگاه $f(t_۱) = f(t_۲)$ و صورت و مخرج کسر $\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$ هر دو صفر می‌شوند و این عبارت معنی ندارد. راه گریز این است که سرعت در لحظهٔ t را در واقع یک حد تلقی کنیم، یعنی حد سرعت متوسط وقتی طول بازهٔ زمانی به صفر میل می‌کند. به بیان دیگر، حد زیر، در صورت وجود، به

سرعت متحرک در زمان t تعبیر می‌شود:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \tag{۱}$$

ممکن است این کسر متقارن به نظر نرسد، یعنی تصور شود که فقط تغییر مسافت در یک طرف بازهٔ زمانی نسبت به t دخیل می‌شود. در واقع چون نزدیک شدن h به ۰ هم از طرف راست و هم از طرف چپ منظور می‌شود، تقارن خود به خود اعمال می‌شود. تمرین زیر این ادعا را به طور قاطع‌تر ثابت می‌کند.

تمرین. اگر حد (۱) وجود داشته باشد، ثابت کنید حد زیر نیز موجود است و برابر حد (۱) می‌باشد:

$$\lim_{R\to ۰} \frac{f(t+h)-f(t-h)}{۲h} \tag{۲}$$

اگر به جای تغییر مکان و مسافت، کمیت متغیر دیگری نسبت به زمان را به $f(t)$ نمایش دهیم، مجدداً می‌توان آهنگ تغییر لحظه‌ای f در زمان t را به صورت (۱) تعریف کرد. از این کلی‌تر، اگر دو کمیت x و y با رابطهٔ تابعی $y = f(x)$ به هم مربوط باشند، آهنگ تغییر y نسبت به x به صورت حد زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{۳}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

(۱۴—۲) مسأله مماس. همهٔ ما ایده‌ای شهودی و کاملاً روشن از تمایز میان مماس بودن و متقاطع بودن دو منحنی داریم ولی بیان دقیق ریاضی این تمایز آسان به نظر نمی‌رسد. در عهد باستان ریاضیدانان خط مماس بر منحنی را برای هر یک از تعداد محدود منحنی‌هایی که در آن دوران مورد بررسی عمیق قرار گرفته بود به کمک ویژگی‌های خاصی تعریف می‌کردند. مثلاً خط L بر دایرهٔ C در نقطهٔ T مماس محسوب می‌شد اگر شعاع OT بر خط L عمود باشد. همین طور خط L بر بیضی E در نقطهٔ T مماس محسوب می‌شد اگر زاویه‌های بین L و خطوط واصل از T به دو کانون بیضی برابر

باشند (اگر بیضی را مقطع یک سطح صیقل تصور کنیم و قانون فیزیکی زاویهٔ تابش $=$ زاویهٔ بازتاب، را اعمال کنیم اشعهٔ نور ساطع از یک کانون پس از برخورد با بیضی از کانون دیگر خواهد گذشت)، و به همین ترتیب خط مماس بر سهمی و هذلولی نیز تعریف می‌شد. این تعریف‌ها همه برخاسته از دانش و شناخت دقیق منحنی‌های خاص بودند و یک تعریف کلی برای مماس بودن یک خط راست بر یک منحنی نامشخص، یا مماس بودن دو منحنی، وجود نداشت. پس از آنکه هندسهٔ تحلیلی امکان ارائه کردن بی‌شمار منحنی متنوع را ممکن ساخت، ضرورت یک تعریف کلی و قابل استفاده از "مماس بودن" در مسایل هندسی نمایان‌تر گردید. راه‌حل زیر برای تعریف خط مماس بر یک منحنی $\mathcal{C}$ در نقطهٔ T از منحنی در قرن هفدهم کاملاً متداول شده بود.

روی منحنی در نزدیکی نقطهٔ T، نقطهٔ متحرکی P را در نظر می‌گیریم که تدریجاً به P نزدیک‌تر می‌شود. در هر وضعیت نقطهٔ P، وقتی هنوز به T نرسیده است، خط راست گذرا از P و T را در نظر می‌گیریم. در شکل ۲، این خط برای وضعیت‌های گوناگون $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ... از نقطهٔ P نمایش داده شده است. وقتی P به T نزدیک می‌شود اگر این خط راست به وضعیت مشخصی، مانند t در شکل ۲، نزدیک شود، این "وضعیت حدی" را خط مماس بر $\mathcal{C}$ در نقطهٔ T می‌نامیم. برای نوشتن معادلهٔ این خط کافی است شیب آن معلوم شود زیرا که یک نقطهٔ خط، یعنی T، داده شده است. فرض کنید قطعه‌ای از منحنی $\mathcal{C}$ که در نزدیکی P قرار دارد به صورت نمودار تابعی $y = f(x)$ قابل نمایش دادن است و مختصات T به صورت $(x_\circ, y_\circ) = (x_\circ, f(x_\circ))$ می‌باشد. حال اگر مختصات نقطهٔ متحرک P را به $(x, y) = (x, f(x))$ نمایش دهیم، شیب خط گذرا از P و T برابر است با

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \qquad (۴)$$

وقتی P به T میل کند، حد عبارت فوق، در صورت وجود، به

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \qquad (۵)$$

نمایش داده می‌شود. توجه کنید که اگر بنویسیم $x = x_\circ + h$، حد بالا را می‌توان به

$$\lim_{h \to \circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \qquad (٦)$$

نمایش داد که از نوع آهنگ تغییر، یعنی (۳)، است. با توجه به شباهت عبارت‌های (۱)، (۳) و (٦)، ارائه و بررسی تعریف زیر کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد:

(۱۴—۳) تعریف. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع است و a یک نقطهٔ درونی S، یعنی $\delta > 0$ وجود دارد که بازهٔ $]a-\delta, a+\delta[$ در S قرار دارد. در این صورت f را مشتق‌پذیر در a می‌نامیم در صورتی که حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{۷}$$

در صورت وجود، حد بالا را به $f'(a)$ نمایش داده، آن را مشتق f در نقطهٔ a می‌نامیم. تابع f را مشتق‌پذیر می‌نامیم در صورتی که f در همهٔ نقاط دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد.

(۱۴—۴) یادداشت. در بالا فرض کردیم a یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف f است. در واقع اگر a یک عضو دامنه و نیز یک نقطهٔ حدی دامنه باشد، بررسی حد (۷) معنی دارد. علت محدود کردن تعریف به نقاط درونی دامنه فقط این است که بیشتر کاربردهای مورد نظر ما به این حالت محدود می‌شوند و لزومی ندارد حالت‌های کلی‌تری که بعضاً پیچیدگی‌های نامطلوبی دارند در اینجا مطرح کنیم. دو مورد استثنایی بعضاً مورد استفاده قرار خواهند گرفت. اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد که $[a, a+\delta[$ در دامنهٔ تابع قرار گیرد، می‌توانیم h را به مقادیر مثبت محدود کنیم که در این صورت "حد یک‌طرفه" $\lim_{h \to 0^+}$ بدین معنی است که فقط مقادیر $h > 0$ در نظر گرفته شده است. حد

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{۸}$$

را مشتق f از راست در نقطهٔ a می‌نامیم و به $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب $f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نیز که مشتق f از چپ در نقطهٔ a خوانده می‌شود، مطرح شدنی است.

به تعریف اصلی باز می‌گردیم و مسأله مماس را پیگیری می‌کنیم. فرض کنید تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است. بدین ترتیب نمودار f حول a یک منحنی است که در نقطهٔ $(a, f(a))$ دارای خط

مماس به شیب $f'(a)$ می‌باشد. چون $f'(a)$ یک عدد حقیقی است، در این حالت مماس بر منحنی نمی‌تواند حالت قائم داشته باشد. معادلهٔ خط مماس عبارت است از

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \tag{۹}$$

(۱۴—۵) چند مثال.

(۱۴—۵—۱) نشان می‌دهیم تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = Ax + B$، A و B ثابت، مشتق‌پذیر است و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم. در نقطهٔ $x_\circ$ از دامنه داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_\circ} \tfrac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \lim_{x\to x_\circ} \tfrac{(Ax+B)-(Ax_\circ+B)}{x-x_\circ} \\ &= \lim_{x\to x_\circ} \tfrac{A(x-x_\circ)}{x-x_\circ} \end{aligned}$$

چون حد عبارت فوق وقتی $x \to x_\circ$ مطرح است، مقدار $x = x_\circ$ در نظر گرفته نمی‌شود، پس می‌توان $x - x_\circ$ را از صورت و مخرج حذف کرد و داریم $f'(x_\circ) = A$. البته نمودار f خط راستی با شیب A است و بدین ترتیب خط مماس بر این خط در هر نقطه، خود آن خط می‌شود. بالاخص توجه کنید که مشتق تابع ثابت $f(x) = B$ همه‌جا صفر است.

(۱۴—۵—۲) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = cx^n$ در نظر می‌گیریم که در آن، c یک عدد حقیقی داده شده است و n یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_\circ} \tfrac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \lim_{x\to x_\circ} \tfrac{cx^n-cx_\circ^n}{x-x_\circ} \\ &= \lim_{x\to x_\circ}[c\tfrac{x^n-x_\circ^n}{x-x_\circ}] \end{aligned}$$

مجدداً برای محاسبهٔ حد، $x - x_\circ = \circ$ مطرح نیست، پس

$$\frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ} = x^{n-۱} + x^{n-۲}x_\circ + \cdots + xx_\circ^{n-۲} + x_\circ^{n-۱}$$

حال چندجمله‌ای طرف راست تابعی پیوسته نسبت به x تعریف می‌کند، پس حد آن وقتی $x \longrightarrow x_۰$ برابر می‌شود با $nx_۰^{n-۱}$، و داریم:

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} = cnx_۰^{n-۱}$$

(۱۴–۵–۳) می‌خواهیم معادلهٔ خط مماس بر بیضی $\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ را در نقطهٔ $(۲,-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$ بنویسیم. تحقیق کنید که این نقطه روی بیضی قرار دارد. باید جزیی از بیضی شامل نقطهٔ $(۲,-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$ را به صورت نمودار تابعی $y=f(x)$ بنویسیم و به‌ازای $x=۲$ مشتق تابع را محاسبه کنیم تا شیب خط مماس به‌دست آید. از معادلهٔ بیضی داده شده داریم:

$$y=\pm\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶-x^۲}$$

که از آن دو تابع استخراج می‌شود، یکی شاخهٔ بالایی بیضی و دیگری شاخهٔ پایینی آن. نقطهٔ $(۲,-۳\frac{\sqrt{۳}}{۳})$ روی شاخهٔ پایینی قرار دارد، بنابراین از تابع $f(x)=-\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶-x^۲}$ استفاده می‌کنیم. برای $x_۰=۲$ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} &= \lim_{x\to ۲}\frac{-\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶-x^۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}{x-۲}\\ &= \lim_{x\to ۲}(-\tfrac{۳}{۴})\frac{\sqrt{۱۶-x^۲}-۲\sqrt{۳}}{x-۲}\end{aligned}$$

وقتی $x\longrightarrow ۲$ صورت و مخرج کسر هر دو به صفر میل می‌کنند، بنابراین سعی می‌کنیم کسر را از عوامل احتمالی مشترک ساده کنیم. در عبارت‌های این گونه معمولاً ضرب کردن صورت و مخرج در "مزدوج" عبارت رادیکالی، در اینجا $\sqrt{۱۶-x^۲}+۲\sqrt{۳}$، مؤثر واقع می‌شود. داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} &= \lim_{x\to ۲}(-\tfrac{۳}{۴})\frac{(۱۶-x^۲)-۱۲}{(x-۲)(\sqrt{۱۶-x^۲}+۲\sqrt{۳})}\\ &= \lim_{x\to ۲}(+\tfrac{۳}{۴})\frac{x+۲}{(\sqrt{۱۶-x^۲}+۲\sqrt{۳})}\end{aligned}$$

حال توجه کنید که صورت و مخرج هر دو تابع‌های پیوسته نسبت به x هستند و برای محاسبهٔ حد به‌ازای $x\longrightarrow ۲$ می‌توان مقدار $x=۲$ را جایگزین کرد، پس:

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

نتیجه اینکه معادلهٔ خط مماس عبارت است از $y + ۳\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(x - ۲)$.

(۱۴-۵-۴) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = |x|$ در نظر می‌گیریم و مشتق‌پذیری آن را در نقاط گوناگون $x_۰$ بررسی می‌کنیم. اگر $x_۰ > ۰$، قطعهٔ کوچکی از نمودار $f(x) = |x|$ بر نمودار $g(x) = x$ منطبق است و از آنجا که مشتق فقط به مقادیر تابع برای x های نزدیک $x_۰$ (برای مشتق‌گیری) بستگی دارد، مشتق f در نقطهٔ $x_۰$ برابر مشتق g در نقطهٔ $x_۰$، یعنی ۱ است. این با انتظار طبیعی که خط مماس بر نمودار به‌ازای $x_۰ > ۰$ باید خط $y = x$ باشد سازگار است.

همین طور برای $x_۰ < ۰$، مشتق تابع برابر ۱- به‌دست می‌آید و خط $y = -x$ بر نمودار در نقطهٔ $(x_۰, |x_۰|)$ مماس است. حال نقطهٔ $x_۰ = ۰$ را بررسی می‌کنیم. حد زیر، در صورت وجود، مورد نظر است:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{|x| - ۰}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{|x|}{x}$$

اگر دنباله‌ای از اعداد مثبت مثلاً $x_n = \frac{۱}{n}$ در نظر بگیریم که $x_n \longrightarrow ۰$، اگر حد وجود داشته باشد، باید $\frac{|x_n|}{x_n}$ به آن حد میل کند. برای $x_n = \frac{۱}{n} > ۰$، داریم $|x_n| = x_n$، پس $\frac{|x_n|}{x_n} = ۱$، بنابراین حد، در صورت وجود باید برابر ۱ باشد. ولی اگر دنباله‌ای از اعداد منفی، مثلاً $x_n = -\frac{۱}{n}$ را در نظر بگیریم که $x_n \longrightarrow ۰$، داریم $\frac{|x_n|}{x_n} = -۱$ و دنبالهٔ ثابت (۱-) به ۱+ میل نمی‌کند. بنابراین تابع در $x_۰ = ۰$ مشتق‌پذیر نیست. توجه کنید که در این مثال مشتق راست و مشتق چپ در $x_۰ = ۰$ وجود دارند، $f'_+(۰) = ۱$ و $f'_-(۰) = -۱$.

در پیگیری مسأله مماس، سؤال طبیعی دیگری که مطرح است این است که اگر دو منحنی از یک نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ گذر کنند، در چه صورتی این دو منحنی را در آن نقطه "مماس" برهم تعریف می‌کنیم؟ در حالتی که هر دو منحنی در نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ دارای خط مماس باشند، دو منحنی مماس بر هم تلقی می‌شوند در صورتی که خط مماس آنها یکی باشد. ولی می‌توان وضعیتی مانند شکل ۴ تجسم کرد که دو منحنی فاقد خط مماس در نقطهٔ مشترک $(x_۰, y_۰)$ هستند ولی در عین حال به‌نظر می‌آید که باید آنها را مماس بر یکدیگر تلقی کرد. در اینجا کوشش می‌کنیم تعریف جامعتری از مماس بودن ارائه کنیم که در حالت خاص تعریف خط مماس را شامل شود.

وضعیت‌های شکل‌های ۵ (الف) و ۵ (ب) را مقایسه کنید. در هر دو شکل نمودارهای دو تابع f و g از نقطهٔ مشترک $(x_{\circ}, y_{\circ})$ می‌گذرند. در هر دو شکل، چون f و g پیوسته فرض شده‌اند، فاصلهٔ قائم بین دو نمودار وقتی x به $x_{\circ}$ نزدیک می‌شود به صفر میل می‌کند. برداشت بعدی ما از دو شکل این است که در (الف) نمودارها متقاطع‌اند و در (ب) مماس می‌باشند.

چگونه می‌توان با یک تعریف دقیق ریاضی این دو وضعیت را از هم تمیز داد؟ در ۵ (الف) اگر قطعهٔ کوچکی از دو نمودار حول $(x_{\circ}, y_{\circ})$ تقریباً خط راست فرض کنیم می‌بینیم که طول پاره‌خط‌های محصور میان دو نمودار به نسبت تقریباً ثابتی کوچک شده و به صفر میل می‌کند. در شکل ۵ (ب)، اگر قطعات کوچکی از نمودار حول $(x_{\circ}, y_{\circ})$ خط راست فرض شوند، این دو خط راست را باید بر هم منطبق فرض کرد و در نتیجه فاصلهٔ عمودی بین دو نمودار در نزدیکی $(x_{\circ}, y_{\circ})$ در مقایسه با ۵ (الف) عملاً صفر است. این برداشت شهودی را می‌توان به صورت دقیقی تعریف کرد:

(۱۴—۶) **تعریف.** فرض کنید $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند و $x_{\circ}$ یک نقطهٔ درونی S است. در این صورت می‌گوییم f بر g در $x_{\circ}$ مماس است در صورتی که دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) $f(x_{\circ}) = g(x_{\circ})$.

ب) $\lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_{\circ}} = \circ$.

شرط (الف) فقط بیانگر این است که نمودار دو تابع باید از یک نقطه بگذرد و در مورد نمودارهای متقاطع نیز برقرار است، ولی توضیح خواهیم داد که شرط (ب) در واقع تمیزدهندهٔ وضعیت مماس بودن است. توجه کنید که قدرمطلق $f(x) - g(x)$ فاصلهٔ قائم دو نمودار به‌ازای مقدار x از متغیر است. شرط (ب) بیانگر این امر است که این فاصلهٔ قائم طوری شدید به صفر میل می‌کند که اگر بر کمیت $x - x_{\circ}$، که خود نیز به $\circ$ میل می‌کند، تقسیم شود، هنوز نسبت به صفر میل می‌کند. کسر $\frac{f(x)-g(x)}{x-x_{\circ}}$ نسبت فاصلهٔ دو نمودار به نزدیکی نقطهٔ x از $x_{\circ}$ است. میل کردن این نسبت به صفر نشانگر این است که فاصلهٔ قائم دو نمودار شدیدتر از $x - x_{\circ}$ کوچک می‌شود.

مثال. وضعیت شکل ۴ را بررسی می‌کنیم. داریم $f(0) = g(0)$، پس (الف) برقرار است. برای (ب):

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - 0} = \frac{x^{2}|x|}{x^{2} + 1} \leq |x|$$

بنابراین وقتی $x \longrightarrow 0$، نسبت $\frac{f(x)-g(x)}{x-0}$ به صفر میل می‌کند. بنابراین f و g در 0 بر هم مماس‌اند و این در حالی است که هیچ‌یک از دو تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

(۱۴—۷) مثال اساسی: خط مماس و تقریب خطی

فرض کنید x_{0} یک نقطهٔ درونی دامنهٔ تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. می‌خواهیم خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(x_{0}, f(x_{0}))$ را از دیدگاه جدیدی بررسی کنیم. کلیه خطوط راست غیرقائم گذرا از نقطهٔ $(x_{0}, f(x_{0}))$ را در نظر می‌گیریم (خط قائم را مستثنی کرده‌ایم زیرا که این خط نمودار تابعی از x نیست). معادلهٔ کلی این خطوط هست:

$$y = f(x_{0}) + m(x - x_{0})$$

که m ضریب زاویهٔ خط است. طرف راست کلی‌ترین عبارت تعریف‌کنندهٔ یک تابع درجهٔ یک نسبت به x است که نمودار آن از $(x_{0}, f(x_{0}))$ می‌گذرد. می‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم که آیا از میان این توابع درجه یک، تابعی هست که به مفهومی "نزدیکترین" به نمودار f در حوالی نقطهٔ $(x_{0}, f(x_{0}))$ باشد؟ اگر "نزدیکترین" را به مفهوم مماس بودن طبق تعریف ۱۴—۶ تعبیر کنیم، نشان می‌دهیم که حداکثر یک تابع درجه یک از این امتیاز برخوردار است. می‌نویسیم $g(x) = f(x_{0}) + m(x - x_{0})$. شرط (الف) برقرار است و برای (ب):

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_{0}} &= \frac{f(x)-[f(x_{0})+m(x-x_{0})]}{x-x_{0}} \\ &= \frac{f(x)-f(x_{0})}{x-x_{0}} - m \qquad (\text{به فرض } x \neq x_{0}) \end{aligned}$$

برای بررسی حد این عبارت وقتی $x \longrightarrow x_{0}$، $x = x_{0}$ مطرح نیست، پس فرض $x \neq x_{0}$ و ساده کردن $x - x_{0}$ مجاز است. پس برای m ثابت، $\lim_{x\to x_{0}} \frac{f(x)-f(x_{0})}{x-x_{0}} = 0$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to x_{0}} \frac{f(x)-f(x_{0})}{x-x_{0}}$ وجود داشته و برابر m باشد. بنابراین در صورت وجود مشتق، $f'(x_{0})$، خط راست با شیب $f'(x_{0})$ یگانه

خط گذرا از $(x_\circ, f(x_\circ))$ است که به تعبیر ۱۴—٦ بر نمودار f مماس است. با توضیحاتی که قبل از تعریف ۱۴—٦ دادیم، فاصلهٔ قائم بین این خط و نمودار تابع سریعتر از فاصلهٔ قائم هر خط راست دیگر به صفر میل می‌کند. بنابراین اطلاق "خط مماس" به $y = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)$، در صورت مشتق‌پذیری f در $x_\circ$، توجیه تازه‌ای می‌یابد. توجه کنید که به این تعبیر، شرطی لازم و کافی برای مشتق‌پذیری f در نقطهٔ $x_\circ$ وجود خط مماس غیرقائم برای نمودار در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ است. معادلاً مشتق‌پذیری f در $x_\circ$ بدین معنی است که یک تابع درجه یک مماس بر f در نقطهٔ $x_\circ$ وجود داشته باشد. این تابع درجه یک، یعنی

$$g(x) = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ) \tag{۱۰}$$

را تقریب خطی f در $x_\circ$ نیز می‌نامیم. با توجه به توضیحات ارائه شده، در میان همهٔ تابع‌های درجهٔ ۱، تقریب خطی نزدیک‌ترین مقدار به f را در نزدیکی $x_\circ$ دارد. از این ویژگی در جلسات آینده استفاده‌هایی عملی ذکر خواهیم کرد.

این بحث را با گزارهٔ ساده زیر به اتمام می‌رسانیم:

(۱۴—۸) گزاره. اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، f در $x_\circ$ پیوسته است.

برهان. از آنجا که $\frac{f(x)-[f(x_\circ)+f'(x_\circ)(x-x_\circ)]}{x-x_\circ}$ و $(x - x_\circ)$ هر دو به صفر میل می‌کنند، حاصل‌ضرب آنها نیز به صفر میل می‌کند وقتی x به $x_\circ$ میل کند، ولی

$$\lim_{x\to x_\circ}\{f(x) - [f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)]\} = \lim_{x\to x_\circ}(f(x) - f(x_\circ))$$

که صفر بودن این حد بدین معنی است که $\lim_{x\to x_\circ} f(x)$ وجود داشته و برابر $f(x_\circ)$ باشد. □