مفهوم حد

در بخش‌های ٦ تا ٨ مفهوم حد دنباله و سری را بررسی کردیم. در واقع دنباله، تابعی بود که روی یک مجموعهٔ گسسته از نقاط (اعداد صحیح از یک مقدار k به بعد) تعریف شده و مقداری حقیقی یا مختلط می‌گرفت. حد دنباله وقتی وجود داشت که با سیر کردن دامنهٔ تابع، یعنی با گذر به اعداد صحیح بزرگتر و بزرگتر، مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شد. مفهوم حد که در این بخش معرفی خواهیم کرد کاملاً مشابه است با این تفاوت که به جای دنباله، تابع‌هایی را در نظر خواهیم گرفت که دامنهٔ آنها یا یک مجموعه از نوع بازه است یا دست‌کم نقاط دامنه دارای مکان تجمع هستند، برخلاف مجموعه‌های عدد صحیح که عناصرش از فاصله معینی (واحد) به هم نزدیکتر نمی‌شوند. ایدهٔ حد زادهٔ کوشش‌هایی است که طی دو قرن برای دقیق ساختن مفهوم "مشتق"، که خود بیان کنندهٔ آهنگ لحظه‌ای تغییر یک کمیت متغیر است، صرف شد. امروزه مفهوم حد کاربردهایی خارج از محدودهٔ مشتق نیز دارد، بالاخص همچنان که خواهیم دید با مفهوم پیوستگی در رابطهٔ نزدیک است.

فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ باشد. نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ را یک نقطه حدی S می‌نامیم اگر برای هر $\delta > 0$، در "بازهٔ محذوف شعاع δ حول a"، یعنی

$$]a-\delta, a+\delta[-\{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

نقطه‌ای از S موجود باشد. تذکر یکی دو نقطه در مورد این تعریف بجاست:

(الف) اینکه بازه را "محذوف" گرفته‌ایم، یعنی $x = a$ مطرح نیست، بدین معنی است که تعریف مستقل از این است که خود a نقطه‌ای از S باشد یا نباشد، هر دو صورت ممکن است رخ دهد.

(ب) تعریف در واقع نتیجه می‌دهد که در هر بازهٔ محذوف حول a، بی‌نهایت عضو متمایز از S باید

موجود باشد زیرا اگر مثلاً $s_1 \in S$ در بازهٔ محذوف شعاع δ_1 حول a باشد، و δ_2 را طوری بگیریم که $|s_1 - a| > \delta_2 > 0$، آنگاه باید عضو دیگری s_2 از S در بازهٔ محذوف شعاع δ_2 حول قرار داشته باشد. به همین ترتیب اگر δ_3 را کوچکتر از $|s_2 - a|$ و مثبت در نظر بگیریم، نقطهٔ دیگری s_3 از S باید در این بازهٔ محذوف باشد و همین طور با ادامهٔ این روش یک دنبالهٔ (s_n) از نقاط متمایز S به‌دست می‌آید که همه در بازهٔ محذوف شعاع δ_1 حول a قرار دارند.

در واقع با تغییر کوچکی در استدلال بالا می‌توان نشان داد اگر a یک نقطهٔ حدی برای مجموعهٔ S باشد، آنگاه دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S وجود دارد که $s_n \longrightarrow a$. اگر در استدلال بالا بگیریم $\delta_1 = 1$، نقطهٔ s_1 به فاصلهٔ کوچکتر از ۱ از a است، اگر بگیریم $0 < \delta_2 < \min\{\frac{1}{2}, |s_1 - a|\}$، آنگاه نقطهٔ s_2 در فاصلهٔ کوچکتر از $\frac{1}{2}$ از a است و $s_1 \neq s_2$. به همین ترتیب با گرفتن $0 < \delta_3 < \min\{\frac{1}{3}, |s_2 - a|\}$، نتیجه می‌شود که s_3 در فاصله کوچکتر از $\frac{1}{3}$ از a قرار دارد و متمایز از s_1 و s_2 است. به طور کلی اگر به استقراء، δ_n را به صورت $0 < \delta_n < \min\{\frac{1}{n}, |s_{n-1} - a|\}$ بگیریم و عضو s_n از S را در بازهٔ محذوف شعاع δ_n حول a اختیار کنیم، نتیجه می‌شود که $|s_n - a| < \frac{1}{n}$ و عناصر $s_1, s_2, \ldots, s_n$ همه متمایزند. دنبالهٔ عناصر متمایز S که به این ترتیب ساخته می‌شود به a همگراست زیرا برای هر $\delta > 0$، اگر N را طوری بگیریم که $\frac{1}{N} < \delta$، آنگاه برای $n > N$ داریم $|s_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$.

بالعکس نیز، اگر دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S به a میل کند، a یک نقطهٔ حدی S است. برای $\delta > 0$، چون $s_n \longrightarrow a$، N وجود دارد که برای $n > N$ داریم $|s_n - a| < \delta$. به علاوه چون همه نقاط s_n متمایزند، حداقل یکی از آنها باید غیر از خود a باشد، یعنی s_n وجود دارد که $0 < |s_n - a| < \delta$. بدین ترتیب به تعریف معادلی برای نقطه حدی دست یافته‌ایم:

(۱۳−۱) لم. اگر S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد و $a \in \mathbb{R}$، a یک نقطهٔ حدی برای S است اگر و تنها اگر دنباله‌ای (s_n) از نقاط متمایز S وجود داشته باشد که $s_n \longrightarrow a$. □

(۱۳—۲) چند مثال

(۱۳—۲—۱) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح، است. در این صورت هیچ نقطهٔ $\mathbb{R}$ یک نقطهٔ حدی برای $\mathbb{Z}$ نیست زیرا که اگر بازهٔ محذوفی به شعاع کوچکتر از $\frac{1}{2}$ حول این نقطه بگیریم، حداکثر یک نقطهٔ S می‌تواند در این بازه قرار گیرد.

(۱۳—۲—۲) فرض کنید S بازهٔ $]a,b[$ است. در این صورت همهٔ نقاط $[a,b]$، نقاط حدی $]a,b[$ هستند زیرا که در هر بازهٔ محذوف به شعاع مثبت حول $c \in [a,b]$ نقطه‌ای از $]a,b[$ یافت می‌شود. به علاوه اگر $c \notin [a,b]$، c نقطهٔ حدی $]a,b[$ نیست زیرا اگر $c < a$، آنگاه برای $0 < \delta < a - c$، و اگر $c > b$، برای $0 < \delta < c - b$، در بازهٔ شعاع δ حول c هیچ نقطه از $]a,b[$ یافت نمی‌شود. به همین ترتیب مجموعهٔ نقاط حدی $[a,b]$، $[a,b[$، $]a,b]$ و $]a,b[$ همهٔ برابر $[a,b]$ هستند.

(۱۳—۲—۳) S را برابر مجموعهٔ $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ می‌گیریم. تنها نقطهٔ حدی S نقطهٔ 0 است. هر گوی محذوف شعاع δ حول 0 شامل بی‌نهایت نقطهٔ S است (همهٔ a_n ها که $\frac{1}{n} < \delta$). برای نقطهٔ $\frac{1}{n}$، بازهٔ محذوف شعاع $(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ حول این نقطه شامل هیچ نقطهٔ S نیست. برای $1 < a$، بازه شعاع $\delta = a - 1$، برای $0 > a$، بازهٔ شعاع $-a$، و برای $\frac{1}{n} > a > \frac{1}{n+1}$، بازهٔ شعاع $\delta = \min\{\frac{1}{n} - a, a - \frac{1}{n+1}\}$ فاقد نقاط S هستند. اکنون آماده‌ایم تعریف حد را ارائه کنیم.

(۱۳—۳) **تعریف.** فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است، a یک نقطهٔ حدی S، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به a میل می‌کند برابر L است، و می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ در صورتی که برای هر $e > 0$، وجود داشته باشد $\delta > 0$ که هرگاه $x \in S$ و $0 < |x - a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - L| < e$.

نکات شباهت و تمایز تعریف حد و تعریف پیوستگی از تعریف مشهودند. در مورد پیوستگی، نقطهٔ a باید در دامنهٔ تعریف f باشد ولی در مورد حد کافی است a یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ S باشد و اساساً به دلیل شرط $0 < |x - a|$، مقدار f در نقطهٔ a اصلاً مطرح نیست. از طرفی دیگر پیوستگی در همهٔ

نقاط دامنهٔ f قابل طرح کردن است، در حالی که برای مطرح ساختن $\lim_{x\to a} f(x)$ لازم است که a یک نقطهٔ حدی دامنه باشد. مثلاً برای تابعی که دامنهٔ آن $\mathbb{Z}$ باشد، حد در هیچ نقطه‌ای تعریف نشده است در صورتی که دیدیم هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{Z}$ در همهٔ نقاط دامنه پیوسته است. قرابت حد و پیوستگی را می‌توان در گزاره زیر که نتیجهٔ فوری تعریف است خلاصه کرد:

(۱۳–۴) گزاره. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است و a یک نقطهٔ S که نقطهٔ حدی S نیز می‌باشد. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته و برابر $f(a)$ باشد. $\square$

در واقع اگر a یک نقطه حدی S باشد و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع، حد f وقتی x به a میل می‌کند مقداری است که اگر $f(a)$ را برابر آن تعریف کنیم، تابع f در a پیوسته می‌شود.

گزارهٔ زیر نیز عیناً مانند گزارهٔ مشابه در مورد پیوستگی ثابت می‌شود و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

(۱۳–۵) گزاره. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، a یک نقطهٔ حدی S، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر برای هر دنباله (a_n) از عناصر S که $a_n \longrightarrow a$، داشته باشیم $f(a_n) \longrightarrow L$. $\square$

به کمک این گزاره، همچنان که در مورد مجموع، حاصل‌ضرب و خارج قسمت تابع‌های پیوسته عمل کردیم، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود:

(۱۳–۶) گزاره. فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، a یک نقطهٔ حدی S، و $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع که $\lim_{x\to a} f(x) = L_۱$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_۲$. در این صورت:

الف) حد $f + g$ وقتی x به a میل می‌کند وجود دارد و برابر $L_۱ + L_۲$ است.

ب) حد $f \cdot g$ وقتی x به a میل می‌کند وجود دارد و برابر $L_۱ L_۲$ است.

ج) اگر مضافاً $L_۲ \neq ۰$ و a یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $\{x \in S \mid g(x) \neq ۰\}$ باشد، آنگاه حد $\frac{f}{g}$ وقتی

x به a میل می‌کند وجود دارد و برابر $\frac{L_1}{L_2}$ است. □

در (ج) توجه کنید که مجموعه $\{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$ در واقع دامنهٔ تعریف $\frac{f}{g}$ است و برای اینکه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ مطرح شود، لازم است که a یک نقطهٔ حدی این مجموعه باشد. اثبات گزارهٔ بالا که عیناً مانند گزارهٔ مشابه در مورد تابع‌های پیوسته است به خواننده واگذار می‌شود.

(۱۳—۷) چند مثال حد

(۱۳—۷—۱) فرض کنید در مورد وجود، و در صورت وجود، مقدار $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ سؤال شده است که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. چون $f(x) = x - 1$ یک تابع پیوسته است، حد آن وقتی $x \to 1$ برابر مقدار $f(1)$، یعنی 0، است. پس نمی‌توان از قضیهٔ خارج‌قسمت در این مورد استفاده کرد. ولی از آنجا که وجود حد و مقدار آن هیچ‌گونه ارتباطی با مقدار یک تابع در نقطهٔ مورد نظر ندارد، می‌توان با شرط $x \neq 1$، یعنی در دامنهٔ $S = \mathbb{R} - \{1\}$، تابع $\frac{x^n-1}{x-1}$ را در نظر گرفت. چون $x = 1$ یک نقطهٔ حدی S است، می‌توان به هر حال $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ را مطرح کرد. حال در نقاط دامنه که $x \neq 1$، داریم $\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1$. بنابراین $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^{n-1} + \cdots + 1)$ که چون چندجمله‌ای $x^{n-1} + \cdots + x + 1$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند، حد آن وقتی $x \to 1$ برابر مقدار تابع یعنی n است.

تعداد زیادی از حدهای مقدماتی را می‌توان به روش بالا محاسبه کرد. در واقع همچنان که در بررسی مفهوم مشتق خواهیم دید، تعریف حد و تمایز آن از مقدار تابع، از بررسی عبارت‌هایی که صورت و مخرج هر دو به صفر میل می‌کنند وقتی متغیر به نقطه‌ای حدی از دامنه میل می‌کند، سرچشمه گرفته است.

(۱۳—۷—۲) (دو حد اساسی مثلثاتی) در مورد وجود و مقدار حدهای زیر بحث می‌کنیم:

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \quad , \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} \quad (\theta \text{ برحسب رادیان})$$

توجه کنید که دامنه تعریف هر دو تابع بالا، یعنی $\frac{\sin\theta}{\theta}$ و $\frac{1-\cos\theta}{\theta}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی ناصفر،

$\mathbb{R}-\{0\}$ است، و نقطهٔ 0 نقطهٔ حدی دامنه است، پس مفهوم حد مطرح شدنی است.

برای $\theta \neq 0$، و $|\theta| < \frac{\pi}{2}$، با توجه به شکل ۱ داریم:

$$(\theta > 0) \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$$(\theta < 0) \quad \tan\theta < \theta < \sin\theta$$

بنابراین برای $\theta \neq 0$:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

در بخش ۱۰ دیدیم که $\cos\theta$ تابعی پیوسته از θ است، پس $\frac{1}{\cos\theta}$ به ۱ میل می‌کند وقتی $\theta \to 0$. تابع ثابت ۱ نیز دارای حد ۱ است وقتی $\theta \to 0$. به سادگی دیده می‌شود که چون $\frac{\theta}{\sin\theta}$ بین ۱ و $\frac{1}{\cos\theta}$ قرار دارد و هردوی این توابع به مقدار واحدی، در اینجا ۱، میل می‌کنند، $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$. بنابراین طبق گزاره ۱۳—۶، ج، داریم $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

از طرفی دیگر $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$، پس:

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = (\sin\frac{\theta}{2})\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

چون تابع سینوس در صفر پیوسته است $\lim_{\theta\to 0}\sin\frac{\theta}{2} = \lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\sin\frac{\theta}{2} = 0$ و نیز $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = 1$ پس طبق ۱۳—۶، ب، $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$.

(۱۳—۷—۳) آیا می‌توان نوشت $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\frac{1}{\theta}}{\sin\frac{1}{\theta}} = 1$؟ سؤال اساسی در اینجا این است که آیا $\theta = 0$ یک نقطهٔ حدی دامنه تعریف است یا نه؟ اگر چنین باشد، و اگر در دامنهٔ تعریف داشته باشیم $\sin\frac{1}{\theta} \neq 0$، آنگاه با یک تابع ثابت با مقدار ۱ سروکار داریم که حد آن در هر نقطه حدی برابر ۱ خواهد بود. تابع داده شده فقط در نقاطی که مخرج صفر شود قابل تعریف شدن نیست و اینها عبارتند از مقادیر:

$$\theta = 0, \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \ldots$$

بنابراین دامنهٔ تعریف عبارت است از

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq \frac{\pm 1}{n\pi}, n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

توجه کنید که ۰ یک نقطهٔ حدی S است زیرا که مثلاً دنبالهٔ متمایز نقاط S:

$$a_n = \frac{۱}{n\pi + \frac{\pi}{۲}} \quad , \quad n = ۱, ۲, ۳, \dots$$

به ۰ میل می‌کند. بنابراین با تعریف ارائه شده از حد می‌توان نوشت $\lim_{\theta \to ۰} \frac{\sin \frac{۱}{\theta}}{\sin \frac{۱}{\theta}} = ۱$. در واقع اگر در همهٔ نقاط $\mathbb{R}$ که خارج از S هستند، مقدار تابع را برابر ۱ تعریف کنیم، تابع ثابت ۱ روی همهٔ $\mathbb{R}$ به‌دست می‌آید.

(۱۳—۷—۴) فرض کنید $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده‌اند، a یک نقطهٔ حدی S است، $\lim_{x \to a} f(x) = ۰$ و g یک تابع کراندار است، یعنی عددی $M > ۰$ وجود دارد که $|g(x)| \leq M$ برای هر $x \in S$. در این صورت ادعا می‌کنیم

$$\lim_{x \to a} ((f \cdot g)(x)) = ۰$$

فرض کنید $e > ۰$ داده شده است. چون $\lim_{x \to ۰} f(x) = ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد که هرگاه $x \in S$ و $۰ < |x - a| < \delta$، آنگاه:

$$|f(x) - ۰| < \frac{e}{M}$$

پس با این شرط روی x، داریم $|f(x) g(x)| < e$ و حکم به اثبات می‌رسد.

(۱۳—۷—۵) در مورد $\lim_{x \to ۰} \sin \frac{۱}{x}$ بحث کنید. عبارت $\sin \frac{۱}{x}$ به‌ازای هر $x \neq ۰$ تعریف شده است، پس $x = ۰$ یک نقطهٔ حدی دامنه است و $\lim_{x \to ۰} \sin \frac{۱}{x}$ قابل طرح کردن است. اگر $\lim_{x \to ۰} \sin \frac{۱}{x}$ وجود داشته باشد و برابر L باشد، باید برای هر دنباله (a_n) از اعداد حقیقی ناصفر (داخل دامنه) که $a_n \longrightarrow ۰$، داشته باشیم $\sin \frac{۱}{a_n} \longrightarrow L$. اگر a_n را برابر $\frac{۱}{n\pi}$، $n = ۱, ۲, \dots$، بگیریم، داریم $\sin \frac{۱}{\frac{۱}{a_n}} = \sin n\pi = ۰ \longrightarrow ۰$، پس اگر حد وجود داشته باشد برابر ۰ است. از طرفی دیگر، اگر بگیریم $a_n = \frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}}$، داریم $\sin a_n = \sin(۲n\pi + \frac{\pi}{۲}) = ۱$ و دنبالهٔ ثابت ۱ به ۰ میل نمی‌کند. پس حد وجود ندارد.

(۱۳—۷—٦) علیرغم عدم وجود $\lim_{x\to ۰}\sin\frac{۱}{x}$، چون $\sin\frac{۱}{x}$ برای $x\neq ۰$ کراندار است، اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، طبق ۱۳—۷—۴ داریم $\lim_{x\to ۰} x^n\sin\frac{۱}{x}= ۰$.

در باقیماندهٔ این بخش تعمیم‌هایی از مفهوم حد را در نظر می‌گیریم. بالاخص به توصیف نمادهایی مانند نمادهای زیر می‌پردازیم:

$$\ldots, \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty, \lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \lim_{x\to -\infty} f(x)=L, \lim_{x\to +\infty} f(x)=L$$

(۱۳—۸) تعریف $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ کاملاً مشابه تعریف حد دنباله‌ای است با این تفاوت که در مورد دنباله‌ها متغیر x فقط مقادیر عدد صحیح از یک k به بعد را سیر می‌کند، ولی در اینجا دامنهٔ تعریف f، یعنی x های مجاز، یک بازهٔ به شکل $]A,+\infty[$ یا $[A,+\infty[$ را تشکیل می‌دهند. فرض کنید دامنهٔ تعریف f بازه‌ای به شکل $]A,+\infty[$ یا $[A,+\infty[$ باشد. در این صورت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ بدین معنی است که برای هر $e>۰$ داده شده، وجود داشته باشد عدد حقیقی M به طوری که برای هر x در دامنهٔ f که $x>M$، داشته باشیم $|f(x)-L|<e$. مشابهاً $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ برای تابع‌های f تعریف می‌شود که دامنه‌های آنها به شکل $]-\infty,A]$ یا $]-\infty,A[$ باشد و در اینجا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ به این معنی است که برای هر $e>۰$، عدد حقیقی M وجود داشته باشد که برای هر x در دامنه f با $x<M$ داشته باشیم $|f(x)-L|<e$.

برای دنبالهٔ اعداد حقیقی (a_n)، می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ در صورتی که برای هر $M>۰$، وجود داشته باشد عدد صحیح N که هرگاه $n>N$، آنگاه $a_n>M$. تمرین زیر اثباتی مشابه قضیهٔ متناظر برای حد معمولی دارد.

تمرین. فرض کنید f روی $]A,+\infty[$ تعریف شده است. نشان دهید $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ اعداد حقیقی (a_n) که $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ داشته باشیم $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=L$.

(۱۳—۹) حال فرض کنید تابعی f روی دامنه $]a,b[$ تعریف شده است که در آن $b\in\mathbb{R}$ و a می‌تواند یک عدد حقیقی کوچکتر از b یا $-\infty$ باشد. مفهوم $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ (تابع f

به $+\infty$ میل می‌کند وقتی x از سمت چپ به b میل کند) این است که برای هر $M > ۰$، وجود دارد $\delta > ۰$ که هرگاه x در دامنه f بوده و در بازه $]b-\delta, b[$ باشد، آنگاه $f(x) > M$. مشابهاً $\lim_{x\to b^+} f(x) = +\infty$، $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to b^+} f(x) = -\infty$ تعریف می‌شوند. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ مقصود این است که دامنهٔ تعریف شامل یک بازهٔ محذوف $]x-\rho, x+\rho[$، $\rho > ۰$، است و برای هر $M > ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد که هرگاه x در دامنه f بوده و در بازه محذوف $]x-\delta, x+\delta[-\{x\}$ قرار گیرد، آنگاه $f(x) > M$. به سادگی مشاهده می‌شود که این معادل برقراری دو شرط $\lim_{x\to b^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ است.

(۱۳—۱۰) بالاخره این تذکر لازم است که مفاهیم حد راست و چپ به طور کلی در چارچوب ارائه شده برای حد قابل بیان است. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$، یعنی در واقع دامنهٔ تعریف f را به آن x های دامنهٔ f که بزرگتر از a هستند محدود کرده‌ایم و حد تابع محدود شده را بررسی می‌کنیم. فرض کنید D دامنهٔ تعریف f باشد. برای اینکه $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ قابل طرح شدن باشد اولاً باید a یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $D\cap]a, +\infty[$ باشد. سپس برای هر $e > ۰$، باید $\delta > ۰$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in D$ که $a < x < a+\delta$ داشته باشیم $|f(x) - L| < e$. مفهوم حد چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.