خواص تابع‌های پیوسته (۱)

در دو بخش قبل کوشش کردیم بر مفهوم پیوستگی به عنوان "پایداری محاسبه" تأکید کنیم و خواننده را از اینکه پیوستگی را نوعی اتصال و یکپارچگی نمودار تابع تلقی کند بر حذر کنیم. در واقع اگر دامنهٔ یک تابع پیوسته یک بازه باشد، نمودار تابع برخی خواص "اتصال و یکپارچگی" را خواهد داشت. بعضی احکام این بخش در تأیید این ادعا هستند.

(۱۱—۱) **قضیهٔ مقدار بینی.** فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، $f(a) = A$ و $f(b) = B$. در این صورت برای هر عدد حقیقی C بین A و B، نقطه‌ای c در $[a, b]$ وجود دارد که $f(c) = C$.

اگر نمودار f را یک ریسمان فرض کنیم که بین نقطهٔ (a, A) و (b, B) کشیده شده است، طبق حکم این قضیه، ریسمان برای گذر از ارتفاع A به ارتفاع B باید از هر ارتفاع بینابینی C نیز گذر کند که تأییدی بر به هم بستگی و یکپارچگی ریسمان است. در شکل ۱، نمودار تابع سه بار، به‌ازای مقادیر $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ در $[a, b]$، از ارتفاع C عبور می‌کند.

طبعاً برای اثبات این قضیه فقط می‌توان از تعریف تابع پیوسته و احکام دیگری که از این تعریف نتیجه شده باشند استفاده کرد. نخست حالتی خاص از این قضیه را به صورت زیر به اثبات می‌رسانیم، سپس نشان می‌دهیم حالت کلی به سادگی از این حالت خاص نتیجه می‌شود:

(۱۱—۲) **(حالت خاص)** فرض کنید $g : [۰, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که $g(۰) < ۰$ و $g(۱) > ۰$. در این صورت نقطه‌ای r در $[۰, ۱]$ وجود دارد که $g(r) = ۰$.

برهان. نقاط بازهٔ $[0,1]$ در مبنای ۲ می‌نویسیم. بدین ترتیب هر عدد نمایشی به شکل $0/n_1n_2n_3\ldots$ دارد که در آن n_i برابر صفر یا یک است. بالاخص نقطهٔ ۱ به صورت $0/1111\ldots$ نمایش داده می‌شود. ما در جستجوی نقطه‌ای

$$r = 0/r_1r_2r_3\ldots$$

هستیم که $g(r) = 0$. ارقام پس از ممیز چنین عددی را متوالیاً محاسبه خواهیم کرد. $g(\frac{1}{2})$ را در نظر می‌گیریم. اگر $g(\frac{1}{2}) = 0$، عددی با خاصیت مطلوب در بازهٔ $[0,1]$ پیدا شده است و $\frac{1}{2} = 0/1000\ldots$ (طرف راست به مبنای ۲) جواب مورد نظر است. اگر $g(\frac{1}{2}) \neq 0$، یکی از دو حالت $g(\frac{1}{2}) > 0$ یا $g(\frac{1}{2}) < 0$ برقرار است. قرار می‌دهیم:

$$r_1 = \begin{cases} 0 & \text{اگر } g(\frac{1}{2}) > 0 \\ 1 & \text{اگر } g(\frac{1}{2}) < 0 \end{cases}$$

اگر $g(\frac{1}{2}) > 0$ بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ را I_1 می‌نامیم و از این پس جستجو را در این بازه ادامه می‌دهیم زیرا که همانند بازهٔ اولیه $[0,1]$، تابع در انتهای چپ این بازه منفی و در انتهای راست مثبت است. چون نمایش نقاط بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ در مبنای ۲ با رقم ۰ شروع می‌شود قرار دادیم $r_1 = 0$. همین طور اگر $g(\frac{1}{2}) < 0$، بازهٔ $[\frac{1}{2},1]$ را I_1 خوانده و جستجو برای r را در این بازه ادامه می‌دهیم که g در انتهای چپ آن منفی و در انتهای راست آن مثبت است. چون نمایش نقاط این بازه در مبنای ۲ با رقم ۱ شروع می‌شود قرار دادیم $r_1 = 1$. در هر صورت حال به بازهٔ I_1 توجه می‌کنیم و مجدداً این بازه را به دو زیربازهٔ بسته چپ و راست تجزیه می‌کنیم. اگر m_1 نقطهٔ میانی (مکان تجزیه) باشد به علامت $g(m_1)$ نگاه می‌کنیم. اگر $g(m_1) = 0$، m_1 ویژگی مورد نظر را دارد و کار تمام است، در غیر این صورت $g(m_1)$ باید مثبت یا منفی باشد. اگر $g(m_1) > 0$ آنگاه نیمهٔ چپ I_1 دارای این ویژگی است که در انتهای چپ آن تابع g منفی و در انتهای راست آن g مثبت است. از این پس جستجو برای r را در این بازه پیگیری می‌کنیم و قرار می‌دهیم $r_2 = 0$ زیرا در نمایش مبنای ۲ نیمهٔ چپ I_1 رقم دوم پس از ممیز ۰ است. بالعکس اگر $g(m_1) < 0$، نیمه راست I_1 دارای این ویژگی است که در دو انتهای چپ و راست تابع g به ترتیب منفی و مثبت است و این زیربازه را برای ادامهٔ جستجو انتخاب می‌کنیم.

در این صورت طبعاً قرار می‌دهیم $r_۲ = ۱$. در هر صورت بازهٔ انتخاب شده را به $I_۲$ نمایش می‌دهیم. حال مجدداً علامت نقطهٔ وسط $I_۲$، $m_۲$، را در نظر می‌گیریم و عمل بالا را تکرار می‌کنیم. به طور کلی بسته به این که علامت $g(m_k)$ مثبت یا منفی باشد رقم kـ‌ام پس از ممیز را به ترتیب ۰ یا ۱ می‌گیریم، و اگر $g(m_k) = ۰$، عدد مورد نظر به صورت $r = ۰/r_۱ \dots r_k$ به‌دست آمده است. وقتی هیچ $g(m_k)$ صفر نشود، هر رقم پس از اعشار محاسبه می‌شود و عددی $r = ۰/r_۱r_۲r_۳ \dots$ به‌دست می‌آید. ادعا می‌کنیم $g(r) = ۰$. مبنای شهودی این ادعا این است که دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو در نظر گرفته‌ایم $[۰, ۱] \supset I_۱ \supset I_۲ \supset \cdots$ که طول آنها به ترتیب ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، ... است و تابع g در انتهای چپ هر یک از این بازه‌ها منفی و در انتهای راست آن مثبت است. عدد r در همهٔ این بازه‌ها قرار دارد، پس دنباله‌ای از چپ به آن میل می‌کند که در همهٔ نقاط دنباله تابع g منفی است و دنباله از طرف راست به آن میل می‌کند که در تمام نقاط آن g مثبت است. از پیوستگی تابع g نتیجه خواهیم گرفت که $g(r) = ۰$.

به روش برهان خلف عمل می‌کنیم. نشان می‌دهیم $g(r) \neq ۰$ به تناقض منجر می‌شود. اگر $g(r) \neq ۰$، $g(r)$ باید مثبت یا منفی باشد. حالت $g(r) > ۰$ را در نظر می‌گیریم، مورد $g(r) < ۰$ کاملاً مشابه است. اگر $g(r) > ۰$، نشان می‌دهیم بازه‌ای $]r - \delta, r + \delta[$ حول r وجود دارد که برای هر نقطهٔ x از $[۰, ۱]$ که در این بازه قرار گیرد داریم $g(x) > ۰$. دلیل، پیوستگی g در r است (و این در واقع تنها استفاده ما از پیوستگی در اثبات است)، زیرا اگر $e > ۰$ را کوچکتر یا مساوی $g(r)$ بگیریم، طبق تعریف پیوستگی $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر عنصر دامنهٔ g (یعنی $[۰, ۱]$) که در فاصله کوچکتر از δ از r قرار گیرد داریم:

$$-e < g(r) - g(x) < e$$

چون $۰ < e \leq g(r)$، از نامساوی طرف راست نتیجه می‌گیریم که $g(x) > ۰$. حال توجه کنید که طول بازهٔ I_n برابر $\frac{۱}{۲^n}$ است و اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد $\frac{۱}{۲^n} < \delta$. از آنجا که r عضو I_n هست و طول I_n کوچکتر از δ، نتیجه می‌شود که I_n به تمامی در $]r - \delta, r + \delta[$ قرار دارد. بنابراین در هر نقطهٔ I_n، g باید مثبت باشد، در حالی که در انتهای چپ I_n تابع g همواره منفی بود. این تناقض نشان می‌دهد که $g(r) > ۰$ ممکن نیست. مشابهاً $g(r) < ۰$ نیز منجر به تناقض می‌شود. پس لزوماً $g(r) = ۰$. □

اکنون نشان می‌دهیم که حالت کلی قضیه ۱۱—۱ به سادگی از ۱۱—۲ نتیجه می‌شود. فرض کنید در صورت ۱۱—۱ داریم $A < B$. حالت $A > B$ را می‌توان با در نظر گرفتن تابع $-f$ نتیجه گرفت. پس $A < C < B$. ایدهٔ اثبات این است که از یک سو با کم کردن مقدار ثابت C از $f(x)$، تابعی پیوسته به‌دست می‌آوریم که در انتهای چپ منفی و در انتهای راست مثبت است، و از سویی دیگر با تغییر مقیاس و انتقال $[a, b]$ به $[\circ, ۱]$، مسأله را به ۱۱—۲ تبدیل می‌کنیم. برای این کار، تابع $g : [\circ, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f((۱ - t)a + tb) - C$$

توجه کنید که وقتی متغیر t بازهٔ $[\circ, ۱]$ را طی می‌کند، عبارت درجه یک $(۱ - t)a + tb$ بازهٔ $[a, b]$ را می‌پیماید.

تابع ϕ که به صورت $\phi(t) = (۱ - t)a + tb$ تعریف می‌شود پیوسته است چون از درجه ۱ نسبت به t است، داریم $g(t) = f(\phi(t)) - C$. چون ترکیب تابع‌های پیوسته، پیوسته است $f \circ \phi$ پیوسته است و افزودن تابع ثابت $-C$ نیز پیوستگی را حفظ می‌کند، پس g پیوسته است. ولی $g(\circ) = A - C < \circ$ و $g(۱) = B - C > \circ$، پس طبق ۱۱—۲، نقطه‌ای r در $[\circ, ۱]$ وجود دارد که $g(r) = \circ$، یعنی

$$f((۱ - r)a + rb) - C = \circ$$

حال $c = (۱ - r)a + rb$ نقطهٔ متناظر r در $[a, b]$ است و داریم $f(c) = C$ چنان که حکم بود.

تعدادی از احکام مربوط به تابع‌های پیوسته که حدس صحت آنها مبتنی بر شهود اتصال نمودار تابع پیوسته است از قضیهٔ مقدار بینی نتیجه می‌شوند. در باقیمانده این بخش دو نمونه از این احکام را بررسی خواهیم کرد. یک مورد استفادهٔ سادهٔ این قضیه در اثبات وجود ریشه برای معادلات است.

مثال ۱. نشان دهید معادلهٔ $\sin x - x^۲ + x + ۳ = \circ$ دارای دست‌کم دو ریشه در $[-\pi, \pi]$ است. عبارت $f(x) = \sin x - x^۲ + x + ۳$ یک تابع پیوسته تعریف می‌کند زیرا که مجموعی از تابع‌های پیوسته است. می‌خواهیم نشان دهیم دست‌کم دو x متمایز در $[-\pi, \pi]$ وجود دارند که $f(x) = \circ$. توجه

کنید که:

$$f(-\pi) = -\pi^{۲} - \pi + ۳ < ۰$$

$$f(\pi) = -\pi^{۲} + \pi + ۳ < ۰$$

ولی $f(۰) = ۳ > ۰$. بنابر قضیهٔ مقدار بینی $f(x) = ۰$ هم در $[-\pi, ۰]$ و هم در $[۰, \pi]$ ریشه دارد، که بنابراین دو ریشهٔ متمایزاند.

مثال ۲. فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ یک تابع پیوسته است، یعنی در واقع می‌توان f را یک تابع پیوسته از $[a, b]$ به $\mathbb{R}$ تصور کرد که برای هر x در دامنه، $f(x) \in [a, b]$. نشان می‌دهیم نقطه‌ای $x_۰$ در $[a, b]$ وجود دارد که $f(x_۰) = x_۰$. چنین نقطهٔ $x_۰$ را یک نقطهٔ ثابت برای تابع f می‌نامند. برای این کار، تابع کمکی $\phi(x) = x - f(x)$ را در نظر بگیرید، $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. ϕ نیز پیوسته است زیرا که تفاضل دو تابع پیوسته می‌باشد. چون $f(a) \in [a, b]$، داریم $f(a) \geq a$، پس $\phi(a) \leq ۰$. همچنین $f(b) \in [a, b]$ نتیجه می‌دهد $f(b) \leq b$، پس $\phi(b) \geq ۰$. اگر داشته باشیم $\phi(a) = ۰$ یا $\phi(b) = ۰$، داریم $f(a) = a$، یا به ترتیب $f(b) = b$، و وجود نقطهٔ ثابت به‌دست آمده است، پس فرض کنید $\phi(a) < ۰$ و $\phi(b) > ۰$. از قضیهٔ مقدار بینی نتیجه می‌گیریم نقطه‌ای c در $[a, b]$ هست که $\phi(c) = ۰$، یا $f(c) = c$ و حکم به اثبات می‌رسد. نمایش هندسی این مطلب را می‌توان به صورت زیر به خاطر سپرد. چون برای هر x در $[a, b]$، $f(x)$ نیز در $[a, b]$ است، نمودار f در مربع $[a, b] \times [a, b]$ محصور است. خط $y = x$ از گوشه چپ پایین این مربع به گوشهٔ راست بالا رسم شده است. نمودار f ضلع چپ مربع را به ضلع راست مربع وصل می‌کند. حکم مسأله این است که این نمودار لزوماً خط $y = x$ را قطع می‌کند (شکل ۳).

اکنون به تشریح دو کاربرد قضیهٔ مقدار بینی که قبلاً اشاره کردیم می‌پردازیم.

(۱۱–۳) گزاره. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک. در این صورت f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

برهان. فرض کنید x_0 یک نقطهٔ درونی I است. در این صورت ادعا می‌کنیم یک و تنها یکی از دو وضعیت زیر برقرار است:

الف) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$.

ب) برای هر $x > x_0$ داریم $f(x) < f(x_0)$ و برای هر $x < x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$.

برای اثبات فرض کنید $x_1 > x_0$. از آنجا که f یک به یک است یا $f(x_1) > f(x_0)$ و یا $f(x_1) < f(x_0)$. نخست فرض کنید $f(x_1) > f(x_0)$. نشان می‌دهیم وضعیت (الف) برقرار است. اگر $x_2 < x_0$ باید داشته باشیم $f(x_2) < f(x_0)$ زیرا اگر $f(x_2) > f(x_0)$ و $f(x_1) > f(x_0)$، از یک به یک بودن f نتیجه می‌گیریم که $f(x_1) \neq f(x_2)$. حال هر یک از $f(x_1)$ و $f(x_2)$ که بزرگتر باشد، مثلاً $f(x_1)$، تابع پیوستهٔ f باید در گذر از $f(x_0)$ به $f(x_2)$ مقدار $f(x_1)$ را یک بار دیگر در بازهٔ بین x_0 و x_2 اتخاذ کند که خلاف یک به یک بودن f است. حال فرض کنید $x_2 > x_0$، نشان می‌دهیم $f(x_2) > f(x_0)$. اگر $f(x_2) < f(x_0)$، آنگاه داریم $f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$، پس تابع پیوستهٔ f باید در گذر از مقدار $f(x_2)$ به $f(x_1)$ دست‌کم یک بار مقدار $f(x_0)$ را بین x_1 و x_2 اتخاذ کند خلاف یک به یک بودن f است زیرا که x_0 در یک طرف x_1 و x_2 قرار دارد. به همین ترتیب اگر برای یک نقطهٔ x_1 با $x_1 > x_0$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_0)$، می‌توانیم استدلال کنیم که وضعیت (ب) برقرار است.

برای ادامه اثبات، نقطه دلخواه درونی x_0 از I را در نظر می‌گیریم. نسبت به x_0، یکی از دو شرط (الف) یا (ب) بالا برقرار است. در حالت (الف) نشان می‌دهیم f لزوماً صعودی است و در حالت (ب) لزوماً نزولی. مثلاً فرض کنید وضعیت (ب) برقرار است. نشان می‌دهیم f نزولی است. دو نقطه x_1 و x_2 در I در نظر بگیرید که $x_1 < x_2$. باید ثابت کنیم $f(x_1) > f(x_2)$. وضعیت نسبی سه نقطهٔ x_0، x_1 و x_2 روی I به یکی از سه صورت زیر است که در هر مورد استدلال لازم را ارائه می‌کنیم:

$x_0 < x_1 < x_2$ طبق (ب) داریم $f(x_1) < f(x_0)$ و $f(x_2) < f(x_0)$. حکم نخست برهان (برقرار بودن (الف) یا (ب)) برای هر نقطهٔ درونی درست است، پس اگر این حکم را برای نقطهٔ درونی x_1

به‌کار بریم، چون $f(x_0) > f(x_1)$، نتیجه می‌شود که $f(x_2) < f(x_1)$، همان گونه که می‌خواستیم.

$x_1 < x_0 < x_2$ چون در وضعیت (ب) برای x_0 هستیم، داریم $f(x_1) > f(x_0)$ و $f(x_2) < f(x_0)$، پس $f(x_2) < f(x_1)$.

$x_1 < x_2 < x_0$ در اینجا حکم نخست برهان را برای نقطهٔ درونی x_2 به‌کار می‌گیریم. چون طبق (ب) $f(x_2) > f(x_0)$، نتیجه می‌شود که $f(x_1) > f(x_2)$ و حکم به اثبات می‌رسد.

استدلال در حالتی که (الف) برای x_0 برقرار باشد، کاملاً مشابه است و به خواننده واگذار می‌شود. □

کاربرد مهم دیگر قضیهٔ مقدار بینی که ارائه می‌کنیم پیوستگی وارون یک تابع پیوسته است. اگر $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، قرار می‌دهیم:

$$T = \{f(x) \mid x \in S\}$$

T را مجموعهٔ مقادیر T می‌نامند. اگر f یک به یک باشد، به‌ازای هر $y \in T$ یک و تنها یک x در S وجود دارد که $f(x) = y$. به این ترتیب تابعی $f^{-1} : T \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود که $f^{-1}(y) = x$. f^{-1} را وارون یا معکوس (ترکیبی) f می‌نامند. دو حکم زیر برقرارند:

برای هر x در S: $\quad f^{-1}(f(x)) = x$

برای هر y در S: $\quad f(f^{-1}(y)) = y$

لازم به ذکر است که چون f^{-1} نقش x و y نسبت به f را تعویض می‌کند، نمودار f^{-1} در واقع قرینهٔ نمودار f نسبت به خط $y = x$ است (شکل ۴).

(۱۱—۴) گزاره. فرض کنید I یک بازه است و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یک به یک و پیوسته. در این صورت f^{-1} نیز پیوسته است.

برهان. طبق گزارهٔ ۱۱—۳ تابع f صعودی یا نزولی است. حکم را در حالتی که f صعودی است ثابت می‌کنیم و حالت f نزولی را که مشابه است به خواننده واگذار می‌کنیم. نخست توجه کنید که مجموعهٔ

تصویر، یعنی:

$$J = \{f(x) \mid x \in I\}$$

یک بازه است، بدین معنی که اگر y_1 و y_2 دو نقطهٔ J باشند که $y_1 < y_2$، آنگاه $[y_1, y_2]$ به تمامی در J قرار دارد. این مطلب را به این صورت توجیه می‌کنیم. چون y_1 و y_2 در J هستند، x_1 و x_2 یگانه در I وجود دارند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. چون f صعودی است، $x_1 < x_2$. حال اگر نقطه‌ای y در $[y_1, y_2]$ باشد، چون f روی $[x_1, x_2]$ پیوسته است، طبق قضیهٔ مقدار بینی باید عددی x در $[x_1, x_2]$ یافت شود که $f(x) = y$، پس $y \in J$.

برای اثبات پیوستگی f^{-1}، طبق گزاره ۱۰—۱ بخش پیشین کافی است نشان دهیم که برای هر دنباله (y_n) از نقاط J (دامنهٔ f^{-1}) که $y_n \longrightarrow y$، $y \in J$، داریم $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y)$. اول فرض کنید y یک نقطهٔ درونی J است و $y = f(x)$. ادعا می‌کنیم که در این صورت x نیز یک نقطهٔ درونی I است. برای این منظور، چون y نقطهٔ درونی است، $\delta > 0$ وجود دارد که $[y - \delta, y + \delta]$ به تمامی در J قرار دارد. پس $y - \delta = f(x_1)$ و $y + \delta = f(x_2)$، و از آنجا که f صعودی است $x_1 < x < x_2$، پس بازهٔ $[x_1, x_2]$ حول x به تمامی در I قرار دارد و x یک نقطهٔ درونی است. اکنون به اثبات $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y)$ می‌پردازیم. قرار می‌دهیم $x_n = f^{-1}(y_n)$، یا معادلاً $f(x_n) = y_n$. دو نقطهٔ $x + \rho$ و $x - \rho$، $\rho > 0$، حول x در I در نظر بگیرید. باید ثابت کنیم N به قسمی وجود دارد که برای $n > N$ داریم $x_n \in]x - \rho, x + \rho[$. قرار دهید $f(x - \rho) = \underline{y}$ و $f(x + \rho) = \overline{y}$. چون $y_n \longrightarrow y$، N وجود دارد که برای $n > N$ داریم $y_n \in]\underline{y}, \overline{y}[$. نتیجه این که برای $n > N$ داریم $x_n \in]x - \rho, x + \rho[$ و حکم به اثبات می‌رسد. وقتی y یک نقطهٔ انتهایی J باشد، و این تنها در صورتی است J از یک طرف بسته باشد، I نیز در طرف متناظر بسته است (به علت صعودی بودن f) و استدلال بالا با استفاده از بازه‌هایی که یک انتهای آنها بسته است تکرار می‌شود. □

مثال ۱. فرض کنید $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی است. تابع $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x^n$ تعریف می‌کنیم که در آن $n \geq 1$ یک عدد صحیح است. این تابع یک به یک و پیوسته و صعودی است، بنابراین وارون آن نیز باید پیوسته باشد. از آنجا که مجموعهٔ تصویر نیز برابر $\mathbb{R}^+$ است،

تابع وارون به دامنهٔ $\mathbb{R}^+$ است. این تابع عبارت است از $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.

مثال ۲ (وارون توابع مثلثاتی) شش تابع مثلثاتی که تعریف کرده‌ایم همه تناوبی هستند، پس یک به یک نیستند و وارون به مفهوم معمول ندارند. ولی اگر دامنهٔ هر یک از این توابع را طوری محدود کنیم که در آن دامنه، تابع یک به یک باشد، می‌توان از وارون تابع مثلثاتی صحبت کرد. برای این کار انتخاب‌های متنوعی به عنوان دامنهٔ هر یک از تابع‌ها وجود دارد ولی قراردادهای زیر، قراردادهای متداول‌اند:

الف) برای سینوس، دامنه را به $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کنیم که در این بازه سینوس همهٔ مقادیر $[-1, 1]$ را به طور یک به یک اتخاذ می‌کند. بنابراین $\sin^{-1}$ روی $[-1, 1]$ تعریف می‌شود و مقادیر آن در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ منظور می‌شوند. $\sin^{-1}$ را گاهی به $Arcsin$ (با "A" بزرگ) نمایش می‌دهند.

ب) برای کسینوس، دامنه به $[0, \pi]$ محدود می‌شود که کسینوس این بازه را به طور یک به یک بر $[-1, 1]$ می‌نگارد. بدین ترتیب $\cos^{-1}$ روی $[-1, 1]$ تعریف شده و در $[0, \pi]$ مقدار می‌گیرد. $\cos^{-1}$ را به $Arccos$ نیز نمایش می‌دهند.

ج) برای تانژانت، از $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ استفاده می‌کنیم. تانژانت این بازه را به طور یک به یک بر تمام $\mathbb{R}$ می‌نگارد. $\tan^{-1}$ یا $Arctan$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و در $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ مقدار می‌گیرد.

تمرین. ثابت کنید مجموعهٔ تصویر تانژانت همه $\mathbb{R}$ است.

د) برای $\cot\theta$، $sec\theta$ و $csc\theta$، به ترتیب دامنه‌های $]0, \pi[$، $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ و $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$ را منظور می‌کنند.